ZEITSCHRIFT FÜR PHYSIK

21. BAND

ZEITSCHRIFT FÜR
PHYSIK

HERAUSGEGEBEN VON DER
DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
ALS ERGÄNZUNG ZU IHREN „VERHANDLUNGEN"
UNTER DER REDAKTION VON

KARL SCHEEL

EINUNDZWANZIGSTER BAND

Mit 119 Textfiguren

(Ausgegeben Januar — Februar 1924)

FRIEDR. VIEWEG & SOHN
AKT.-GES. BRAUNSCHWEIG
UND
JULIUS SPRINGER
BERLIN

1924

Seite

Werner Braunbek, Kraft und Feld an der Kathode einer elektrischen Glimmentladung. Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 7. Dezember 1923) 204

Karl Fehrle, Über die quantitative Beziehung zwischen der sprungweisen Änderung der Atome und der harmonischen Komponenten ihrer Massenänderung. II. Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 14. September 1923) 219

R. Mecke, Zur Quantenatomistik. (Eingegangen am 20. Dezember 1923) . 223

J. Bingel, Über lichtelektrische Wirkung in Steinsalzkristallen. Mit zehn Abbildungen. (Eingegangen am 20. Oktober 1923) 229

L. Nordheim, Die Berechnung höherer Näherungen zufällig entarteter Systeme. (Eingegangen am 9. Dezember 1923) 242

G. B. Deodhar, Über die Änderungen des Torsionsmoduls eines Eurekadrahtes durch Ziehen. Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 31. Oktober 1923) 247

E. Goldstein, Über den Dunkelraum an der Kathode induzierter Entladungen. (Eingegangen am 29. Dezember 1923) 252

Walther Gerlach und E. Madelung, Untersuchungen an Radiometern III. Notiz zur Radiometertheorie von E. Einstein. (Eingegangen am 28. Dezember 1923) 254

P. Ludewig und E. Lorenser, Über die Verwendbarkeit von Radium- und Urannormallösungen für Emanationsmessungen. II. (Aus dem Radium-Institut der Bergakademie Freiberg, Sachsen). Mit einer Abbildung. (Eingegangen am 5. Januar 1924) 258

J. Eggert und W. Noddack, Berichtigung zu der Arbeit: „Zur Prüfung des Äquivalentgesetzes an Trockenplatten“ 264

E. Fues, Eine spektroskopische Bestätigung der Bohrschen Besetzungszahlen bei Cäsium. Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 17. Dezember 1923) 265

Walther Kutzner, Über das Wahrscheinlichkeitsgesetz in Anwendung auf die radioaktive Strahlung des Poloniums. Mit fünf Abbildungen. (Eingegangen am 21. Dezember 1923) 281

Adalbert Bokowski, Über die Energiekomponenten in Hilberts Theorie. (Eingegangen am 19. Dezember 1923) 299

A. Becker, Über die Präzisionsmessung der Radiumemanation. Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 3. Januar 1924) 304

H. Kopfermann, Über sensibilisierte Fluoreszenz von Blei- und Wismutdampf. Mit drei Abbildungen. (Eingegangen am 5. Januar 1924) . . 316

A. Friedmann, Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. (Eingegangen am 7. Januar 1924) 326

M. La Rosa, Addiert sich die Geschwindigkeit des Lichtes zu derjenigen der Lichtquelle? Dafür sprechende Beweise aus den Phänomenen der „veränderlichen Sterne“. Mit drei Abbildungen. (Eingegangen am 20. Oktober 1923) 333

A. Szegvari, Über ultramikroskopische Untersuchungen bei einseitiger Beleuchtung. Der ultramikroskopische Mie-Effekt. Mit elf Abbildungen. (Eingegangen am 9. Januar 1924) 348

L. S. Ornstein und H. C. Burger, Zusammenwirken von Lichtquanten und Planckscher Gesetz. (Mitteilungen aus dem Physikalischen Institut der Universität Utrecht.) (Eingegangen am 11. Januar 1924) 358

P. Gruner, Geometrische Darstellungen der speziellen Relativitätstheorie, insbesondere des elektromagnetischen Feldes bewegter Körper. Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 13. Januar 1924) 366

E. Warburg, Über die Bildung von Jodwasserstoff durch stille Entladungen. (Eingegangen am 16. Januar 1924) 372

Autorenregister 381

Über elektrische Leitfähigkeit bei Anregung und Lichtemission von Phosphoren.

Von **B. Gudden** und **R. Pohl** in Göttingen.

Mit einer Abbildung. (Eingegangen am 3. Dezember 1923.)

§ 1. Lenard[1]) und seine Schüler haben eine Reihe von Untersuchungen über die elektrische Leitfähigkeit bestrahlter und erregter Phosphore angestellt. Sie sind übereinstimmend zu dem Ergebnis gekommen, daß 1. die durch Licht hervorgerufene Leitfähigkeit „nicht mit der Erregung der Phosphoreszenz zusammenhängt", und 2. daß die Lichtemission der Phosphore selbst keinen Einfluß auf ihre Leitfähigkeit besitzt. Im Gegensatz zu diesen beiden Angaben haben wir 1920 gezeigt[2]), daß 1. die durch Licht hervorgerufene Leitfähigkeit der Phosphore auf das allerengste mit der Erregung der Phosphoreszenz verknüpft ist, und 2. daß die Lichtemission der Phosphore selbst sehr deutlich in ihrer elektrischen Leitfähigkeit in Erscheinung tritt.

In beiden Tatsachen sahen wir sinnfällige Beweise dafür, daß es sich sowohl bei der Erregung wie bei der Emission der Phosphore tatsächlich um räumliche Verlagerung von Elektronen handelt.

Wir glauben heute, über den Mechanismus, der beiden Tatsachen zugrunde liegt, nähere Angaben machen zu können. Sie bilden den Inhalt der nachfolgenden Ausführungen.

§ 2. Wir erinnern kurz an die Zerlegung des gesamten lichtelektrischen Stromes in zwei Komponenten, den Primärstrom und den Sekundärstrom[3]). Wir setzen dabei einen einheitlichen Kristall und gleichförmige Lichtabsorption in seinem Innern voraus.

Im Primärstrom wandern die vom Licht abgespaltenen Elektronen zur Anode. Ein freies Wandern mag vorkommen. Wahrscheinlicher ist im allgemeinen ein Weiterreichen der Elektronen von Molekül zu Molekül[4]). — Das ist der negative Anteil des Primärstromes.

Am Ort des elementaren $h\nu$-Prozesses bleibt ein angeregtes Molekül als positives Ion zurück. Es mag in Einzelfällen zur Anode wandern

---

[1]) P. Lenard und Sem Saeland, Ann. d. Phys. (4) **28**, 476, 1909; R. Oeder, ebenda **34**, 445, 1911, insbesondere § 4; F. Schmidt, ebenda **44**, 477, 1914, insbesondere S. 489.

[2]) B. Gudden und R. Pohl, ZS. f. Phys. **3**, 98, 1920; **4**, 206, 1921.

[3]) Ausführlicher ZS. f. Phys. **16**, 170, 1923.

[4]) Diese Frage steht in Beziehung zum Mechanismus des Hall-Effektes, den wir u. a. am belichteten Diamanten beobachtet haben.

können. Im allgemeinen aber wird sich nur der Ort der positiven Elementarladung zur Kathode verlagern, indem das angeregte Molekül seinem zur Kathode hin folgenden Nachbarn ein Elektron entzieht, und so fort bis zur Elektrode. — Das ist der positive Anteil des Primärstromes.

Bilden sich positiver und negativer Anteil des Primärstromes in gleicher Weise aus, so mißt uns der Strommesser alle N Elektronen des Quantenäquivalentes.

Ist der Kristall ein vollkommener Isolator, so erreichen zunächst nur die Elektronen ihre Elektrode, und der Strommesser zählt dann nur $N/2$. Doch kann man dann nachträglich den positiven Anteil des Primärstromes erzwingen: entweder durch Steigerung der molekularen Wärmebewegung oder dadurch, daß man das angeregte Molekül Frequenzen seines Absorptionsspektrums absorbieren läßt. Dann zählt der Strommesser zum zweiten Male $N/2$.

Der Sekundärstrom entsteht, kurz gesagt, durch eine Änderung des spezifischen Widerstandes. Diese erfolgt bei höheren Feldstärken und durch dichte Lagerung der angeregten Moleküle. Wie alle Gitterstörungen bewirken auch angeregte Moleküle eine Herabsetzung des elektrischen Widerstandes.

Der Sekundärstrom verschwindet bei Beseitigung seiner Ursache. Man muß die angeregten Moleküle aus dem Kristallinnern entfernen, also dafür sorgen, daß stets auch der positive Anteil des Primärstromes seine Elektrode erreicht. Gesteigerte thermische Bewegung oder Lichtabsorption in den angeregten Molekülen sind die schon oben dafür genannten Kunstgriffe. Doch wirken sie nur, solange nicht starke Sekundärströme irreversible Änderungen im Gitter hervorgerufen haben.

§ 3. Der lichtelektrische Sekundärstrom bei Erregung eines Phosphors. Wir haben seinerzeit die spektrale Erregungsverteilung mehrerer Phosphore mittels lichtelektrischer Ströme ausgemessen. Dabei traten die charakteristischen d-Gebiete maximaler Erregung klar zutage.

Diese Beobachtungen benutzten, wie wir heute wissen, den lichtelektrischen Sekundärstrom. Die elektrischen Feldstärken lagen zwischen 6000 und 17 000 Volt/cm. Die Ströme bildeten sich langsam aus. Die Ablesung erfolgte erst nach vier Minuten dauernder Anregung. Bei kurzen Anregungszeiten von nur einer Sekunde traten die langsam an- und abklingenden d-Gebiete relativ nur wenig hervor.

Fügten wir dem erregenden Licht langwelliges rotes hinzu, so beseitigte das die Grundlage des Sekundärstromes, nämlich die an-

geregten Moleküle. Der lichtelektrische Strom sank auf einen kleinen Bruchteil herunter [1]).

Das alles läßt sich, was wir bisher nicht erwähnt haben, sehr bequem mit einem Zeigergalvanometer als Vorlesungsversuch vorführen. Ein Zn Cu γ-Phosphor gab z. B. mit Leichtigkeit sekundäre Ströme von der Größenordnung 10^{-4} Amp.

Im Lichte unserer heutigen Kenntnis ist die Anwendung der Sekundärströme zur Untersuchung der Anregungsverteilung eines Phosphors ein etwas primitives Verfahren. Es hat zwei große Nachteile: Die lichtelektrischen Ströme sind der Lichtenergie nicht proportional, und ihre Größe erlaubt keinen Schluß auf die Anzahl der angeregten Moleküle, da der Sekundärstrom in verwickelter und keineswegs geklärter Weise von der Konzentration der angeregten Moleküle und der Feldstärke abhängt.

Der Sekundärstrom tritt an Phosphoren besonders hervor, wenn die Erregung im elektrischen Felde erfolgt. Der Grund wird aus dem Folgenden ersichtlich werden.

§ 4. Der lichtelektrische Primärstrom bei Erregung eines Phosphors. Zur Untersuchung des lichtelektrischen Primärstromes benutzt man allgemein größere, einheitliche Kristalle. Kristallpulver sind, wenigstens für quantitative Beobachtungen, nicht zu brauchen.

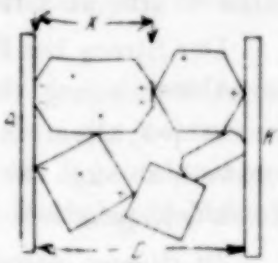


Fig. 1.

Kristallkörner füllen den Zwischenraum zwischen den Elektroden A und K in der Weise aus, die schematisch in Fig. 1 gezeigt wird. Ionisiert das Licht einzelne Moleküle im Kristallinnern, so können die getrennten Ladungen im Felde zunächst nur bis an die Grenze des Kornes laufen, sich also nur um den Durchmesser x eines Kornes voneinander entfernen. Der Strommesser zählt aber nur dann ein abgespaltenes Elektron mit dem vollen Betrag seiner Ladung, wenn der Gesamtweg beider Träger gleich dem Abstande D der Elektroden AK wird. Im Falle des Pulvers zählt der Strommesser statt des vollen Quantenäquivalents nur den Bruchteil x D.

Bei genügender Flächendichte tritt ein Ladungsübergang an den Korngrenzen ein. Dadurch werden die Wege vergrößert. Gleichzeitig gibt es aber infolge der mehr oder minder punktförmigen Berührungsstellen benachbarter Körner Verluste durch Wiedervereinigung. Außerdem wird das elektrische Feld durch die wechselnden Querschnitte

[1]) B. Gudden und R. Pohl, ZS. f. Phys. **2**, 181, 1920, § 12; **3**, 98, 1920, § 4.

verzerrt. Man erhält unübersichtliche Erscheinungen. Es gibt in Kristallpulvern auch für den Primärstrom keine Proportionalität zur Lichtenergie.

Leider liegen nun gerade die typischen Phosphore nicht in größeren einheitlichen Kristallen vor. Es handelt sich vielfach um zusammengesinterte Gemenge, im günstigsten Falle um feinkristalline Pulver. Man muß sich daher einstweilen auf mehr qualitative Beobachtungen beschränken.

Der Nachweis beider Anteile des lichtelektrischen Primärstromes gelingt ohne weiteres. Wir nehmen z. B. als Elektroden A und K zwei 1 mm dicke Bleche von 50 mm Länge. Sie werden auf Bernstein einander in $D = 1$ mm Abstand gegenübergestellt. Eine aufgeschraubte Quarzplatte verhindert das Herausfallen des Pulvers aus dem je 1 mm tiefen und breiten Spalt. — Die Spannung zwischen A und K beträgt etwa 100 Volt. Der lichtelektrische Strom wird durch Aufladung eines Einfadenelektrometers (1 Skt = 0,1 Volt) gemessen[1]).

Erregt man den Phosphor mit $\lambda = 436\ \mathrm{m}\mu$, so setzt der lichtelektrische Primärstrom momentan, d. h. innerhalb der Schwingungsdauer des Saitenelektrometers, mit einem endlichen Werte ein. Er bleibt dann entweder zeitlich konstant oder nimmt bis zu einem stationären Werte zu oder ab.

Der Strom bei Beginn der Belichtung entsteht vorzugsweise durch die Abwanderung der abgespaltenen Elektronen in Richtung auf die Anode (negativer Anteil des Primärstromes). Dieser Strom bleibt konstant, solange der verfügbare Vorrat unerregter Zentren (z. B. Cu–S-Moleküle), praktisch ungeändert bleibt.

Zu diesem negativen Anteil des Primärstromes tritt ein zeitlich anwachsender positiver Anteil hinzu. Er besteht in dem Ersatz der vorher zur Anode abgewanderten Elektronen.

Umgekehrt deuten wir die häufigere zeitliche Abnahme durch eine Erschöpfung des verfügbaren Vorrats unerregter Zentren[2]). Sind z. B. im ZnS-Gitter die eingesprengten Cu–S-Moleküle sämtlich erregt, so verschwindet die selektive Lichtabsorption im Cu–S-Molekül und es bleibt nur die Lichtabsorption im ZnS-Gitter, das seinerseits wegen seines hohen optischen Brechungsindex einen lichtelektrischen Primärstrom liefert.

---

[1]) Wir danken dem Kuratorium der Hoshi-Stiftung für die Mittel zur Beschaffung der Apparate.

[2]) In gleichem Sinne wirkt auch die bei allen lichtelektrischen Leitern ohne spontane Nachlieferung eintretende Feldverzerrung.

Es ist also bei dieser Auffassung des Phosphoreszenzvorganges im elektrischen Felde das bei der Erregung abgewanderte und das als Ursache der Lichtemission aufgenommene Elektron keineswegs identisch. Vielmehr ist das Ergebnis von Anregung und Lichtemission eines Zentrums genau das gleiche wie bei einem $h\nu$-Absorptionsprozeß im Grundmaterial allein: die getrennten Ladungen laufen im Felde bis an die Grenzflächen des Kristalles. Der Unterschied liegt nur darin, daß in Phosphoren bei der Nachlieferung von Elektronen als Ersatz der abgewanderten Elektronen Lichtemission auftreten kann. Notwendig ist die Lichtemission auch bei Phosphoren nicht. Das beweist die „Tilgung", die lichtlose Rückkehr.

In den bisher besprochenen Fällen rührt der positive Anteil des Primärstromes nur von den Elektronen her, die schon während des Erregungsvorganges spontan durch die Wärmebewegung aus der Richtung der Kathode her nachgeliefert werden.

Durch den oben in § 2 genannten Kunstgriff der Bestrahlung mit langwelligem Licht läßt sich diese Nachlieferung (ohne Feld: „Rückkehr") außerordentlich beschleunigen: Das vergrößert den Primärstrom um rund das Doppelte. Ob der Faktor im einzelnen größer oder kleiner als zwei ist, hängt nur davon ab, ob die gleichzeitige Rotbestrahlung eine merkliche Vergrößerung des zur Erregung verfügbaren Zentrenbestandes bewirkt oder nicht[1]).

Die Tabelle gibt derartige Beobachtungen für drei verschiedene Phosphore, die wir der Liebenswürdigkeit Prof. Giesels verdanken. Man sieht in allen Fällen die starke Vermehrung des lichtelektrischen Primärstromes um einen von zwei nicht weit verschiedenen Faktor.

§ 5. Elektrische Leitung eines Phosphors während der Lichtemission. Wir haben 1920 ausgesprochen, daß die Lichtemission eines Phosphors sich in seiner elektrischen Leitfähigkeit bemerkbar machen müsse. Wesentlich für den Nachweis sei nur, daß pro Sekunde eine hinreichende Zahl von Elektronen zurückkehre.

Wir haben diese Behauptung damals dadurch bewiesen, daß wir an zwei verschiedenen Phosphoren die Rückkehr der Elektronen durch rotes, ausleuchtendes Licht beschleunigt haben. Es war ein wegen seiner besonders hohen „Ausleuchtung" ausgewählter ZnSMn-Phosphor und ein ZnS-Phosphor mit unbekanntem Metallzusatz. In beiden Fällen gab ein Stoßgalvanometer eine vorübergehende Erhöhung der elektrischen Leitfähigkeit.

---

[1]) Im Sinne der Vergrößerung wirkt auch die Aufhebung der Feldverzerrung.

Hingegen war uns der galvanometrische Nachweis der rückkehrenden Elektronen am ZnSCuα-Phosphor nicht gelungen. — Wir kennen heute den Grund dieses Mißerfolges: Der Nullpunkt unseres Stoßgalvanometers war durch den nach Schluß der Erregung noch vorhandenen Sekundärstrom stark verschoben. Gaben wir das ausleuchtende rote

Phosphor	Spannung Volt	Stromstärke in willkürlichen Einheiten bei Belichtung mit: blau allein (436 mμ)	rot allein (> 620 mμ)	blau + rot	Abgezogener Dunkelstrom	Das rote Licht vergrößert den lichtelektrischen Primärstrom um den Faktor
ZnSCuα	80	6,0	0,7	12,2	0,6	1,92
	—	15,9	1,6	34	1,4	2,05
	120	25,8	0	48	0	1,86
		12,1	0	22,5	0	1,86
	Erregung geschwächt	14,5	0	29	0	2,00
		7,05	0	13,6	0	1,93
	—	—	—	—	—	**Mittel 1,94**
Zn S Mn	84	1,07	0,14	2,18	1,30	3,1
	126	2,75	0,08	8,90	3,20	3,26
	—	3,47	0,86	10,36	3,14	2,74
	—	3,23	0,08	9,47	2,93	2,90
	250	15,97	3,27	40,37	4,03	2,93
	—	—	—	—	—	**Mittel 2,87**
ZnSCuγ	126	4,24	1,04	7,14	2,76	1,44
	—	4,01	0,62	6,93	2,16	1,57
	—	3,86	0,71	6,67	1,88	1,54
	—	—	—	—	—	**Mittel 1,52**

Licht hinzu, so überlagerte sich der Strom der zum angeregten Molekül wandernden Elektronen dem Zurückweichen des Galvanometernullpunktes, der infolge der Zerstörung des Sekundärstromes eintrat. Die bekannte kräftige Auslöschung des ZnSCuα-Phosphors läßt den Sekundärstrom so schnell zusammenbrechen, daß man nicht mit einem langsam schwingenden Stoßgalvanometer arbeiten darf [1]).

Wir haben daher später das Galvanometer durch ein praktisch trägheitsloses Saitenelektrometer parallel zu einem großen Widerstand ersetzt. Dann ist es ein leichtes, auch trotz des Sekundärstromes beim ZnSCuα-Phosphor im ersten Augenblick eine deutliche Zunahme des gesamten Stromes nachzuweisen.

---

[1]) Vielleicht erklärt sich in ähnlicher Weise, warum Oeder in seiner in § 1 zitierten Arbeit den Einfluß der Phosphoreszenzemission auf die elektrische Leitung des Phosphors nicht gefunden hat, obwohl er die Präparate mit ausleuchtendem, die Emission beschleunigenden Lichte bestrahlte.

Es ist also im Gegensatz zu unserer früheren Auffassung[1]) für den elektrischen Nachweis der Elektrizitätsbewegung vollständig gleichgültig, ob das zum angeregten Molekül wandernde Elektron eine Lichtemission hervorruft oder nicht. Der stark getilgte ZnSCuα-Phosphor verhält sich elektrisch nicht anders, als der durch starke Ausleuchtung ausgezeichnete ZnSMn-Phosphor.

Quantitativ folgt das schon aus den Zahlen der Tabelle. Dort wurde der Anfangswert des lichtelektrischen Primärstromes für ZnSCuα ebenso wie für andere Phosphore rund verdoppelt, wenn rotes Licht die angeregten Zentren sofort durch Nachlieferung der fehlenden Elektronen in den unerregten Zustand zurückversetzt. Ob die Tilgung überwiegt oder die Ausleuchtung, ist für den elektrischen Nachweis der Elektronenbewegung ohne Bedeutung. Dies Ergebnis erscheint uns nicht unwichtig.

Unser elektrischer Nachweis der Elektrizitätsbewegung bei der Emission des Phosphoreszenzlichtes ist neuerdings von Rupp[2]) in einer umfangreichen Arbeit bestätigt worden. Rupp beschleunigt den Emissionsvorgang nicht, wie wir, durch langwelliges Licht, sondern durch Erwärmung.

Wir hatten gezeigt, daß die vom Stoßgalvanometer gemessene Elektrizitätsmenge um so größer wird, je mehr Dauerzentren wir zuvor erregt hatten. Rupp bestätigt auch dieses. Er findet sogar darüber hinaus eine völlige Proportionalität zwischen der optisch gemessenen Lichtsumme und der mit dem Stoßgalvanometer gemessenen Elektrizitätsmenge. Dabei bringt er ein neues, wichtiges Ergebnis: Er zeigt, daß die bewegte Elektrizitätsmenge mit wachsender Spannung einen Sättigungswert erreicht. Darin sehen wir eine vorzügliche Stütze unserer Auffassung, daß im elektrischen Felde die Elektronenbewegung in einem Phosphor mit dem Mechanismus des lichtelektrischen Primärstromes identisch ist, für den Sättigung ein wesentliches Kennzeichen bildet.

Beim lichtelektrischen Primärstrom tritt jedes absorbierte Planck-sche $h\nu$ als ein Elektron in Erscheinung[3]). Rupp macht eine Überschlagsrechnung, ob ebenso jedes $h\nu$ der emittierten Lichtsumme sich als ein Elektron bemerkbar macht. Er findet etwa doppelt zuviel Elektronen, die er im Sinne besonderer Lenardscher Vorstellungen deutet. — Wir haben gegen die Einzelheiten der Rechnung Bedenken. Sie beachtet z. B. nicht den in der Figur skizzierten Einfluß der Korn-

[1]) ZS. f. Phys. **3**, 98, 1920, § 5.
[2]) E. Rupp, Ann. d. Phys. (4) **70**, 391, 1923.
[3]) B. Gudden und R. Pohl, Phys. ZS. **22**, 529, 1921; ZS. f. Phys. **17**, 331, 1923.

größe. Auch scheint uns unentschieden, ob wirklich das ganze und nicht nur das halbe Quantenäquivalent erwartet werden darf. Möglicherweise wird durch die Erwärmung nur der positive Anteil des Primärstromes ausgelöst. Der negative wird vielleicht schon vorher wandern, wenn an den zuvor erregten Phosphor nachträglich das elektrische Feld angelegt wird. — Unseres Erachtens ergeben die Ruppschen Messungen, daß etwa ein Fünftel des Quantenäquivalents beobachtet worden ist, also die Größenordnung vorliegt, die der Mechanismus des Primärstromes erwarten läßt.

Wir zweifeln nicht, daß sich an einheitlichen Kristallen Lichtsummenmessungen elektrisch nach dem Quantenäquivalentsatz in absolutem Maße ausführen lassen. Dabei ist es gleichgültig, ob man die Emission durch Erwärmung oder durch langwelliges Licht beschleunigt. Denn die Tilgung des letzteren führt, wie wir oben fanden, nicht zu einer Verkleinerung der als Elektrizitätsmenge gemessenen Lichtsumme. Die erforderliche Sättigung ist auch bei der Ausleuchtung mit rotem Licht zu erzielen. Es kommt nur darauf an, die Kristalle ohne Feld zu erregen und dann langsam das Feld anzulegen. Sonst bekommt man, insbesondere bei Pulvern, erhebliche Sekundärströme.

Zusammenfassung.

1. Es werden die Elektronenbewegungen bei der Erregung und der Lichtemission eines Phosphors im elektrischen Felde mit den Erscheinungen des primären und des sekundären lichtelektrischen Stromes in Kristallen in Zusammenhang gebracht.

2. Es ist für den elektrischen Nachweis der Elektronenbewegung gleichgültig, ob sie zur Lichtemission führt oder nicht.

3. Es wird kurz erörtert, unter welchen experimentellen Bedingungen der Quantenäquivalentsatz die $h\nu$-Elementarprozesse bei der Absorption und Emission eines Phosphors auf elektrischem Wege zu zählen erlaubt.

Göttingen, I. Phys. Inst. d. Univers., November 1923.

Über die Waetzmannsche Interferenzmethode zur Untersuchung optischer Systeme.

(I. Teil.)

Von **E. Bratke** in Spandau.

Mit zwölf Abbildungen. (Eingegangen am 10. November 1923.)

Problemstellung: Waetzmann, der zum ersten Male Interferenzen zur Untersuchung des Korrektionszustandes eines abbildenden optischen Systems benutzte [1]), fand, daß sich die von ihm verwandte Interferenzerscheinung ganz vorzüglich zu qualitativen Beobachtungen der Abbildungsfehler optischer Systeme verwenden läßt. Seine Methode beruht auf der Tatsache, daß die Abbildungsfehler Veranlassung für das Auftreten von Interferenzkurven geben, die bei idealer, punktweiser Abbildung nicht vorhanden sind, bzw. darauf, daß die Abbildungsfehler Abweichungen in den wirklich beobachteten Interferenzbildern von den bei idealer Abbildung theoretisch geforderten Interferenzbildern (äquidistante, gerade Linien) ergeben. Aus den verschiedenartigen Formen dieser Kurven konnte er dann qualitativ auf die Art und Größe der Abbildungsfehler schließen. Insbesondere wurden von ihm in zahlreichen, experimentellen Untersuchungen die Zusammenhänge in dem Aussehen der Interferenzbilder bei Vorhandensein von sphärischen und chromatischen Abweichungen aufgedeckt.

Bevor nun der Versuch gemacht werden konnte, die Methode auch quantitativ brauchbar zu machen, mußte die Theorie der Interferenzerscheinung erst bei idealer Abbildung exakt durchgeführt werden. Es mußte bewiesen werden, daß alle Abweichungen der Interferenzkurven von der exakten Geradlinigkeit wirklich nur von Abbildungsfehlern herrühren und nicht etwa schon in den bei früheren theoretischen Untersuchungen der von Waetzmann benutzten Interferenzanordnung eingeführten Vernachlässigungen höherer Potenzen der in den Rechnungen auftretenden kleinen Winkelgrößen begründet sind. Diese exakte Grundlage ist von Bratke und Waetzmann [2]) gegeben worden.

Der nächste Schritt mußte der sein, die Theorie der Interferenzerscheinung auch bei nicht idealer Abbildung des optischen Systems aufzustellen, auf Grund dieser Theorie Berechnungen der Interferenz-

[1]) Waetzmann, Ann. d. Phys. **39**, 1042, 1912.

[2]) Bratke u. Waetzmann, Ann. d. Phys. **72**, 501, 1923.

kurven durchzuführen und die letzteren mit dem Experiment zu vergleichen. Das ist der Inhalt des vorliegenden ersten Teiles meiner Arbeit.

Eine weitere Untersuchung, die schließlich die Entscheidung für die praktische Verwendbarkeit der Methode zu quantitativen Messungen zu bringen hatte, mußte sich auf die Frage erstrecken, ob und unter welchen Bedingungen es umgekehrt möglich sei, aus den beobachteten Interferenzbildern mit für quantitative Messungen erforderlicher Genauigkeit gewisse Abbildungsfehler optischer Systeme zu bestimmen. Die Resultate dieser Untersuchungen werden als zweiter Teil in einem der nächsten Hefte dieser Zeitschrift mitgeteilt werden.

I. Teil. Das Aussehen der Interferenzbilder bei nicht idealer Linsenabbildung.

1. Berechnung des Gangunterschiedes Δ. Der Gang der Rechnung an sich unterscheidet sich nicht von demjenigen für den Fall idealer Linsenabbildung, wie er in der Untersuchung von Bratke-Waetzmann[1]) durchgeführt worden ist. Auch hier mag das Lummersche Spiegelungsverfahren angewandt werden. Es setzt sich der gesamte Gangunterschied Δ, den zwei interferierende Strahlen in ihrem Schnittpunkt besitzen, aus zwei Teilen Δ_1 und Δ_2 zusammen die von dem zweimaligen Auftreffen der Strahlen auf die planparallele Platte herrühren.

Ist der Einfallwinkel des zum ersten Male auf die Platte fallenden Strahles $\varphi + \varepsilon$, d die Dicke und n der Brechungsquotient der planparallelen Platte, so folgt für Δ_1:

$$\Delta_1 = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2(\varphi + \varepsilon)}$$

oder unter Vernachlässigung quadratischer und höherer Potenzen von ε

$$\Delta_1 = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi} + \mathfrak{a}_0 . \varepsilon,$$

wo $$\mathfrak{a}_0 = \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2\varphi}}$$ ist.

Für den idealen Fall ist von Bratke-Waetzmann eingehend nachgewiesen worden, daß die Vernachlässigung quadratischer und höherer Potenzen praktisch keinen Einfluß auf die Form der Interferenzkurven hat. Da infolge der gleichen Versuchsanordnung die Größenordnung der ε-Winkel im Falle nicht idealer Abbildung die

[1]) Bratke u. Waetzmann, a. a. O.

gleiche ist wie früher, so wird es erlaubt sein, auch jetzt von vornherein nur die linearen Größen von ε zu berücksichtigen.

Bei der Berechnung des Gangunterschiedes Δ_2 ist zu beachten, daß die Wellenfläche, von der ausgegangen werden muß, nicht mehr wie in dem idealen Fall kugelförmig ist, sondern irgend eine andere Gestalt aufweist, die eben abhängig ist von dem deformierenden Einfluß, den das optische System nunmehr auf den Strahlengang ausübt.

In Fig. 1 seien 0, 1, 2, 3 Strahlen, die von einem Parallelstrahlenbündel herrühren, das unter dem Winkel ε zum ersten Male auf das

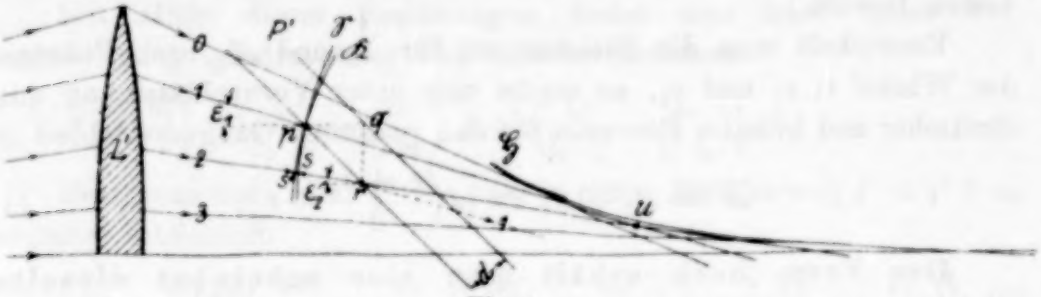


Fig. 1.

optische System aufgefallen sei, die dann gespiegelt zum zweiten Male durch das optische System L' gehen und auf die Platte P' auffallen. Unter diesen Strahlen seien 1 und 2 diejenigen, die miteinander interferieren und in den Beobachtungsapparat gelangen.

Würde das optische System ideal abbilden, dann würden sämtliche Strahlen homozentrisch vereinigt werden. Da dies nicht der Fall sein soll, werden sie eine Einhüllende $\mathfrak{H}$ bilden, die der Ort der Krümmungszentren der Evolute $\mathfrak{S}$, d. h. der Schnittspur der Wellenfläche der Strahlen mit der Horizontalebene ist.

Die Platte P' sei so verschoben, daß der Schnittpunkt r der interferierenden Strahlen mit der Plattenoberfläche zusammenfällt.

Der Gangunterschied Δ_2 ist dann gegeben durch:

$$\Delta_2 = sr - 2n \cdot \overline{pq}.$$

Schlägt man um den Schnittpunkt u der Strahlen 1 und 2 mit pu als Radius einen Kreis, der den Strahl 2 in s' schneiden möge, und vernachlässigt man die kleine Strecke ss', dann erhält man genau wie im Falle idealer Abbildung

$$\Delta_2 = -\frac{2d}{\sqrt{n^2-\sin^2(\varphi+\varepsilon_1)}}\left\{n^2-\frac{\sin(\varphi+\varepsilon_1)[\cos(\varphi+\varepsilon_2)-\cos(\varphi+\varepsilon_1)]}{\sin(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}\right\}.$$

Bei der Kleinheit des Winkels $(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$, den die beiden interferierenden Strahlen einschließen — Bratke und Waetzmann[1])

[1]) Bratke u. Waetzmann, a. a. O.

haben gezeigt, daß er bei der vorliegenden Anordnung 6′ nicht übersteigt —, und bei der außerordentlich geringen Krümmung der Wellenfläche $\mathfrak{S}$, ist man berechtigt, die beiden Strahlen 1 und 2 als benachbarte Normalen von $\mathfrak{S}$ aufzufassen, deren Schnittpunkt u dann den Krümmungsmittelpunkt für den Punkt p darstellt, so daß das kleine zwischen den Strahlen liegende Kurvenstück für die Gangunterschiedsberechnung praktisch durch den Krümmungskreis um u ersetzt werden kann. Daß diese Vernachlässigung gestattet ist, dafür liefern die weiter unten angegebenen experimentellen Resultate den besten Beweis.

Entwickelt man die Gleichungen für Δ_1 und Δ_2 nach Potenzen der Winkel ε, ε_1 und ε_2, so ergibt sich unter Vernachlässigung quadratischer und höherer Potenzen für den gesamten Gangunterschied Δ:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 = a_0\left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} - \varepsilon\right). \qquad (1)$$

Der Form nach erhält man also scheinbar dieselbe Gleichung wie für ideal abbildende Linsen [siehe Gleichung 4

Fig. 2.

bei Bratke-Waetzmann [1])]. Indessen muß man bedenken, daß zu einem bestimmten ε_2, das wie früher durch die Entfernung $\mathfrak{E}$ des Beobachtungsapparates und die betrachtete Höhe $\mathfrak{h}''$ festgelegt ist, je nach dem Korrektionszustand des optischen Systems andere Winkel ε_1 und ε_2 gehören, womit für dieselbe Höhe $\mathfrak{h}''$ auch verschiedene Gangunterschiede Δ resultieren. Dies tritt deutlicher in Erscheinung, wenn man die Winkel durch Brennweiten, Spiegelentfernungen und die Höhen ausdrückt, in denen die Strahlen das optische System durchsetzen.

Es mögen in Fig. 2 zwei interferierende Strahlen das optische System L zum ersten Male in den Höhen $\mathfrak{h}$ bzw. $\mathfrak{g}$, zum zweiten Male in $\mathfrak{h}'$ und $\mathfrak{g}'$ durchsetzen, $f_{\mathfrak{g}'}$ und $f_{\mathfrak{h}'}$ seien die zu den entsprechenden

[1]) Bratke u. Waetzmann, a. a. O.

Höhen gehörenden vorderen, $f'_{g'}$, $f'_{b'}$, f'_g, f'_b die entsprechenden hinteren Brennweiten.

Es gilt dann offenbar

$$\xi_{g'} \cdot \xi'_{g'} = f_{g'} \cdot f'_{g'} \qquad \text{und} \qquad \operatorname{tg} \varepsilon_1 = \pm \frac{\eta_{g'}}{f'_{g'}},$$

wenn mit ξ die Entfernung des Schnittpunktes eines Strahles mit der optischen Achse von der entsprechenden Brennebene, mit η der Abstand gerechnet von der optischen Achse aus, in dem ein Strahl die ihm zugeordnete Brennebene schneidet, bezeichnet werden.

Mit Hilfe dieser Beziehungen findet man leicht unter Vernachlässigung quadratischer und höherer Potenzen:

$$\Delta = \frac{a_0}{2} \left\{ \mathfrak{h}'' \left(\frac{\xi_{b'}}{f_{b'} f'_{b'}} - \frac{\xi'_b}{f'_b f_{b'}} \right) + \mathfrak{g}'' \left(\frac{\xi_{g'}}{f_{g'} f'_{g'}} - \frac{\xi'_g}{f'_g f_{g'}} \right) \right\}.$$

Setzt man noch $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{h}'' + a$ oder in erster Annäherung $\mathfrak{g}'' = \mathfrak{h}'' + a_0$, so folgt schließlich:

$$\Delta = \frac{a_0}{2} \left\{ \mathfrak{h}'' \left(\frac{\xi_{b'}}{f_{b'} f'_{b'}} - \frac{\xi'_b}{f'_b f_{b'}} + \frac{\xi_{g'}}{f_{g'} f'_{g'}} - \frac{\xi'_g}{f'_g f_{g'}} \right) + a_0 \left(\frac{\xi_{g'}}{f_{g'} f'_{g'}} - \frac{\xi'_g}{f'_g f_{g'}} \right) \right\}. \quad (2)$$

Man erkennt aus der Gleichung, daß sich für eine bestimmte Höhe $\mathfrak{h}''$, je nach dem Korrektionszustande des optischen Systems, verschiedene Gangunterschiede ergeben.

Ersetzt man in Gleichung (2) die nur wenig voneinander verschiedenen Brennweiten durch eine mittlere, etwa diejenige, die man mit einer der genaueren Methoden zur Brennweitenbestimmung für das optische System findet — die Berechtigung dazu liefern die unten angegebenen experimentellen Resultate —, und führt man noch an Stelle der ξ-Werte entsprechend Fig. 3 die Abstände e der Brennebene vom Spiegel ein, so folgt:

$$\Delta = \frac{a_0}{2 f^2} \left\{ \mathfrak{h}'' (e_b + e_{b'} + e_g + e_{g'}) + a_0 (e_g + e_{g'}) \right\}. \quad (3)$$

Bei einer bestimmten Spiegelstellung — in der Fig. 3 steht der Spiegel um e_0 außerhalb der Brennweite f_0 für die Achsenstrahlen — geben die einzelnen e die Entfernungen der zu den betreffenden Höhen $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{h}'$ gehörenden Brennebenen von dem Spiegel an.

Trägt man die Werte $e - e_0$ als Funktion der zugehörigen Höhen auf, so erhält man eine Kurve, die den sphärischen Korrektionszustand des optischen Systems chrakterisiert und die in der in der praktischen Optik allgemein üblichen Darstellungsweise die sphärischen Schnittweitenaberrationen wiedergibt.

Kennt man für ein optisches System diese sphärischen Aberrationen, dann muß man mit Hilfe der Gleichung (3) für

jede Spiegelstellung die zugehörigen Interferenzbilder berechnen können. Stimmen diese Interferenzbilder mit den experimentell beobachteten überein, so ist gleichzeitig die Richtigkeit der Theorie und die Zulässigkeit der eingeführten Vernachlässigungen erwiesen. Dieser Nachweis wird im folgenden Kapitel geführt werden.

Ist das optische System ideal abbildend, dann hat bei einer bestimmten Spiegelstellung ε für alle Höhen denselben Wert, und es geht die Gleichung (3) in die von Bratke-Waetzmann[1]) abgeleitete über.

2. Darstellung von Interferenzkurven für optische Systeme mit bekannter sphärischer Aberration. Die Betrachtung im vorigen Kapitel beschränkte sich auf Strahlen, die in der „Horizontalebene", d. h. in der durch die optische Achse und die Plattennormale gelegten Ebene verlaufen. Die in den Gleichungen auftretenden Winkel sind „ebene" Winkel. Betrachtet man auch die

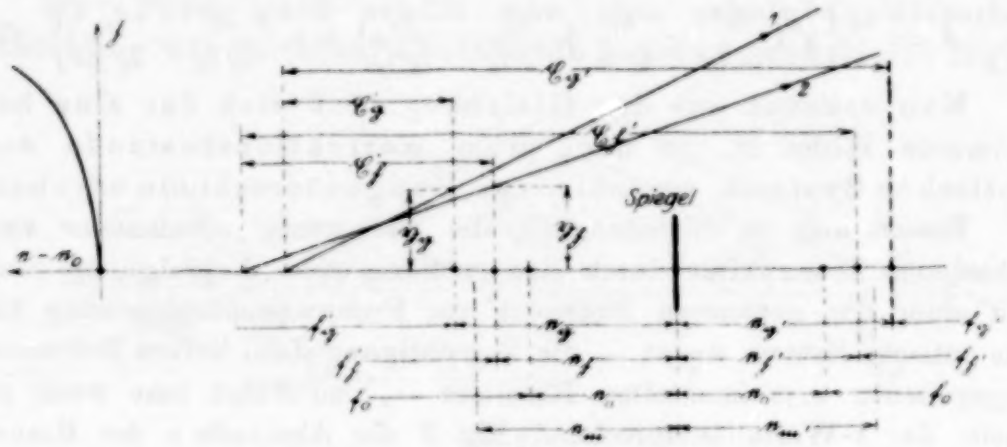


Fig. 3.

Strahlen, die außerhalb der Horizontalebene das optische System durchsetzen, so treten räumliche Winkel auf, die sich aber ebenso wie im Fall idealer Abbildung nur um Größen zweiter Ordnung von den ebenen unterscheiden. Es gelten somit die Gleichungen (1) und (3) sowohl für die Ebene, wie für den Raum, nur ist dabei zu beachten, daß zu einem Strahl, der senkrecht über einen in der Horizontalebene verlaufenden Strahl in das System eintritt, nicht die gleichen Brennweiten gehören, daß für ihn infolgedessen auch andere Spiegelentfernungen ε in Δ einzusetzen sind, wodurch für senkrecht übereinander verlaufende Strahlenpaare verschiedene Gangunterschiede resultieren. Es werden demnach nicht wie früher senkrechte Streifen,

[1]) Bratke u. Waetzmann, a. a. O.

sondern mehr oder weniger gekrümmte, zur Horizontalebene symmetrische Interferenzkurven zu erwarten sein.

Es mag nun zunächst für Strahlen, die in der Horizontalebene verlaufen, die Gangunterschiedsberechnung betrachtet werden, wie sie nach Gleichung (3) für ein optisches System vorzunehmen ist, dessen sphärische Aberrationskurve durch Messungen oder Berechnungen bekannt ist.

Dazu braucht man die Höhen $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, um aus der gegebenen Aberrationskurve die zu ihnen gehörenden ε-Werte entnehmen zu können.

Bezeichnet man mit $\mathfrak{E}$ die Entfernung der Eintrittsöffnung des Beobachtungsapparates B von der hinteren Brennebene des gespiegelten optischen Systems L' — die Interferenzerscheinung liegt praktisch in dieser Ebene — und setzt für die einzelnen, zu den verschiedenen Höhen gehörenden Brennweiten bzw. Spiegelentfernungen eine mittlere Brennweite $\mathfrak{f}$ bzw. eine mittlere Spiegelentfernung $\mathfrak{e}$, so ergibt sich aus einfachen geometrischen Überlegungen nach Fig. 2 und 3

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{h}''\left(1 + \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{E}}\right), \tag{4a}$$

$$\mathfrak{h} = -\mathfrak{h}''\left(1 - \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{E}} + \frac{2\mathfrak{e}}{\mathfrak{f}}\right), \tag{4b}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} - a_0, \tag{4c}$$

$$\mathfrak{g}' = \mathfrak{h}' + a_0\left(1 + \frac{2\mathfrak{e}}{\mathfrak{f}}\right). \tag{4d}$$

Zu den mit diesen Beziehungen für jedes gewünschte $\mathfrak{h}''$ gefundenen Höhen können aus der Aberrationskurve die entsprechenden ε-Werte entnommen werden, womit dann das für $\mathfrak{h}''$ gültige Δ berechnet werden kann.

Für räumlich verlaufende Strahlen gilt, wie schon erwähnt, dieselbe Gangunterschiedsgleichung (3) wie für Strahlen der Horizontalebene, nur sind jetzt die Stellen, an denen die Strahlen das optische System L bzw. L' treffen und für die die einzelnen ε-Werte zu nehmen sind, nicht mehr durch eine Koordinate, der Höhe $\mathfrak{h}''$ der Horizontalebene, festzulegen, sondern es muß noch eine zweite vertikale Koordinate $\mathfrak{h}_v$ herangezogen werden.

Am besten denkt man sich ein interferierendes, räumliches Strahlenpaar, dessen Einzelstrahlen wieder mit 1 und 2 bezeichnet sein mögen, sowohl in die Horizontalebene als auch in die Vertikalebene projiziert. Für die Horizontalprojektionen müssen dann dieselben Höhenbeziehungen gelten, wie sie in den Gleichungen (4) abgeleitet wurden.

In der Vertikalprojektion wird der Verlauf des Strahles 1 offenbar durch die Beziehungen 4a und 4b wiedergegeben, wenn man die $\mathfrak{h}$-Größen durch $\mathfrak{h}_v$ ersetzt:

$$\mathfrak{h}'_v = \mathfrak{h}''_v\left(1 + \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{E}}\right), \tag{5a}$$

$$\mathfrak{h}_v = -\mathfrak{h}''_v\left(1 - \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{E}} + \frac{2\,e}{\mathfrak{f}}\right). \tag{5b}$$

Denkt man sich durch die Strahlen 1 und 2 Ebenen gelegt, deren Spuren in den Linsenebenen L und L' mit der Horizontalebene bekanntlich Winkel von der Größenordnung ε bilden, so erkennt man, daß die vertikalen Höhen, in denen Strahl 2 L bzw. L' trifft, von denjenigen des Strahles 1 nur um Beträge von der Größenordnung ε abweichen können. Bei den für die Höhenbeziehungen gestatteten Vernachlässigungen können diese geringen Abweichungen aber sicher unberücksichtigt bleiben. Man darf demnach annehmen, daß praktisch beide Strahlen in denselben vertikalen Höhen $\mathfrak{h}_v$ bzw. $\mathfrak{h}'_v$ auf L bzw. L' auffallen.

Will man nun für einen Punkt mit den Koordinaten $\mathfrak{h}''$ und $\mathfrak{h}''_v$ den Gangunterschied berechnen, dann hat man nur, ähnlich wie in der Horizontalebene, mit Hilfe dieser Beziehungen die Stellen festzulegen, an denen die interferierenden Strahlen das optische System L bzw. L' im Raum treffen, für diese Punkte die e-Werte zu bestimmen und sie in Gleichung (3) einzusetzen.

Im folgenden sei an zwei charakteristischen Beipielen gezeigt, welche Interferenzbilder mit der obigen Rechnungsweise erhalten werden. Diese mögen dann mit den experimentell gewonnenen Bildern verglichen werden.

Gewählt wurde als erstes Beispiel eine Linse mit sehr starker sphärischer Unterkorrektion, so daß etwaige Abweichungen, die die im vorangegangenen gemachten Vernachlässigungen gegenüber den experimentell beobachteten Werten bedingen würden, auch sicher in Erscheinung treten mußten.

Die Linse hatte eine mittlere Brennweite von $\mathfrak{f} = 95$ mm; die den Berechnungen zugrunde gelegte, in Fig. 4 wiedergegebene Aberrationskurve ist mittels der bekannten Hartmannschen Methode für Licht von 578 mμ Wellenlänge experimentell gewonnen.

Als Entfernung $\mathfrak{E}$ des Beobachtungsapparates wurden 1000 mm genommen. Benutzt wurde eine planparallele Lummerplatte von 3,16 mm Dicke im Winkel von $\varphi = 45^0$ gegen die optische Achse geneigt. Da der Brechungsquotient nicht bekannt war, wurde die für die

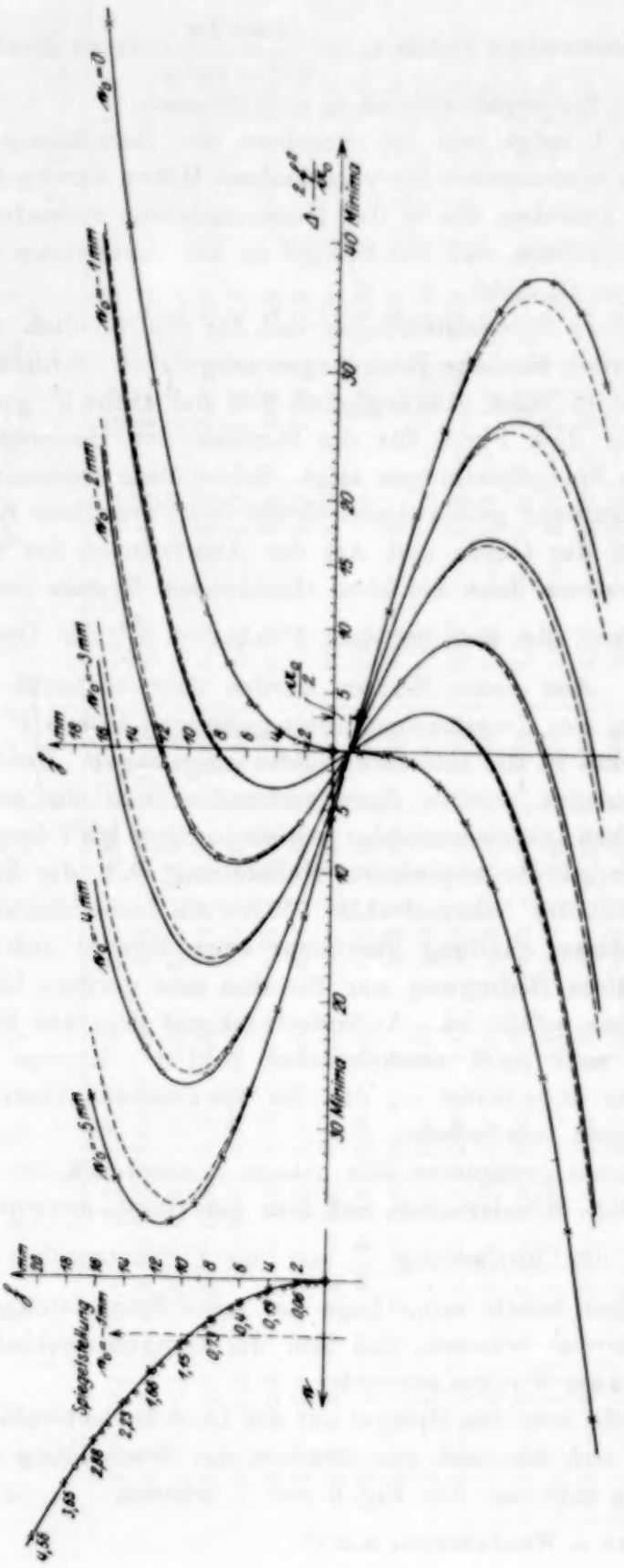


Fig. 4. Einzellinse f = 95 mm. Aberrationskurve.
Gangunterschiedskurven für Strahlen, die in der Horizontalebene verlaufen. E = 1000 mm, a_0 = 2,33 mm, λ = 578 mμ.

Rechnung notwendige Größe $a_0 = \frac{d \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}$ durch direkte Messung festgestellt. Sie ergab sich zu $a_0 = 2{,}33$ mm.

Tabelle 1 zeigt wie im einzelnen die Berechnung der Gangunterschiede systematisch für verschiedene Höhen durchgeführt wurde. Sie gilt für Strahlen, die in der Horizontalebene verlaufen, und zwar unter der Annahme, daß der Spiegel in der Brennebene der Achsenstrahlen ($e_0 = 0$) steht.

Für andere Spiegelstellungen und für die räumlich verlaufenden Strahlen wurden ähnliche Rechnungen ausgeführt. Schließlich wurden die Δ-Werte in ihrer Abhängigkeit von der Höhe $\mathfrak{h}''$ graphisch aufgetragen, wie dies Fig. 4 für die Strahlen der Horizontalebene für verschiedene Spiegelstellungen zeigt. Schon diese sogenannten „Gangunterschiedskurven“ geben durch Größe und Form ihrer Krümmungen ein Bild von der Größe und Art der Aberrationen des untersuchten optischen Systems, denn bei ideal abbildendem System sind es streng gerade Linien, die sich in dem Punkte $-\frac{a_0}{2}$ der Ordinatenachse schneiden [1]). Aus diesen Kurven wurden dann in leicht ersichtlicher Weise die zu den Interferenzminimis gehörigen Höhen $\mathfrak{h}''$ entnommen und als Punkte in die Interferenzbilder eingetragen. Punkte gleichen Gangunterschiedes wurden dann verbunden, und die so erhaltenen Kurven ergaben Interferenzbilder wie sie in Fig. 5 bis 7 dargestellt sind.

Fig. 5 zeigt die sogenannte Nullstellung, d. h. der Spiegel steht im Brennpunkt der Achsenstrahlen. Wäre die Linse idealabbildend, so dürften in dieser Stellung überhaupt keine Kurven auftreten. Man sieht, daß diese Bedingung nur für eine sehr geringe Höhe um die optische Achse erfüllt ist. Außerdem erkennt man aus der nach den Rändern zu sehr stark anwachsenden Zahl der Kurven — sie sind zum Teil nur angedeutet —, daß die sphärischen Aberrationen der Linse sehr groß sein müssen.

Die Kurven gruppieren sich nahezu symmetrisch um einen senkrechten, hellen Mittelstreifen, auf dem der Gangunterschied Null ist, und der in der Entfernung $\frac{a_0}{2}$ von der Ordinatenachse $\mathfrak{h}_0''$ verläuft. Dieser Streifen behält seine Lage bei jeder Spiegelstellung bei, was man auch daraus erkennt, daß sich die Gangunterschiedskurven in Fig. 4 in einem Punkte schneiden.

Verschiebt man den Spiegel auf die Linse zu, so treten sogenannte Quellpunkte auf, die nach den Rändern der Erscheinung zu wandern scheinen, wie man aus den Fig. 6 und 7 erkennt.

[1]) Bratke u. Waetzmann, a. a. O.

Tabelle 1. Einzellinse $f = 95$ mm.

$\mathfrak{G} = 1000$ mm. Horizontalebene. $a_0 = 2{,}33$ mm. Spiegelstellung $e_0 = 0$.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mathfrak{h}'$	$\mathfrak{g}'$	$\mathfrak{h}$	$\mathfrak{g}$	$e_\mathfrak{h}$	$e_{\mathfrak{h}'}$	$e_\mathfrak{g}$	$e_{\mathfrak{g}'}$	Σe	$e_\mathfrak{g} + e_{\mathfrak{g}'}$	$\mathfrak{h}''$	$\mathfrak{h}'' \cdot \Sigma e$	$a_0(e_\mathfrak{g} + e_{\mathfrak{g}'})$	$\Delta \cdot \frac{2f^2}{a_0} = \mathfrak{h}'' \cdot \Sigma e + a_0(e_\mathfrak{g} + e_{\mathfrak{g}'})$
18	20,3	— 14,9	— 17,2	2,53	3,65	3,33	4,66	14,17	7,99	16,43	232,8	18,6	251,4
16	18,3	— 13,2	— 15,5	2,00	2,88	2,72	3,78	11,38	6,50	14,60	166	15,1	181,1
14	16,3	— 11,6	— 13,9	1,55	2,23	2,20	3,00	8,98	5,20	12,78	114,7	12,1	126,8
12	14,3	— 9,9	— 12,2	1,12	1,66	1,71	2,32	6,81	4,03	10,95	74,6	9,4	84,0
10	12,3	— 8,3	— 10,6	0,78	1,15	1,30	1,71	4,94	3,01	9,13	45,1	7,0	52,1
8	10,3	— 6,6	— 8,9	0,50	0,73	0,90	1,22	3,35	2,12	7,31	24,5	4,9	29,4
6	8,3	— 5,0	— 7,3	0,30	0,40	0,61	0,80	2,11	1,41	5,48	11,6	3,3	14,9
4	6,3	— 3,3	— 5,6	0,13	0,19	0,36	0,45	1,13	0,81	3,65	4,1	1,9	6,0
2	4,3	— 1,7	— 4,0	0,05	0,06	0,19	0,21	0,51	0,40	1,83	0,93	0,93	1,9
0	2,3	0	— 2,3	0	0	0,08	0,08	0,16	0,16	0	0	0,4	0,4
— 2	0,3	+ 1,7	— 0,6	0,05	0,06	0,02	0	0,13	0,02	— 1,83	— 0,24	0,05	— 0,2
— 4	— 1,7	+ 3,3	+ 1,0	0,13	0,19	0,03	0,05	0,40	0,08	— 3,65	— 1,46	0,2	— 1,3
— 6	— 3,7	+ 5,0	+ 2,7	0,30	0,40	0,09	0,16	0,95	0,25	— 5,48	— 5,2	0,6	— 4,6
— 8	— 5,7	+ 6,6	+ 4,3	0,50	0,73	0,21	0,38	1,82	0,59	— 7,31	— 13,3	1,4	— 11,9
— 10	— 7,7	+ 8,3	+ 6,0	0,78	1,15	0,40	0,67	3,00	1,07	— 9,13	— 27,4	2,5	— 24,9
— 12	— 9,7	+ 9,9	+ 7,6	1,12	1,66	0,66	1,08	4,52	1,74	— 10,95	— 49,5	4,0	— 45,5
— 14	— 11,7	+ 11,6	+ 9,3	1,55	2,23	1,00	1,56	6,34	2,56	— 12,78	— 81,0	6,0	— 75,0
— 16	— 13,7	+ 13,2	+ 10,9	2,00	2,88	1,37	2,15	8,40	3,52	— 14,60	— 122,5	8,2	— 114,3
— 18	— 15,7	+ 14,9	+ 12,6	2,53	3,65	1,81	2,79	10,78	4,60	— 16,43	— 177,2	10,7	— 166,5
— 20	— 17,7	+ 16,5	+ 14,2	3,07	4,56	2,30	3,53	13,46	5,83	— 18,26	— 246,0	13,6	— 232,4

Sämtliche Werte in Millimetern.

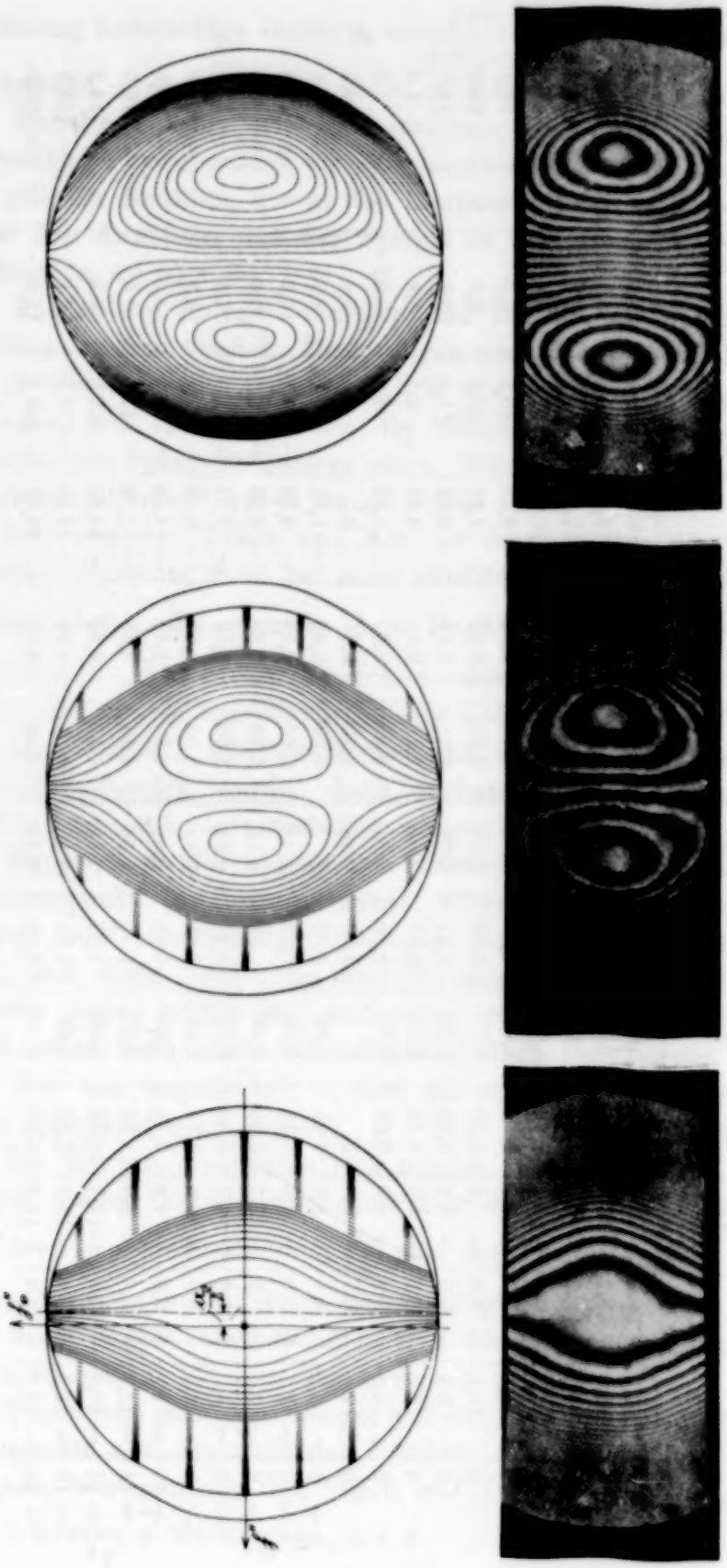


Fig. 5. Einzellinse $f = 95$ mm.
Berechnete Interferenzkurven
für Spiegelstellung $c_0 = 0$.

Fig. 6. Einzellinse $f = 95$ mm.
Berechnete Interferenzkurven
für Spiegelstellung $c_0 = -1$ mm.

Fig. 7. Einzellinse $f = 95$ mm.
Berechnete Interferenzkurven
für Spiegelstellung $c_0 = -2$ mm.

Läge nicht eine unterkorrigierte, sondern eine in gleicher Größe überkorrigierte Linse vor, so würden, wie man sich leicht überzeugt, die Gangunterschiedskurven spiegelbildlich zur Ordinatenachse sein, sonst aber denselben Verlauf zeigen. Die Interferenzkurven hätten dann dieselben Formen, nur würden die Quellpunkte beim Verschieben des Spiegels gerade im entgegengesetzten Sinne, also von der Linse fort, auftreten. Zum Vergleich der so berechneten Interferenzkurven sind den Fig. 5 bis 7 die photographischen Aufnahmen der experimentell beobachteten Erscheinung jeweils für die entsprechende Spiegelstellung beigegeben. Leider war die Höhe der planparallelen Platte zu gering, so daß immer nur ein Streifen des ganzen Interferenzbildes erhalten werden konnte. Die Spiegelverschiebung betrug von Aufnahme zu Aufnahme 1 mm.

Man erkennt schon rein qualitativ die gute Übereinstimmung der beobachteten mit den berechneten Kurven daran, daß die Zahl der zwischen den Quellpunkten auftretenden Interferenzkurven in beiden Fällen genau die gleiche ist, und daß auch das Verhältnis des Abstandes der Quellpunkte voneinander zu dem Durchmesser des Interferenzbildes übereinstimmt.

Es wurde aber auch die quantitative Übereinstimmung dadurch nachgewiesen, daß rückwärts aus den beobachteten Interferenzkurven, die zu den Interferenzminimis gehörenden Höhen $\mathfrak{y}''$ für die Horizontalebene entnommen und mit kleinen Kreisen in Fig. 4 eingetragen wurden. Man sieht, daß die Übereinstimmung fast vollkommen ist, womit der Beweis sowohl für die Richtigkeit der Gleichung (3), wie auch für die Zulässigkeit der eingeführten Vernachlässigungen erbracht sein dürfte.

Das zweite Beispiel zeigt eine andere, für eine ganze Klasse von optischen Systemen, den für eine Randzone sphärisch korrigierten photographischen Objektiven, typische Art von Interferenzkurven.

Zur Untersuchung wurde ein Rapid-Aplanat symmetrischer Konstruktion, f:8, mit einer Brennweite von $f = 340$ mm genommen.

Der Berechnung der Interferenzkurven liegt die trigonometrisch errechnete sphärische Aberrationskurve Fig. 8 zugrunde. Sie ist für $\lambda = 435\,\mathrm{m}\mu$ ermittelt und zeigt, daß das Objektiv für die Zone $\mathfrak{y} = 19{,}3$ mm korrigiert ist. Da erfahrungsgemäß trigonometrisch errechnete Kurven für ein praktisch ausgeführtes Exemplar der betreffenden Type im allgemeinen nur näherungsweise gelten, da ferner mit Licht von $\lambda = 578\,\mathrm{m}\mu$ beobachtet wurde, so wird man bei einem Vergleich der berechneten mit den beobachteten Interferenzkurven nur eine qualitative Übereinstimmung zu erwarten haben.

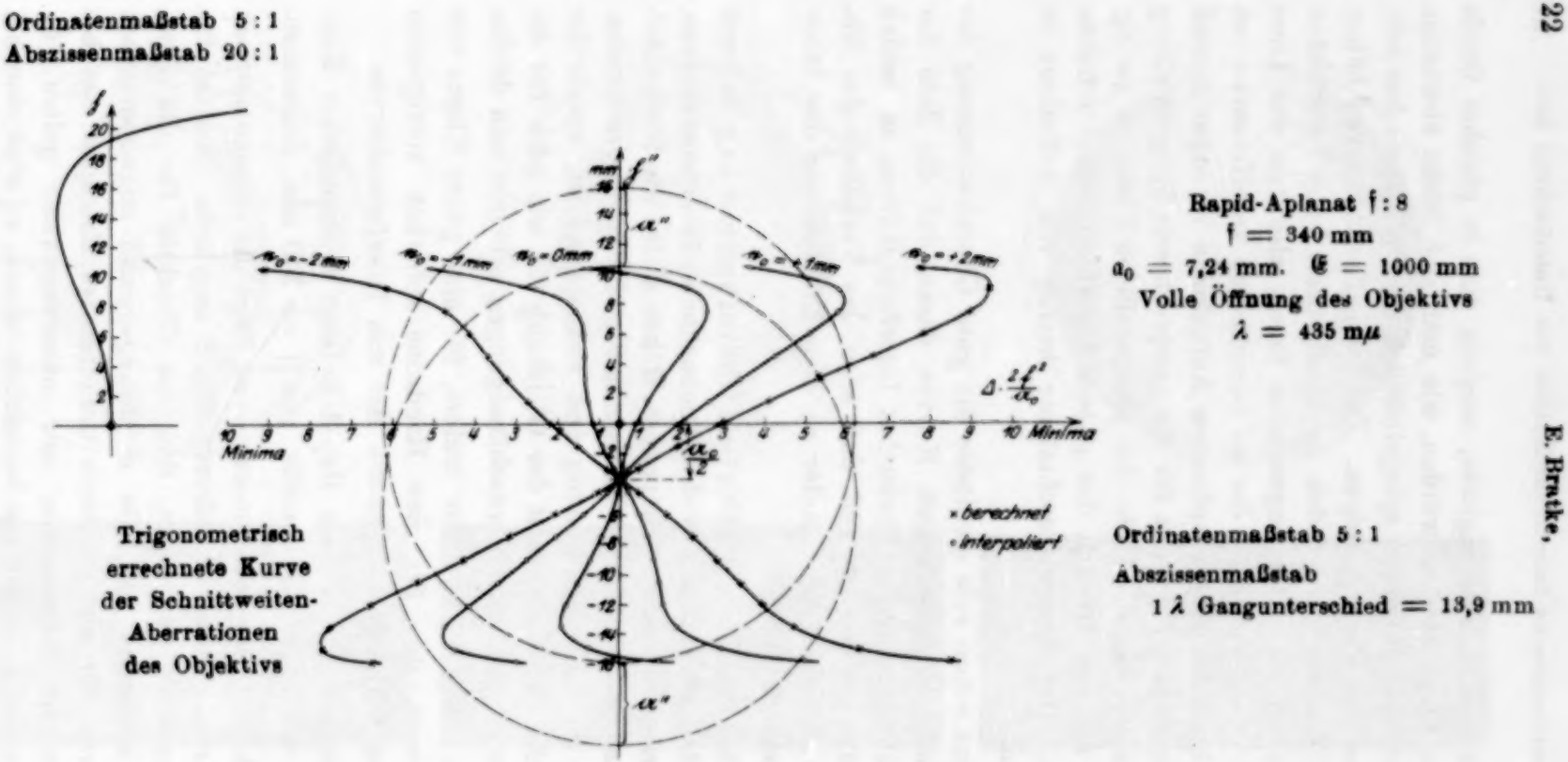


Fig. 8. Gangunterschiedskurven für Strahlen, die in der Horizontalebene verlaufen.

Benutzt wurde eine 10,31 mm dicke planparallele Lummerplatte, für die sich bei $\varphi = 45^0$ a_0 zu 7,24 mm ergab.

Der Gang der Rechnung war derselbe wie im ersten Beispiel. In Fig. 8 sind wieder die Gangunterschiedskurven für Strahlen der Horizontalebene bei verschiedenen Spiegelstellungen angegeben. Die Fig. 9 bis 12 zeigen die aus ihnen gewonnenen Interferenzbilder. Zum Vergleich sind wieder die bei den entsprechenden Spiegelstellungen beobachteten Interferenzbilder angegeben.

Die Kurven zeigen gegen das erste Beispiel wesentliche Abweichungen, die sich sofort erklären, wenn man sich die Wirkung der

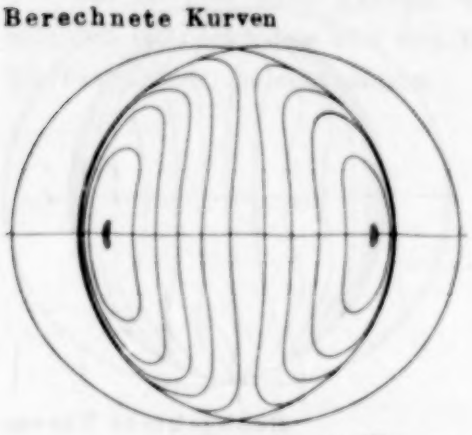


Fig. 9. Rapid-Aplanat f:8. f = 340 mm. $a_0 = 7{,}24$. $\mathfrak{E} = 1000$ mm. Spiegelstellung: $e_0 = +1$ mm.

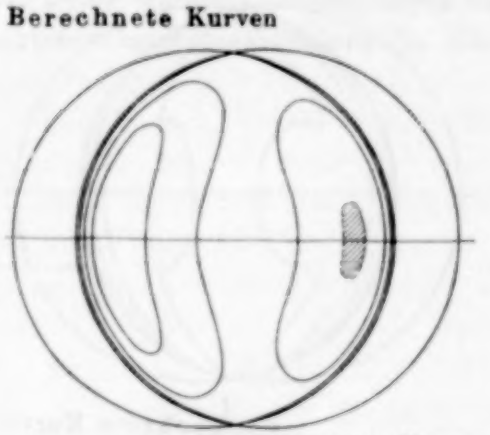


Fig. 10. Rapid-Aplanat f:8. f = 340 mm. $a_0 = 7{,}24$ mm. $\mathfrak{E} = 1000$ mm. Spiegelstellung: $e_0 = 0$.

doppeltgekrümmten Aberrationskurve vergegenwärtigt. Danach können die inneren Zonen des Objektivs als unterkorrigiert, die äußeren als überkorrigiert angesehen werden, und im Hinblick auf das im ersten Beispiel über den Einfluß von Über- bzw. Unterkorrektion Gesagte wird man hier bei Spiegelstellungen für positives e_0 (Fig. 9 und 10) eine Kombination der früheren tönnchenförmig oder konvex gekrümmten Kurven der Fig. 5 für die inneren Zonen, mit den früheren

Quellpunkten der Fig. 6 und 7 für die äußeren Zonen zu erwarten haben, was tatsächlich der Fall ist und die charakteristische Nierenform der resultierenden Kurven bedingt. Umgekehrt wird bei Spiegelstellungen für negatives t_0 eine Verbindung der konkav gekrümmten Kurven der früheren Fig. 6 und 7 für die inneren Zonen, mit den konvex gekrümmten der Fig. 5 für die äußeren Zonen stattfinden müssen, wie dies die Fig. 11 und 12 auch deutlich zeigen.

Außer den charakteristisch veränderten Kurvenformen weisen die Interferenzbilder dieses Beispiels gegenüber

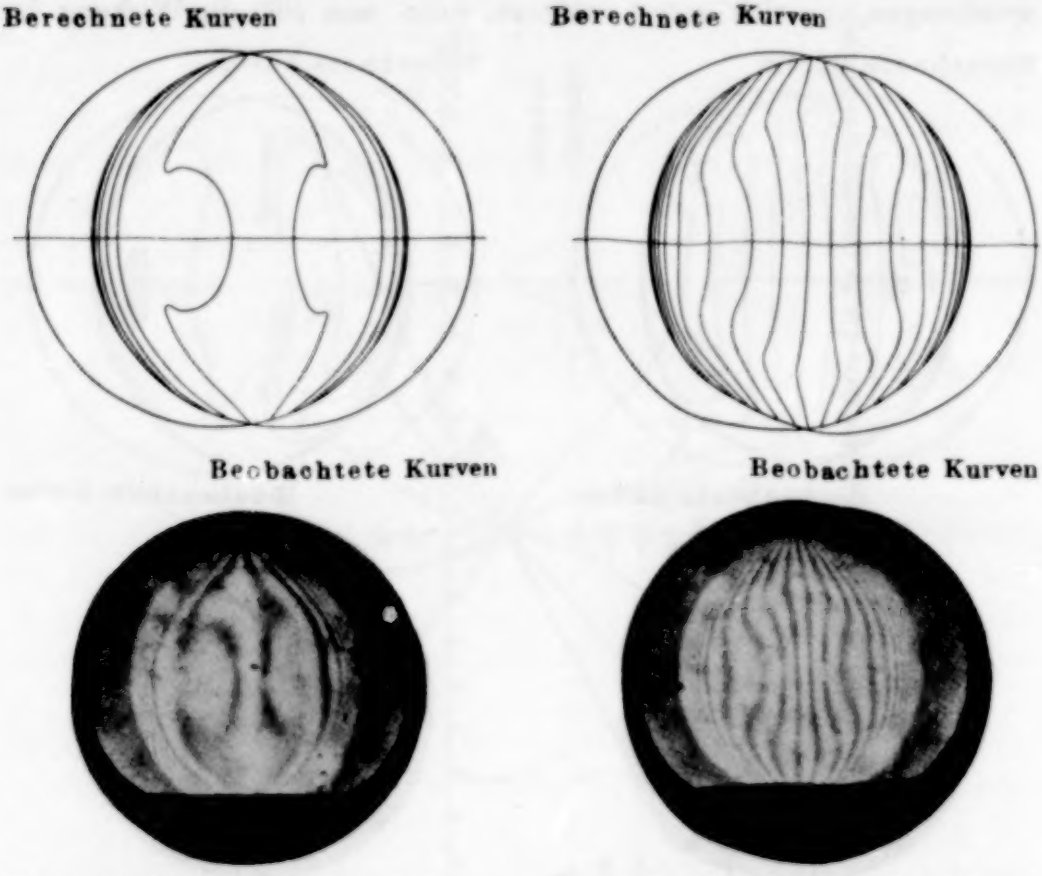


Fig. 11. Rapid-Aplanat f: 8. $f = 340$ mm. $a_0 = 7{,}24$ mm. $\mathfrak{E} = 1000$ mm. Spiegelstellung $t_0 = -1$ mm.

Fig. 12. Rapid-Aplanat f: 8. $f = 340$ mm. $a_0 = 7{,}24$ mm. $\mathfrak{E} = 1000$ mm. Spiegelstellung: $t_0 = -2$ mm.

dem ersten noch eine deutliche Unsymmetrie der Interferenzkurven und der Bildränder in bezug auf den hellen Mittelstreifen auf, die zum Gegenstand einer eingehenden Untersuchung gemacht wurde. Diese lieferte noch einen Beweis für die Richtigkeit des der Theorie zugrunde gelegten Strahlenganges und ergab das Resultat, daß die Unsymmetrie der Kurven um so geringer wird, je kleiner

die sphärischen Abweichungen des Systems und je kleiner a_0, d. h. die Dicke der angewendeten planparallelen Platte ist. Eine Bestätigung der letzteren Folgerung ergeben die beiden Beispiele, denn die Unsymmetrie der Kurven tritt bei der im ersten Beispiel verwandten dünnen Lummerplatte fast gar nicht in Erscheinung.

Zum Vergleich der berechneten mit den beobachteten Interferenzbildern sind den Fig. 9 bis 12 die mit Licht von λ 578 mμ experimentell gewonnenen photographischen Aufnahmen beigegeben. Auch dieser qualitative Vergleich zeigt überzeugend die Zulässigkeit der aufgestellten Theorie.

Im II. Teil wird gezeigt werden, unter welchen Bedingungen es möglich ist rückwärts aus den beobachteten Interferenzbildern die Abbildungsfehler zu entnehmen.

Beiträge zur Deutung der Quantentheorie.

Von **R. Mecke** in Bonn.

(Eingegangen am 19. November 1923.)

Durch die Zusammenfassung von Raum und Zeit zu einer vierdimensionalen Metrik hat die Relativitätstheorie der Auffassung von den physikalischen Naturerscheinungen eine in sich so geschlossene Form gegeben, daß ihr eine größere Bedeutung zugeschrieben werden muß als die einer eleganten Schreibweise mathematischer Gleichungen. Zudem hat sie darüber hinaus zu wichtigen neuen Erkenntnissen (z. B. zum Satze von der Trägheit der Energie) geführt, die den Gedanken nahelegten, alles Naturgeschehen von diesem Standpunkte einer vierdimensionalen Metrik aus zu betrachten. Fremd war ihr jedoch bisher der atomistische Gedanke, und gerade der Satz von der Trägheit der Energie bietet im Grunde genommen einer Atomistik, wenigstens einer solchen der Masse, große prinzipielle Schwierigkeiten. Stellt sich doch im Vierdimensionalen die Massendichte als ein Tensor, die Masse selbst als ein Vierervektor dar, da ist es gedanklich schwer einzusehen, wie ein solcher Vektor mit einem gegebenen Richtungssinn auch atomistisch struktuiert sein soll. Es behalten aber nun in der Relativitätstheorie außer der Entropie — sie muß skalar sein auf Grund ihrer Definition als log der Wahrscheinlichkeit — nur die Elektrizitätsmenge und die Wirkungsgröße ihren skalaren Charakter bei, und gerade diesen beiden muß ja nach neueren Anschauungen als Elektron und Wirkungsquantum atomistische Struktur zugesprochen werden. Andererseits führt aber die Vorstellung einer atomistischen Wirkungsgröße im Dreidimensionalen wieder auf die genügsam bekannten Schwierigkeiten der Quantentheorie, die vielleicht ihren krassesten Ausdruck in der Auffassung der quantenhaften Lichtemission finden.

Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden und um überhaupt von einer Atomistik in der Relativitätstheorie sprechen zu können, soll daher im folgenden der bisher übliche Begriff des Massenatoms im Dreidimensionalen sinngemäß auf sein vierdimensionales Analogon, das Wirkungsquantum, ausgedehnt werden. Die Ausführungen werden zeigen, wie die Quantenregeln, und als solche fasse ich auf: die Anwendbarkeit der Hamiltonschen Gleichungen, die ganzzahligen Werte für die Phasenintegrale und das Korrespondenzprinzip, bzw. die Bohrsche Frequenzbedingung, durch folgerichtige Erweiterung in der

Relativitätstheorie darzustellen sind. Das Bestreben wird dabei dahin gerichtet sein, diese Regeln aus solchen Grundprinzipien abzuleiten, auf die eine jede Atomistik, also auch eine solche der Masse in der „klassischen" Physik, aufgebaut ist, nämlich aus einem Variationsprinzip, einem Integrationsprinzip und einem Erhaltungsprinzip. Zur weiteren Erläuterung dieser Prinzipien und ihrer Konsequenzen wähle ich als vorläufiges Beispiel für die rein relativistische Behandlungsmethode der Quantentheorie das hinlänglich bekannte Modell des Wasserstoffs.

I. Das Variationsprinzip $\delta S = 0$. In der Quantentheorie hat sich bekanntlich die Hamilton-Jacobische Behandlungsmethode der Mechanik als die zweckmäßigste erwiesen. Es soll deshalb zunächst untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen die Hamiltonschen partiellen Differentialgleichungen in der Form [1]), wie sie zur Lösung quantentheoretischer Probleme benutzt werden, auch in der Relativitätstheorie noch zutreffen und welche Deutung ihnen dort zukommt. Ich will dieselben in der üblichen Weise aus einem Variationsprinzip ableiten und gehe zu diesem Zweck aus von dem Begriff der „Substanzwirkung", wie ihn Weyl [2]) eingeführt hat. Dieselbe setzt sich bei einem elektrisch geladenen Körper zusammen aus einer Substanzwirkung der Masse $c\int\int dm\, ds$ mit

$$ds = \sqrt{-g_{ik}\, dx_i\, dx_k}$$

als Zeitlinienelement des Weltfadens in der bekannten Bezeichnungsweise der allgemeinen Relativitätstheorie und einer Substanzwirkung der Elektrizität $\int de \int \varphi_i\, dx_i$. φ_i hat hier die Bedeutung des elektrodynamischen Potentials.

Bei einem Massenpunkt, also beim Elektron, läßt sich die Integration über $\int dm$ und $\int de$ sofort ausführen, so daß dann die Substanzwirkung die Form annimmt:

$$S = \int (m_0 c \sqrt{-g_{ik}\, y^i\, y^k} + e\, \varphi_i\, y^i)\, ds = \int H(x_i,\, y^i)\, ds. \qquad (1)$$

Das Hamiltonsche Variationsprinzip

$$\delta S = 0 \qquad (2)$$

sagt nun aus, daß bei einer beliebigen, außerhalb eines endlichen Gebietes verschwindenden Variation sämtlicher Variablen (in diesem Falle die Koordinaten x_i) die Gesamt-

[1]) Die Relativitätstheorie schreibt sie nach Einführung des Dichtetensors in der hier nicht zweckmäßigen allgemeinsten Form.

[2]) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie, 4. Aufl., S. 194.

wirkung sich nicht ändern soll. Es müssen also die vier Lagrangeschen Gleichungen

$$\frac{d P_i}{d s} = \frac{\partial H}{\partial x_i} \tag{3}$$

erfüllt sein, wo die Komponenten des Viererimpulses durch

$$P_i = \frac{\partial H}{\partial y^i} = -m_0 c\, g_{ik}\, y^k + e\, \varphi_i \tag{4}$$

definiert sind. Hier ist ohne Beeinträchtigung der Allgemeingültigkeit der folgenden Formeln $\sqrt{-g_{ik}\, y^i\, y^k} = 1$ gesetzt worden. Aus dieser Definition des Viererimpulses folgen dann die beiden wichtigen Identitätsbeziehungen:

$$H(P_i, y^i) = P_i\, y^i, \tag{5}$$

$$g^{ik}(P_i - \Phi_i)(P_k - \Phi_k) = -m_0^2 c^2 \quad (\Phi_i = e\,\varphi_i). \tag{6}$$

Infolge ihrer Invarianz deuten sie die Ruhmasse als absoluten Betrag eines zeitartigen Vektors. Als Analogon zu den Variationsgleichungen füge ich noch die Gleichungen

$$\frac{d x_i}{d s} = \frac{\partial H(P_i, y^i)}{\partial P_i} = \frac{\partial H(P_i, x_i)}{\partial P_i} + \frac{P^i}{m_0 c} \tag{3a}$$

hinzu. Sie lassen sich leicht aus den Beziehungen (4a) und (5) ableiten.

Ich komme nun zur physikalischen Deutung der obigen Gleichungen. Zunächst zeigt sich, daß nur für den Fall statischer elektrischer Felder ($\Phi_i = 0$, $i = 1, 2, 3$) die räumlichen Impulskomponenten P_i (bis auf die sogenannte Relativitätskorrektion der Masse und das Vorzeichen) mit den bisherigen Impulskoordinaten übereinstimmen. Ferner hat hier P_4 die Bedeutung der Gesamtenergie mit der sinngemäßen Deutung von $-m_0 c\, g_{4k}\, y^k \sim m_0 c^2 + {}^1{}_2\, m v^2$ als kinetische und Φ_4 als potentielle Energie. Durch die Gleichung (6) läßt sich nun P_4 auch als Funktion der übrigen P_i ausdrücken, was ich im folgenden durch das Hinzufügen des Index P_i andeuten will. Es ist also [Gleichung (6)]:

$$\left(\frac{\partial P_4}{\partial P_i}\right)_{P_i} = -\frac{g^{ik}(P_k - \Phi_k)}{g^{4k}(P_k - \Phi_k)}. \tag{7}$$

Ferner liefert die Umkehrung der Gleichung (4) durch Multiplikation mit g^{ik} und Verjüngung die Beziehung

$$m_0 c\, .\, y^i = -g^{ik}(P_k - \Phi_k), \tag{4a}$$

so daß das eine Tripel der Hamiltonschen Gleichungen in vierdimensionaler Schreibweise lautet:

$$\frac{d x_i}{d x_4} = -\left(\frac{\partial P_4}{\partial P_i}\right)_{P_i}. \tag{8}$$

Es folgt also unmittelbar aus der Definition des Viererimpulses und hat demnach hier kein Variationsprinzip zur Voraussetzung.

Das andere Gleichungstripel erhält man hingegen aus den Variationsgleichungen (3) unter Benutzung der Gleichung (4). Es ist

$$\frac{d P_i}{d s} = \frac{\partial P_k}{\partial x_i} y^k + \frac{\partial P_4}{\partial x_i} y^4 \qquad (k, i = 1, 2, 3).$$

Nun ist aber bei Berücksichtigung von Gleichung (6)

$$\frac{\partial P_4}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial P_4}{\partial x_i}\right)_{P_i} - \frac{\partial P_k}{\partial x_i} \cdot \frac{y^k}{y^4}. \tag{9}$$

Das Gleichungstripel lautet dann:

$$\frac{d P_i}{d x_4} = \left(\frac{\partial P_4}{\partial x_i}\right)_{P_i} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{10}$$

Als vierte der Gleichungen (3) füge ich noch hinzu

$$\frac{d P_4}{d x_4} = \left(\frac{\partial P_4}{\partial x_4}\right)_{P_i}.$$

Sie war bisher durch die Bedingung, daß im Energieausdruck die Zeit nicht enthalten sein sollte, identisch gleich Null. Unter den oben erwähnten Einschränkungen gelten nun die Substitutionen $P_i = -p_i$, $x_4 = ict$, $iP_4 = \frac{1}{c}(m_0 c^2 + W)$, und die Gleichungen (8) und (10) gehen dann in die übliche Schreibweise der klassischen Mechanik über:

$$\frac{d p_i}{d t} = -\frac{\partial W}{\partial x_i}; \qquad \frac{d x_i}{d t} = \frac{\partial W}{\partial p_i}. \tag{11}$$

Man sieht also, daß in der Relativitätstheorie die Hamiltonschen Gleichungen ihre anschauliche und symmetrische Gestalt verloren haben und daß sie in der Form der Gleichungen (11) nur unter gewissen Bedingungen (statische Felder, Unabhängigkeit von t) gelten. Infolgedessen wird es immer zweckmäßiger sein, direkt von dem Lagrangeschen Gleichungssystem (3) auszugehen, da dieses stets eine richtige Behandlung quantentheoretischer Probleme gewährleistet.

II. Das Integrationsprinzip, $\oint H ds = nh$. Das Variationsprinzip, auf das sich letzten Endes alle Probleme der Physik zurückführen lassen, liefert also vier „Bewegungsgleichungen", deren Lösung durch zweimalige Integration acht Integrationskonstanten enthält. Von diesen sind vier durch die Anfangsbedingungen, d. h. durch die geeignete Lage des Koordinatensystems gegeben, während die anderen vier frei verfügbar bleiben. Mit anderen Worten heißt das, daß die

Bewegungsgleichungen wohl eine qualitative Beschreibung der Erscheinungen liefern, daß sie aber keine weiteren Rückschlüsse auf die dabei erzielte Wirkung zulassen. Dieses neue, quantitative Moment brachte jedoch die Quantentheorie in die Atomphysik herein, als sie bestimmte Aussagen über den Wert der sogenannten Phasenintegrale machte. Diese Aussagen lassen sich nun in der Relativitätstheorie unter Zugrundelegung des oben eingeführten Begriffs der Substanzwirkung in ein einfaches Integrationsprinzip zusammenfassen, welches ganz allgemein folgendermaßen lautet:

Das Integral der Substanzwirkung $\oint H ds$, integriert über eine in sich geschlossene Weltlinie, ist stets ein Vielfaches des Wirkungsquantums h.

Da nun die Variationsgleichungen vier willkürliche Konstanten liefern, soll diese Formulierung dahin erweitert werden, daß bei einer Separation der Variablen die vier Einzelintegrale, in die dann die Substanzwirkung nach Einführung der Beziehung (5) zerfällt, jedes für sich allein ein ganzes Vielfaches des Wirkungsquantums wird. Neben den Differentialgleichungen (3) bestehen jetzt also noch die Integrationsgleichungen:

$$J_k = \oint P_k d x_k = n_k h. \tag{12}$$

Hierbei sind die drei räumlichen Integrale die bekannten Phasenintegrale der Quantentheorie, während das Zeitintegral durch Einführung einer weiteren Quantenzahl etwas Neues aussagt. Diese Erweiterung des Integrationsprinzips ist selbstverständlich nicht wie dieses selbst invariant, sondern trifft unter den Koordinatensystemen eine bestimmte Auswahl. Auf diese Tatsache, die ein physikalisches Gesetz und als solches sind die Quantenregeln aufzufassen, im Gegensatz zum Relativitätsprinzip mit einem bestimmten Koordinatensystem zu verknüpfen scheint, werde ich bei anderer Gelegenheit im Zusammenhang mit der Adiabatenhypothese noch zurückkommen.

Zunächst will ich nur die praktische Anwendung der beiden Gleichungssysteme (3) und (12) bei der Lösung von Quantenproblemen am Beispiel des ungestörten Wasserstoffatoms zeigen. Hier ist das Feld statisch und kugelsymmetrisch. Folglich ist $\Phi_i = 0$, $\Phi_t = -\frac{e^2}{r}$ und der Ausdruck für das Linienelement [1]) lautet dann in Polar-

[1]) Die Gravitationswirkung ist hier selbstverständlich zu vernachlässigen.

koordinaten bei gleichzeitiger Beschränkung auf das zweidimensionale Raumproblem:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dr^2 - r^2 d\varphi^2.$$

Für die imaginäre x_4 Variable führe ich hier die Substitution $x_4 = e^{2\pi i \nu t}$ ein, um die Periodizität dieser Variablen besonders hervorzuheben. Die Substitution dürfte sich besonders dort bewähren, wo im Atommodell noch eine anharmonische Schwingung [1]) angenommen werden muß, denn eine solche wird sich stets als Potenzreihe von x_4 darstellen lassen.

Die Substanzwirkung ist also gegeben durch

$$S = i \int \left[m_0 c \sqrt{\left(\frac{c}{2\pi\nu}\right)^2 \frac{1}{x_4^2}\left(\frac{dx_4}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} + \frac{1}{r.x_4}\left(\frac{e^2}{2\pi\nu}\right)\frac{dx_4}{ds}\right] ds. \tag{13}$$

Für P_φ und P_4 erhält man aus Gleichung (3) und (12) sofort die Werte

$$P_\varphi = \frac{n_\varphi h}{2\pi}, \qquad P_4 = \frac{n_4 h}{2\pi i x_4}. \tag{14}$$

P_r läßt sich aus Gleichung (6) berechnen. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{c^2}\left[n_4 h\nu + \frac{e^2}{r}\right]^2 - P_r^2 - \frac{1}{r^2} P_\varphi^2 = m_0^2 c^2. \tag{15}$$

Diese Beziehung liefert dann in der bekannten Weise mit der Deutung von $n_4 h\nu = m_0 c^2 + W$ den relativistischen Energieausdruck für das Bohrsche Wasserstoffmodell. Führe ich hier in Analogie zur Feinstrukturkonstanten $\alpha = \frac{2\pi e^2}{hc}$ die Abkürzung $\beta = i\frac{m_0 c^2}{h\nu}$ ein und setze $n = n_r + n_\varphi \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{n_\varphi^2}}$, so erhält der Energieausdruck die besonders anschauliche Form:

$$\left(\frac{\beta}{n_4}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 = -1. \tag{16}$$

Da im obigen Ausdruck für die Substanzwirkung nur r explizite auftritt, so läßt sich Gleichung (13) direkt integrieren. Aus der Definition von P_r [Gleichung (4)] folgt

$$S = -\int \left(m_0^2 c^2 + \frac{e^2}{r}\cdot\frac{1}{c^2}\left[n_4 h\nu + \frac{e^2}{r}\right]\right)\frac{dr}{P_r}.$$

[1]) Z. B. bei der Untersuchung des Einflusses eines elektrischen Wechselfeldes auf das Atom (Dispersionstheorie).

Die Gleichsetzung beider Integrationsmethoden liefert dann die einfache Beziehung (Frequenzgleichung)

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{n_4}{n}\right)^3. \tag{17}$$

Aus den bekannten Elektronenkonstanten erhält man Werte von der Größenordnung $n_4 \nu \sim 1{,}24 \cdot 10^{20}$ und $n_4 \sim -\frac{n^3}{\alpha^2}$ Quanten. Auf die Deutung der Quantenzahl n_4 komme ich unten noch zurück.

III. Das Erhaltungsprinzip $\Delta S = 0$. Um nun aus den Bahngleichungen, die das Variationsprinzip und quantitativ das Integrationsprinzip geliefert hat, auf die ausgestrahlte Frequenz schließen zu können, geht man bekanntlich so vor, daß man durch eine Berührungstransformation Winkelvariable der Zeit einführt. Dadurch wird es möglich, die ursprünglichen Koordinaten in Fouriersche Reihen dieser Winkelvariablen zu entwickeln, und das Korrespondenzprinzip überträgt dann eine solche klassisch berechnete Partialschwingung auf die Frequenz des korrespondierenden Quantensprunges. Bei der Verallgemeinerung des Begriffs der Winkelvariablen in einer vierdimensionalen Metrik ist nun dieses Verfahren nicht so durchführbar, daß der Sinn des Korrespondenzprinzips klar zutage tritt. Um daher zu einer zweckmäßigen allgemeinen Definition der Winkelvariablen zu gelangen, schlage ich einen anderen Weg ein und will das Korrespondenzprinzip, und damit auch die Bohrsche Frequenzbedingung, aus einem dritten Grundpostulat der Quantentheorie ableiten, welches in Analogie zur Kontinuitätsgleichung der Masse als Erhaltungsprinzip formuliert sei. Die Gesamtwirkung, also der Ausdruck [Gleichung (2)], soll nämlich bei einer beliebigen Änderung der Einzelwirkungen, d. h. der Phasenintegrale J_k, unverändert bleiben. Unter der vorläufigen Voraussetzung der Differenzierbarkeit der Gleichungen lautet der mathematische Ausdruck dieses Prinzips

$$dS = \sum_1^k \frac{\partial S}{\partial J_k} s_k h = 0, \tag{18}$$

wo s_k beliebige ganze Zahlen sind, da sich die Phasenintegrale ja überhaupt nur um ganze h ändern können. Es läge hier also gewissermaßen der Fall einer vollkommenen Entartung der Winkelvariablen $\frac{\partial S}{\partial J_k}$ vor, da die Gleichungen ganz allgemein nur für $\frac{\partial S}{\partial J_k} = 0$ erfüllt sein können. Berücksichtigt man aber, daß die Gesamtwirkung aus den vier Einzelintegralen $S^{(i)} = \int_{x_i}^{x_f} P_i \, dx_i$ besteht, daß ferner bisher nur

$\frac{\partial S^{(i)}}{\partial J_k} = w_k$ als Winkelvariable definiert war, so folgt daraus die Beziehung $w_k = -\sum^{i} \frac{\partial S^{(i)}}{\partial J_k}$ mit der Definitionsgleichung

$$\frac{d w_k}{d t} = \frac{\partial P_i}{\partial J_k}. \tag{19}$$

Also nur für den Fall wieder, daß die Zeit nicht explizite auftritt, hat w_k die übliche Gestalt $\nu_k t + \delta$, im allgemeinen wird sie jedoch eine Funktion der x_i sein. Kehre ich nun zur Gleichung (18) zurück, so gestattet sie mir wegen der Periodizitätseigenschaften der $S^{(i)}$ und x_i eine beliebige Funktion dreier Variablen in eine Fouriersche Reihe der vierten Variablen, etwa der Zeit, zu entwickeln, dergestalt, daß

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sum^{k} A_k e^{2\pi i F(t)}. \tag{20}$$

Tritt diese Variable nicht in der Wirkungsgleichung explizite auf, so hat die Funktion $F(t)$ die einfache Form

$$F(t) = s_k \cdot w_k. \tag{21}$$

Anderenfalls ist die Partialschwingung nicht monochromatisch, und man muß sich dann etwa mit einer mittleren Frequenz

$$\nu_k = \frac{1}{T} \int^{T} F(t) \frac{dt}{t} \tag{22}$$

begnügen, da $\frac{F(t)}{t}$ im allgemeinen eine periodische Funktion sein wird.

Ich will auf diese klassische Methode, die S als stetige Funktion der J_k voraussetzt, nicht weiter eingehen; denn die Quantentheorie mit ihren diskreten Werten für die Phasenintegrale schließt ja eine Differenzierbarkeit von S nach den J_k von vornherein aus. An Stelle der Gleichung (18) kann dann nur gesetzt werden

$$\Delta S = S_1 - S_2 = 0, \tag{23}$$

wo S_1 als Funktion der Quantenzahlen n_k und S_2 als Funktion beliebig anderer Quantenzahlen n'_k aufgefaßt ist. Ich setze voraus, daß eine Integration der $S^{(i)}$ ausführbar ist, daß also eine Separation der Variablen möglich ist; dann soll aber für jede einzelne Variable die Reihenentwicklung nach den Eigenfunktionen $\frac{1}{n_i h} \cdot e^{\frac{2\pi i}{h} s^{(i)}}$ ($\frac{1}{n_i h}$ Normierungsfaktor) möglich sein, und zwar sei

$$f(x_i) = \frac{1}{n_i \cdot n'_i \cdot h^2} \sum^{n_k} \sum^{n'_k} A_{1,2}\, e^{2\pi \frac{i}{h} \left(s_1^{(i)} - s_2^{(i)}\right)}, \tag{24}$$

wo über sämtliche Werte der n_k zu summieren ist und die Koeffizienten durch

$$A_{1,2} = \int\int f(x_i, x_i')\, P_i \cdot P_i'\, e^{2\pi i \frac{1}{h}\left(s_2^{(i)} - s_1^{(i)}\right)} d x_i\, d x_i' \qquad (25)$$

definiert sind. Läßt sich nun die Funktion der drei x_i, für die die Reihenentwicklung gesucht wird, als Produkt (oder Summe von Produkten) der obigen Funktionen $f(x_1)\, f(x_2)\, f(x_3)$ schreiben, so ist wegen der Beziehung [Gleichung (23)]

$$S_2^{(4)} - S_1^{(4)} = \sum^{i} S_1^{(i)} - \sum^{i} S_2^{(i)} \qquad (26)$$

nun

$$f(x_1\, x_2\, x_3) = \sum^{n_i'} \sum^{n_i} \sum C_{1,2}^{i} \cdot e^{2\pi i \frac{1}{h}\left(s_2^{(4)} - s_1^{(4)}\right)}, \qquad (27)$$

wo die Koeffizienten als Produkte (bzw. Summe von Produkten) der obigen Koeffizienten leicht berechenbar sind.

Die obige Gleichung erhält nun die verallgemeinerte Bohrsche Frequenzbedingung; denn für den Fall, daß die Zeit nicht im Energieausdruck auftritt, gilt ja $S_2^{(4)} - S_1^{(4)} = (P_i' - P_i)t$, d. h. aber die Frequenzen der obigen Partialschwingungen sind die Bohrschen Frequenzen

$$\nu = \frac{1}{h}(P_i' - P_i). \qquad (28)$$

Für den allgemeinen Fall vgl. Gleichung (22).

Die Deutung des Korrespondenzprinzips und der Bohrschen Frequenzbedingung liegt also in der Möglichkeit der Reihenentwicklung nach Eigenfunktionen (24), diese ist jedoch von der bisherigen Fourierentwicklung prinzipiell verschieden; $f(x_i)$ wurde dort in Fouriersche Reihen bei einem fest gegebenen Wertesystem der J_k dargestellt, man betrachtete also da nur die einzelnen durch die J_k ausgezeichneten, stationären Quantenbahnen, während in der obigen Reihenentwicklung $f(x_i \ldots)$ als Funktion sämtlicher möglichen Werte der J_k (d. h. also die J_k variabel) dargestellt wird; die zwischen zwei stationären Bahnen stattfindende Bewegung wird hier dann als Partialschwingung gedeutet. Bei einer Differenzierbarkeit der Wirkungsfunktion S, d. h. bei großen Quantenzahlen, gehen beide Reihenentwicklungen naturgemäß ineinander über.

Am konkreten Beispiel des Wasserstoffs soll nun diese Reihenentwicklung durchgeführt werden. Zunächst integriere ich die Gleichung (13) für die Substanzwirkung. Nach Wiedereinführung der üblichen Zeitvariable erhält man sofort

$$2\pi S^{(t)} = 2\pi n_t h \nu t, \qquad 2\pi S^{(\varphi)} = n_\varphi h \cdot \varphi. \qquad (29)$$

Bei $S^{(r)}$ führe ich die Substitution $2\pi a r = nh(1 - \varepsilon \cos\psi)$ ein mit den Abkürzungen [1]) [siehe Gleichung (15) und (17)] $\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{n_\varphi}{n}$.

$$a = m_0 c i \left(\frac{n}{n_\varphi}\right)^{1/2}; \quad P_r = \frac{nh}{2\pi r} \varepsilon \sin\psi.$$

$S^{(r)}$ nimmt darauf die einfache Gestalt an:

$$2\pi S^{(r)} = 2\pi \int P_r \, dr = nh \int \frac{\varepsilon^2 \sin^2\psi}{1 - \varepsilon\cos\psi} \, d\psi \tag{30}$$

und nach Ausführung der Integration erhält man:

$$2\pi S^{(r)} = nh\left(\psi + \varepsilon\sin\psi + i\sqrt{1-\varepsilon^2}\log\frac{\cos\psi + i\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\psi - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos\psi}\right). \tag{31}$$

Für die Strahlung des Atoms maßgebend ist nun die Kenntnis des elektrischen Momentes des Elektrons als Funktion der Zeit [2]), d. h. die Reihenentwicklung [Gleichung (27)]:

$$r e^{i\varphi} = \sum^{n_k} C_{n_k} e^{2\pi i (n'_\varphi \nu' - n_\varphi \nu) t}. \tag{32}$$

Aus

$$f(\varphi) = e^{i\varphi} = e^{i(n_\varphi - n'_\varphi)\varphi} \tag{33}$$

folgt das „Auswahlprinzip“ $n_\varphi - n'_\varphi = 1$ (-1 für den konjugiert komplexen Ausdruck). Diese Koeffizienten sind hier also entweder 1 oder 0. Für $f(r, r')$ wähle ich deshalb die Funktion:

$$f(r,r') = r^{n_\varphi - n'_\varphi} = \frac{h}{2\pi m_0 c} \sum^{n_k\, n'_k} c_1 \cdot c_2 \, e^{2\pi i \frac{1}{h}(S_2^{(r)} - S_1^{(r)})}, \tag{34}$$

wo die Koeffizienten [s. Gleichung (25) und (31)] durch die beiden Integrale

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= (-n \cdot n_4)^{\frac{n_\varphi}{2}} \cdot \binom{n}{n_r} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \sin^2\psi}{1-\varepsilon\cos\psi} (\cos\psi \\ &+ i\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin\psi - \varepsilon)^{n_\varphi} \, e^{(-in\psi - i(n\varepsilon)\sin\psi)} \, d\psi, \\ c_2 &= (-n' \cdot n'_4)^{-\frac{n'_\varphi}{2}} \binom{n'}{n'_r} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon'^2 \sin^2\psi}{1-\varepsilon'\cos\psi} (\cos\psi \\ &+ i\sqrt{1-\varepsilon'^2}\sin\psi - \varepsilon')^{-n'_\varphi} \, e^{(in'\psi + i(n\varepsilon)'\sin\psi)} \, d\psi \end{aligned}\right| \tag{35}$$

[1]) Die Relativitätskorrektion $\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{n_\varphi}\right)^2}$ soll hier vernachlässigt werden.

[2]) Die allgemeine Lösung der Wellengleichung $\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_i} = e\varrho^i$, $F_{ik} = \text{rot}\,\varphi_i$ führt bekanntlich auf retardierte Potentiale. Es ist deshalb zweckmäßiger, die φ_i selbst in Reihen zu entwickeln. Für $\varphi_i = er^{-1}$ ändern sich in den obigen Formeln nur einige Vorzeichen.

dargestellt sind. Diese Integrale sind nun reine Funktionen der Quantenzahlen n_r, n_φ, n_4 bzw. n'_r, n'_φ, n'_4, und ihre Auswertung führt auf eine Reihe Besselscher Funktionen, die bekanntlich durch die Gleichung:

$$I_p(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ip\psi + ix\sin\psi}\, d\psi \tag{36}$$

definiert sind.

Das Verhalten eines Elektrons in einem kugelsymmetrischen, statischen Felde ist also vollkommen charakterisiert durch die drei Gleichungen

$$\left(\frac{\beta}{n_4}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2 = -1, \tag{16}$$

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{n_4}{n}\right)^3, \tag{17}$$

$$r e^{i\varphi} = \frac{h}{2\pi m_0 c}\sum^{n_k n'_k} f_1(n_k)\cdot f_2(n'_k)\, e^{2\pi i \nu t} \qquad (\nu = n'_4 \nu' - n_4 \nu). \tag{32}$$

Zum Schlusse möchte ich nun nochmals kurz den Gedankengang skizzieren, der zu diesen Gleichungen des Elektrons geführt hat:

Ausgehend von der Überlegung, daß in einer vierdimensionalen Raum–Zeitmetrik eine etwaige Atomistik nur eine solche der Elektrizitätsmenge und der Wirkungsgröße (skalare Größen) sein kann, führte ich den Begriff der Substanzwirkung ein. Diese Substanzwirkung mußte dann den Bedingungen der drei Prinzipien, denen jede (atomistische) Mechanik unterworfen ist, gehorchen. Das Variationsprinzip lieferte das Lagrangesche Gleichungsquadrupel als Analogon zu den Hamiltonschen Gleichungen, die nur unter gewissen Einschränkungen eine Lösung von Quantenproblemen zulassen. Das Integrationsprinzip, das die Substanzwirkung als ein geschlossenes Linienintegral auffaßt, führte dann in seiner Erweiterung auf die Quantenwerte der Phasenintegrale. Aus dem Erhaltungsprinzip, bei welchem nun auch Änderungen der Phasenintegrale berücksichtigt werden, folgte schließlich das Korrespondenzprinzip mit der Bohrschen Frequenzbedingung als Spezialfall. Die sich hier ergebende Schwierigkeit der Nichtdifferenzierbarkeit der Wirkungsfunktion wäre auch in der „klassischen“ Mechanik aufgetreten, wenn an Stelle des (fiktiven) Kontinuums von vornherein eine atomistische Struktur berücksichtigt worden wäre.

Man sieht also, daß in der Tat die Quantentheorie zwanglos auf eine, zunächst vielleicht nur rein formal aufzufassende Atomistik in

der vierdimensionalen Metrik zurückzuführen ist. Ob nun die andere, relativistisch auch mögliche Atomistik, nämlich die der Elektrizität, unabhängig vom Wirkungsatom existieren kann, oder ob diese beiden Größen, das Wirkungsquantum und das Elektron, aus einander ableitbar sind und welches dann die universelle Atomkonstante ist, das sind Fragen, die die Atomtheorie vorläufig noch nicht beantworten kann.

Auf einige spezielle Probleme der Quantentheorie werde ich noch zurückkommen.

Bonn, Physik. Inst. d. Univ., November 1923.

Zur Frage des normalen und selektiven Photoeffektes der Alkalimetalle.

Von **K. Farwig** in Göttingen.

Mit sieben Abbildungen. (Eingegangen am 16. November 1923.)

§ 1. Pohl und Pringsheim haben 1910 die Überlagerung des normalen und selektiven Photoeffektes durch die Fig. 1a schematisch dargestellt[1]).

Das dem normalen Photoeffekt zugesprochene Stück ab in der Fig. 1a war dabei nur mit zwei Meßpunkten bis herab zu $\lambda = 254\,m\mu$ belegt worden. Die vorliegende Arbeit bestätigt in § 3 den skizzierten Verlauf ba bis $\lambda = 185\,m\mu$ mit einer hinreichenden Zahl von Meßpunkten an Kalium und Rubidium.

Pohl und Pringsheim hatten ferner offen gelassen, ob sich der normale Photoeffekt auch im Gebiet langer Wellen über die langwellige Grenze d des selektiven Photoeffektes hinaus verfolgen läßt. Fig. 1b, Kurvenstück de.

Solange das nicht entschieden war, ließen die von Pohl und Pringsheim gemachten Beobachtungen noch eine andere, als die in Fig. 1a gegebene Deutung zu. Fig. 1a nimmt an, daß sich das Maximum bcd dem normalen Anstieg abd überlagert. Möglich war nach J. Franck auch eine andere Auffassung des Maximums bcd[2]). Nach dieser gehen die zum horizontal schraffierten Gebiet $abcf$ in Fig. 1c gehörigen Elektronen verloren, weil sie die bestrahlte Oberfläche nicht passieren können. Dann wäre dba die normale Emission für den Fall, daß der elektrische Lichtvektor keine zur Metalloberfläche senkrechte Komponente besitzt. Das Stück dcf wäre die Emission, die von der zur Metalloberfläche senkrechten Komponente des Lichtvektors begünstigt wird. Diese käme jedoch ab c nur noch zum Teil, jenseits b überhaupt nicht mehr zur Geltung, weil die Elektronen mit dem zugehörigen Planckschen $h\nu$ wegen unelastischer Zusammenstöße oder dergleichen nicht mehr aus den obersten Moleküllagen entweichen können.

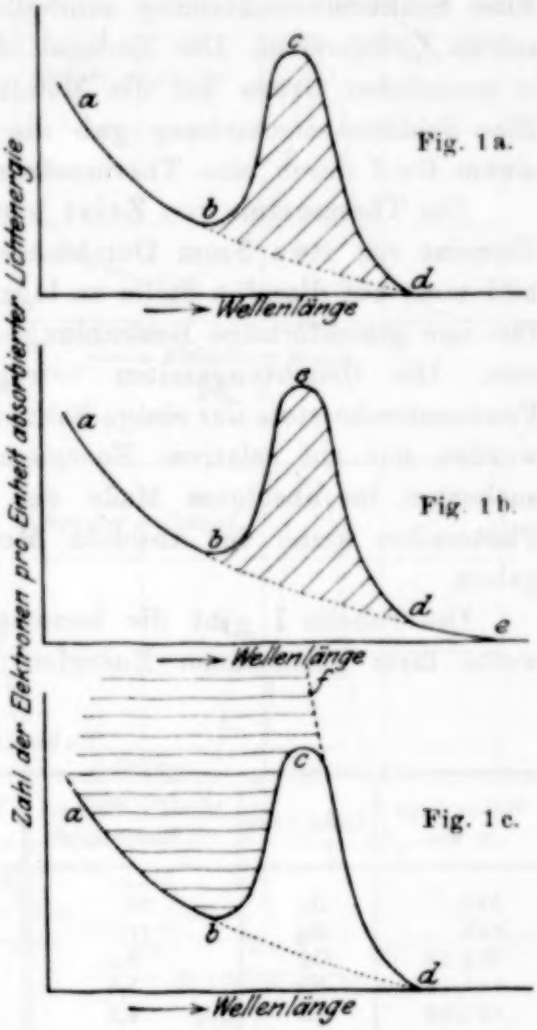
Die §§ 4 und 6 dieser Arbeit beweisen jedoch, daß der Fall der Fig. 1c nicht vorliegt, sondern der Fall der Fig. 1b, so daß also die

---

[1]) R. Pohl und P. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. **12**, 682, 1910.
[2]) Vgl. Fr. Hund, ZS. f. Phys. **13**, 241, 1923.

alte Darstellung, die Pohl und Pringsheim von der Überlagerung beider Effekte gegeben haben, zu Recht besteht.

§ 2. Versuchsanordnung. Die lichtelektrischen Zellen, an denen das Bild der spektralen Verteilung der Empfindlichkeit bis zu $\lambda = 185\ m\mu$ herab gemessen werden sollte, bestanden aus den üblichen Glaskugeln mit Quarzfenstern. Sie wurden mit einer Dampfstrahlpumpe evakuiert und dann abgeschmolzen. Die Alkalimetalle hatten die beim Erstarren auftretende kristalline Oberfläche. Das Licht fiel auf diese rauhe Fläche senkrecht auf. Es sind dann, wie bekannt, hinreichend viel Oberflächenelemente vorhanden, in bezug auf die der elektrische Lichtvektor eine senkrechte Komponente besitzt[1]). Die Flächen wurden teils so benutzt, wie sie sich aus dem flüssigen Metall beim Erstarren abschieden, teils wurden sie nach dem Vorgang von Elster und Geitel[2]) als Kathode einer schwachen Glimmentladung kolloidal angefärbt.



Der optische Teil bestand im wesentlichen aus einem Monochromator mit zweifacher spektraler Zerlegung. Je nach dem Wellenbereich wurden Prismen und Linsen aus Glas, Quarz oder Flußspat benutzt.

---

[1]) R. Pohl und P. Pringsheim, Die lichtelektrischen Erscheinungen (Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn, 1914), S. 20. Diese einfache Tatsache ist seltsamerweise von W. H. Souder, Phys. Rev. (2) 8, 310, 1916, übersehen worden. Souder findet an einer mit einem Messer geschnittenen Li-Fläche bei senkrechter Inzidenz einen selektiven Photoeffekt und folgert daraus, daß der selektive Photoeffekt auch ohne eine zur Metalloberfläche senkrechte Komponente des elektrischen Lichtvektors auftritt. Eine durch eine Schneide hergestellte Metallfläche ist aber alles andere eher als ein optisch vollkommener Spiegel.

[2]) J. Elster und H. Geitel, Phys. ZS. **11**, 257, 1910.

Als Lichtquelle diente entweder eine Funkenstrecke[1]) oder eine Hg-Quarz-Punktlichtlampe von Heraeus.

Die 2 bis 3 mm lange Funkenstrecke wurde mit einem Resonanzinduktor parallel zu einer Kapazität von etwa 4000 cm betrieben. Die Punktlichtlampe brannte mit 18 Volt Klemmenspannung. Eine Schlittenverschiebung ermöglichte raschen Austausch der einzelnen Lichtquellen. Der Endspalt des Doppelmonochromators wurde in natürlicher Größe auf die Metallfläche der Photozelle abgebildet. Eine Schlittenverschiebung gab die Möglichkeit, die Photozelle mit einem Griff durch eine Thermosäule zu ersetzen.

Die Thermosäule von Zeiss bestand nur aus einem kreisförmigen Element von etwa 3 mm Durchmesser. Es war notwendig, das Spaltbild stets auf dieselbe Stelle zu legen, da die Thermosäule eigentlich für eine gleichförmige Bestrahlung des ganzen Querschnittes gebaut war. Die Belichtungszeiten betrugen wegen des Abbrandes der Funkenstrecke stets nur einige Sekunden. Die lichtelektrischen Ströme wurden nur auf relatives Energiemaß bezogen, da die Elektronenausbeuten im absoluten Maße zur Genüge bekannt sind, und die Photozellen keine für absolute Messungen hinreichende Sättigung gaben.

Die Tabelle I gibt die benutzten Wellenlängen und die Mittelwerte ihrer gemessenen Energien. Zur Platzersparnis werden die

Tabelle I.

Wellenlänge in mμ	Lichtquelle	Mittlere Energie in Skalenteilen	Wellenlänge in mμ	Lichtquelle	Mittlere Energie in Skalenteilen
578	Hg	26	293	Mg	7
546	Hg	21	285	Mg	10
534/38	Cd	5,0	280	Mg	45
517/18	Mg	3,0	275	Cd	9,0
491/93	Zn	4,2	265	Hg	9,5
448	Mg	9,5	257	Cd	5,5
436	Hg	22	254	Hg	4
405	Hg	9,5	231/33	Cd	13,5
393/97	Ca	5,0	226	Cd	9,5
383/84	Mg	10,5	219	Cd	6,0
371/74	Ca	2,1	214	Cd	6,2
365	Hg	50	210	Zn	5,5
347	Cd	4,8	206	Zn	4,5
340	Cd	2,1	203	Zn	4,2
334	Hg	5,0	199	Al	1,7
315/18	Ca	8,0	193	Al	1,6
313	Hg	28	185/86	Al	3,3
297/302	Hg	25			

[1]) A. Pflüger, Ann. d. Phys. **13**, 890, 1904.

Ergebnisse nur graphisch an einigen Beispielen dargestellt. Es sei ausdrücklich bemerkt, daß lichtelektrische Strom- und Energiemessungen abwechselnd vorgenommen wurden, und den Kurven stets Mittel aus mehreren Meßreihen zugrunde liegen. Auch ist die Absorption des Quarzfensters, die bei $\lambda = 185/86\ m\mu$ bis zu 26 Proz. betrug, berücksichtigt worden.

§ 3. Meßergebnisse. Fig. 2 bezieht sich auf eine gegossene, Fig. 3 auf eine kolloidal gefärbte Kaliumfläche. Fig. 4 auf ein kolloidal gefärbtes Rubidium. Die Maxima für Kalium liegen in beiden Fällen bei etwa $\lambda = 436\ m\mu$, für Rubidium bei etwa $\lambda = 480\ m\mu$.

Die Messungen unterscheiden sich von den früher mitgeteilten durch eine größere Anzahl von Meßpunkten auch im selektiven Gebiet. Die Lage der Maxima stimmt mit den alten Angaben von Pohl und Pringsheim überein.

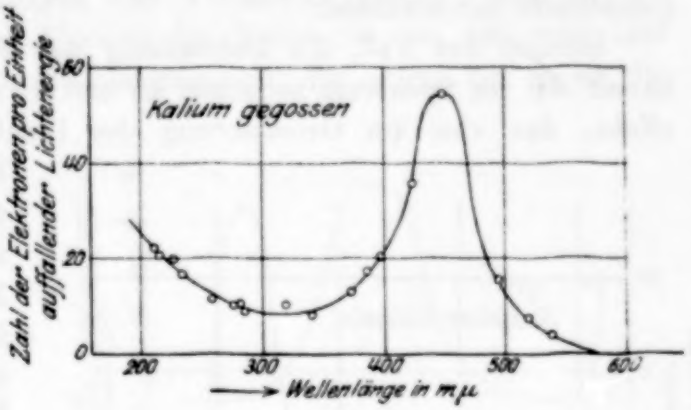


Fig. 2.

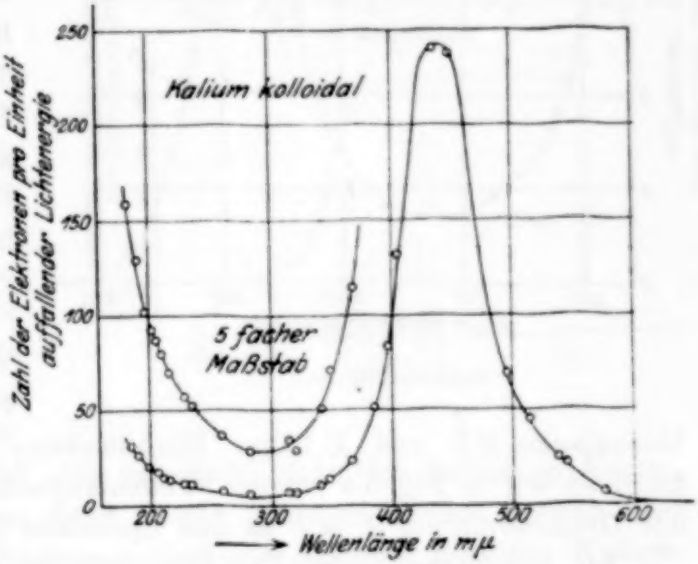


Fig. 3.

Ein starker Anstieg der Elektronenemission unterhalb $\lambda = 300\ m\mu$ ist für alle Fälle erwiesen. Der von Pohl und Pringsheim in Fig. 1a skizzierte Verlauf des Kurvenstückes *ba* kann damit als sichergestellt gelten.

Es ist einstweilen kein Anzeichen dafür vorhanden, daß außer den bekannten selektiven Gebieten noch weitere im Gebiete kürzerer Wellenlängen zu beobachten sind.

§ 4. Der zweite Teil der Arbeit galt den durch die Fig. 1b und 1c erläuterten Fragestellungen: 1. war festzustellen, ob sich gemäß Fig. 1b ein Kurvenstück *de* des normalen Photoeffektes über

das selektive Gebiet hinaus nach langen Wellen verfolgen läßt; 2. war zu entscheiden, ob die zum schraffierten Stück der Fig. 1c gehörigen Elektronen verloren gehen.

Beide Fragen ließen sich auf Grund folgender Überlegungen gemeinsam beantworten.

Gesetzt den Fall, die Darstellung der Fig. 1b sei richtig, dann haben wir im Spektrum zwischen *ab* und *de* nur den normalen Photoeffekt, der von der Orientierung des Lichtvektors unabhängig ist. Fällt polarisiertes Licht unter schrägem Einfallswinkel auf die spiegelnde Metalloberfläche, so ist zwar die Elektronenemission für die beiden Hauptlagen des Lichtvektors verschieden. Doch ist, wie Pohl[1]) bereits 1909 gezeigt hat, dieser Unterschied nicht größer, als den verschieden großen Reflexionsverlusten in den beiden Hauptlagen entspricht.

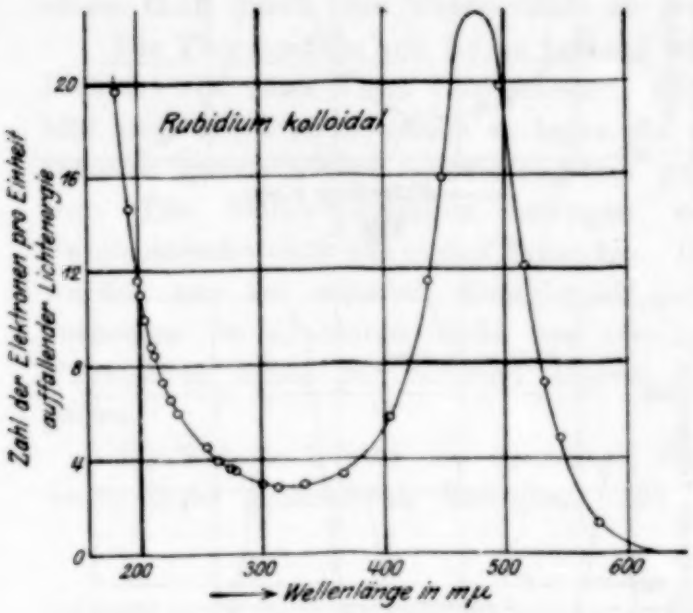


Fig. 4.

Tragen wir daher das Verhältnis der Elektronenausbeuten für die beiden Hauptlagen $E\parallel$ und $E\perp$ zur Einfallsebene graphisch auf, so bekommen wir in Fig. 5a für die Wellenlängenbereiche *ab* und *de* Werte der Größenordnung 2, wie es den optischen Konstanten entspricht.

Im selektiven Gebiet *bcd* nimmt die Elektronenemission für $E\parallel$ sehr hohe Werte an. Das Verhältnis von $E\parallel/E\perp$ erreicht bei der Wellenlänge *c* ein Maximum, das Werte von 10 und weit darüber erreichen kann.

Anders, wenn die Darstellung von Fig. 1c richtig ist, dann sollten wir für das Verhältnis von $E\parallel/E\perp$ den in Fig. 5b skizzierten Verlauf erhalten. Wir hätten die selektive, durch die Hauptlage $E\parallel$ begünstigte Elektronenemission von der langwelligen Grenze in erster Annäherung konstant bis zur Wellenlänge *c*, dann abfallend bis zur Wellenlänge *b* und nur auf dem Stücke *ba* die niedrigen Werte für

[1]) R. Pohl, Verh. d. D. Phys. Ges. **11**, 339, 1909.

$E\parallel/E\perp$, wie sie den normalen optischen Absorptionsverhältnissen entsprechen.

Man hat also lediglich monochromatisches polarisiertes Licht unter schräger Inzidenz auf einen Alkalimetallspiegel zu werfen und für verschiedene Wellenlängen das Verhältnis von $E\parallel/E\perp$ zu bestimmen. Finden wir den Verlauf der Kurve 5*b*, so ist damit der Fall der Fig. 1c bewiesen, bekommen wir die Kurve 5*a*, so ist die alte Vorstellung von Pohl und Pringsheim gemäß Fig. 1a und 1b bestätigt.

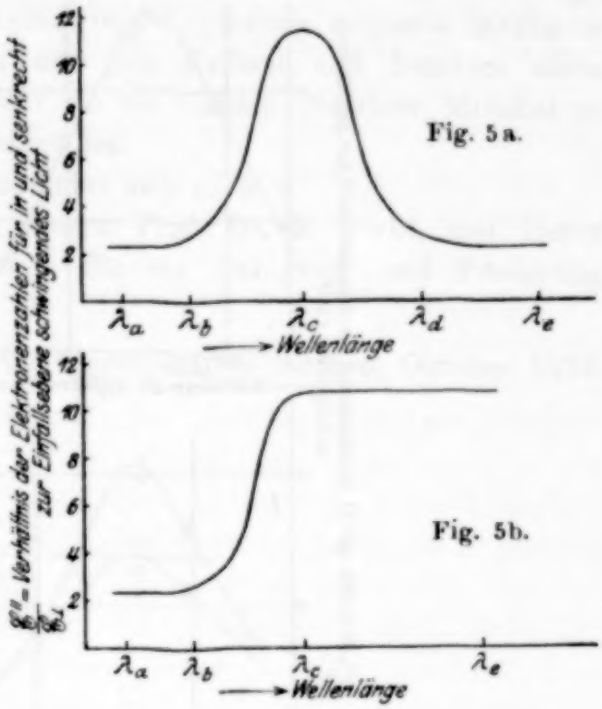


Fig. 5a.

Fig. 5b.

Läßt sich das kleine Verhältnis in Fig. 5a merklich über die Wellenlänge *d* verfolgen, so ist damit gleichzeitig erwiesen, daß der normale Photoeffekt gemäß Fig. 1b noch in das Stück *de* hineinragt und nicht gemäß Fig. 1a zugleich mit der selektiven Emission bei *d* verschwindet.

§ 5. Die Versuchsanordnung für den zweiten Teil der Arbeit war folgendermaßen: Die Photozelle war aus Glas und enthielt Kalium. Sie befand sich in einem elektrisch heizbaren Kasten, so daß die Oberfläche bei 62,5° flüssig gehalten werden konnte. Ein passendes Fenster im Heizkasten ließ das an dem flüssigen Kaliumspiegel reflektierte Licht austreten und die einwandfreie Beschaffenheit des Spiegels kontrollieren. Das einfarbige Licht wurde mit einem symmetrischen Doppelmonochromator [1]) gewonnen. Als Lichtquelle diente entweder eine Wolframbogenlampe oder eine Hg-Punktlichtlampe. Die Strommessung erfolgte mit einem Einfadenelektrometer variabler Empfindlichkeit. Ein Galvanometer reichte zum Nachweis der „normalen“ Emission im Gebiet langer Wellen nicht mehr aus. Da die Zelle aus Glas bestand, konnten Wellenlängen unter $\lambda = 365\ m\mu$ nicht mehr benutzt werden. Doch waren Messungen

[1]) H. Lehmann, Ann. d. Phys. (4) **5**, 633, 1901.

für kürzere Wellenlängen nicht notwendig, da der normale Charakter der Emission schon seit langem sichergestellt ist.

§ 6. Messungen. Aus einer großen Anzahl von Messungen geben die Fig. 6 und 7 lediglich zwei Beispiele. Die Zahlen lassen keinen Zweifel, daß die Darstellung der Fig. 5a zutrifft. Es gilt also der Fall der Fig. 1b. Die selektive Emission überlagert sich der normalen nur in dem Intervall $\lambda = 330\,\mathrm{m}\mu$ bis $\lambda = 540\,\mathrm{m}\mu$.

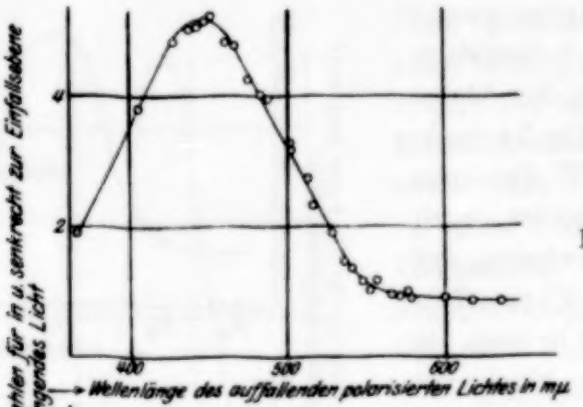


Fig. 6.

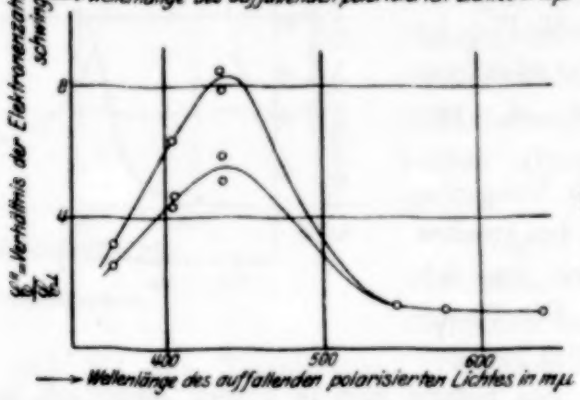


Fig. 7.

Jenseits dieser beiden Wellenlängen haben wir sowohl im Ultravioletten wie im Gelben und Roten nur die normale Emission.

Die Verhältnisse von $E\parallel / E\perp$ erreichen in dieser Untersuchung im selektiven Gebiet höchstens Werte von neun. Diese Zahlen sind sicher etwas zu niedrig. Es gelang nicht, das Innere der Glaskugel hinreichend von destillierenden Metallbeschlägen frei zu halten. Der an diesen durch reflektiertes Licht ausgelöste lichtelektrische Strom war in beiden Lagen des elektrischen Lichtvektors ungefähr gleich und nicht zu vernachlässigen. Er addiert sich also im Zähler und Nenner des gesuchten Quotienten $E\parallel / E\perp$, so daß für diesen Quotienten zu kleine Werte erhalten werden. Bei der flüssigen Kalium-Natrium-Legierung fällt diese rein technische Schwierigkeit fort.

Wir haben an einem solchen Kalium-Natrium-Spiegel bei einem Einfallswinkel von 60° im selektiven Gebiet Werte für $E\parallel/E\perp$ von 25 bis 30 beobachtet, bei $\lambda = 560\,\mathrm{m}\mu$ betrug der Wert nur noch 2 und von da an sank er bis zu $\lambda = 670\,\mathrm{m}\mu$ langsam auf 1 herab. Die Beobachtungen an Kalium-Natrium bestätigen demnach die Ergebnisse an Kalium aufs beste.

Die näheren Zahlen werden in einer späteren Dissertation mitgeteilt werden. Sie erlauben offenbar die Entscheidung der Frage, ob sich das an der Kalium-Natrium-Legierung zeigende Maximum einfach durch Superposition der zum Kalium und Natrium allein gehörigen Kurven ergibt, oder ob ein Kalium-Natrium-Molekül an ihrem Zustandekommen beteiligt ist.

Die Zusammenfassung befindet sich in § 1.

Zum Schluß danke ich Herrn Prof. Dr. R. Pohl und Herrn Privatdozenten Dr. B. Gudden für die Anregung und Förderung dieser Untersuchung.

I. Physikalisches Institut der Universität Göttingen, Oktober 1923.

Versuche mit der Glimmlampe als Zählkammer.

Von **O. v. Baeyer** und **W. Kutzner** in Berlin.

(Eingegangen am 9. Dezember 1923.)

Zur Zählung und zum Nachweis von α-, β-, γ- und Röntgenstrahlen [1]) verwendet man bekanntlich meistens die von Geiger angegebene Zählkammer, die mit Spitzenentladung arbeitet, oder auch Kammern, die mit verdünnten Gasen gefüllt sind, wie z. B. die von Rutherford und Geiger, und neuerdings von Hess und Lawson [2]), Mie und Herweg, Hoepner [3]) angegebenen Apparate. Aber all diese Apparate haben besonders für Demonstrationszwecke den Nachteil, daß verhältnismäßig hohe Spannungen verwendet werden müssen, ferner, daß z. B. bei der Geigerschen Kammer die Spitze leicht beschädigt werden kann, endlich, daß der Raum, durch den die Strahlung gehen muß, um noch gezählt zu werden, ein recht beschränkter ist.

Deshalb möchte ich darauf hinweisen, daß als einfach zu handhabende Zählkammer für durchdringende Strahlen die im Handel erhältliche Glimmlampe [4]) verwendet werden kann.

Am besten bewährt hat sich die sogenannte Mikrophonlampe. Als Anode dient hier ein U-förmig gebogenes Eisenblech, zwischen dem als Kathode ein zweites ebenes Blech angebracht ist.

Legt man an die Lampe eine geeignete Gleichspannung (zwischen 150 bis 200 Volt) unter Vorschalten eines hohen Widerstandes (1 bis 10 Megohm), so würde man erreichen können, daß die Lampe bei Eintritt einer ionisierenden Strahlung zündet. Sie würde aber nicht wieder verlöschen. Um sofortiges Löschen zu erreichen, braucht man nur parallel zur Lampe oder, was dieselbe Wirkung hat, parallel zu dem hohen Widerstand einen kleinen Drehkondensator zu legen. Die Wirkung dieser Kapazität scheint mir darauf zu beruhen, daß bei dem Zünden der Lampe Schwingungen und dadurch Gegenspannungen entstehen. Diese Schaltung ist übrigens bekannt [5]) und für allerlei Zwecke

---

[1]) Behnken, Jaeckel und Kutzner, ZS. f. Phys. **20**, 188, 1923.

[2]) Hess und Lawson, Wien. Ber. **125** [2a], 1916 (Mitt. Ra.-Inst. Nr. 94).

[3]) Herweg und Mie, Ann. d. Phys. **68**, 120, 1922; E. Hoepner, Ann. d. Phys. **46**, 577, 1915.

[4]) Den Besitz der Lampen verdanken wir dem Entgegenkommen der Julius Pintsch A.-G.

[5]) Schröter und Vieweg, Arch. f. Elektrot. **12**, 358, 1923.

praktisch angewandt worden. Bei geeigneter Spannung fängt nämlich die Lampe an, periodisch aufzuleuchten. Die Zahl der Zündungen pro Sekunde läßt sich durch Variation von Vorschaltwiderstand, Spannung und Kapazität in weiten Grenzen ändern.

Bei den hier beschriebenen Versuchen wird nun die Spannung so gewählt, daß kein periodisches Zünden erfolgt (bei Ausschluß jeder Strahlung). Dann kann man leicht erreichen, daß bei Nähern eines γ- oder β-Strahlpräparates unregelmäßige Zündungen einsetzen, die offenbar den einzelnen β- oder γ-Strahlen entsprechen. Vermehrt man die Zahl der auftreffenden Strahlen, so steigt entsprechend die Zündzahl bis zu einem Grenzwert, der durch die Schaltung bedingt ist.

Allerdings muß hier bemerkt werden, daß sich die bisher untersuchten Glimmlampen dadurch von der Geigerschen Kammer unterscheiden, daß die Zahl der Zündungen bei konstanter Strahlungsquelle nur in sehr kleinen Spannungsbereichen von der Spannung unabhängig ist. Dies rührt offenbar davon her, daß die elektrische Feldstärke in der vorliegenden Lampenform an verschiedenen Stellen der Lampe etwas verschieden ist. Soll ein β- oder γ-Strahl eine Zündung hervorrufen, so muß er einen Raum durchfliegen, in dem ein gewisser Mindestwert der Feldstärke überschritten wird. Mit wachsender Spannung wächst natürlich die Größe dieses Raumes. Für einwandfreie Zählungen müßte man also eine Lampe konstruieren, in der der Zählraum möglichst wenig von der Spannung abhängt.

Die einzelnen Zündungen kann man natürlich mit dem Auge verfolgen, oder durch ein eingeschaltetes Telephon hörbar machen. Will man große Lautstärken erzielen, z. B. für Demonstrationszwecke, so muß ein Verstärker vorgeschaltet werden. Die Stromstöße in der Lampe lassen sich natürlich auch ohne Verstärkung mit Leichtigkeit registrieren.

Bei den Arbeiten mit der Lampe zeigte sich nun, daß sie nicht nur auf die oben erwähnten Strahlenarten reagiert, sondern auch auf Licht. Man bekommt bei Beleuchtung mit einer konstanten Lichtquelle genau so wie mit β- oder γ-Strahlen unregelmäßiges Aufblitzen, das bei Lichtabschluß sofort aufhört. Das deutet darauf hin, daß man hier das lichtelektrische Auslösen von einzelnen Elektronen nachweisen kann. Erstaunlich ist zunächst, daß die Eisenelektroden der Lampe noch bei Wellenlängen, die von dem Glas der Lampe durchgelassen werden und daher sicher nicht dem kurzwelligen Ultraviolett angehören, lichtelektrische Wirkung zeigen. Es wurde eine angenäherte Bestimmung der wirksamen Wellenlänge mit Beugungsgitter gemacht, wonach dieselbe in der Gegend von 380 mμ liegt. In der Literatur finden

sich Angaben über die obere Grenze der lichtelektrischen Empfindlichkeit des Eisens, die als Grenzwellenlänge 287 mμ angeben. Man sieht hieraus, daß eine wirkliche Grenze gar nicht existiert, sondern nur durch die Empfindlichkeit der Meßanordnung vorgetäuscht wird. Bei dem hier beschriebenen Versuch ist eben die Meßanordnung ganz außerordentlich empfindlich. Im übrigen wäre es vielleicht auch denkbar, daß die starke Gasbeladung der Elektroden die lichtelektrische Wirksamkeit nach dem Sichtbaren hin verschiebt.

Aus diesen Versuchen ergibt sich natürlich, daß bei dem Nachweis von β-, γ- oder Röntgenstrahlen die Lampe gegen Licht vollkommen geschützt sein muß.

Wirkt keine der erwähnten Strahlenarten auf die Lampe ein, so treten trotzdem immer einige wenige spontane Zündungen auf. Dieselben können durch irgendwelche radioaktive Elemente in der Lampe verursacht sein. Man beobachtet dasselbe ja auch häufig bei den sonst gebrauchten Zählkammern.

Es mag noch bemerkt werden, daß Zündungen der Lampe auch durch elektrostatische Einflüsse hervorgerufen werden können, so durch Reiben der Glaswandung oder Nähern elektrisierter Körper.

Untersucht wurden auf ihre Anwendbarkeit bis jetzt zwei Mikrophonlampen, verschiedene normale Beleuchtungsglimmlampen und endlich eine Lampe mit Kaliumfüllung. Dabei zeigte es sich zunächst, daß die Wirksamkeit der Lampe sofort aufhört, wenn ein merkbarer Isolationsfehler zwischen den beiden Elektroden vorhanden ist.

Die Beleuchtungslampen arbeiten im allgemeinen nicht zufriedenstellend, offenbar deswegen, weil die Verteilung der elektrischen Felder allzu ungleichmäßig ist.

Die Kaliumlampe interessiert besonders wegen der lichtelektrischen Wirkung im Sichtbaren. Sie zeigt bei einer Spannung von etwa 80 Volt eine ungeheure Lichtempfindlichkeit, aber die spontanen Zündungen waren viel zu zahlreich, um Messungen anstellen zu können. Es dürfte an dieser Störung wohl auch die Radioaktivität des Kaliums schuld sein.

Quantitative Messungen konnten bisher nur in geringem Umfang angestellt werden. Geprüft wurde für Licht und γ-Strahlen die Frage, ob die Zahl der Zündungen der Intensität der gemessenen Strahlung entspricht. Die Intensitätsänderung erfolgte durch Entfernungsänderung, die Registrierung photographisch. Bei γ-Strahlen waren die Resultate, wie zu erwarten war, nicht befriedigend. Wie Hess und Lawson gezeigt haben, ist der Grund hierfür die ungeheuer starke Streustrahlung.

Für Licht dagegen ergaben sich befriedigende Werte, so daß man behaupten kann, daß die Zahl der Zündungen in der Zeiteinheit proportional der Intensität des Lichtes ist. Natürlich darf man mit der Zahl der Zündungen nicht beliebig hinaufgehen, da sonst sehr schnell aufeinanderfolgende Stromstöße infolge der mechanischen Trägheit des Registrierinstrumentes und der elektrischen des Lampenkreises nicht mehr getrennt werden können.

Genauere Resultate können erst weitere Versuche ergeben, die in Vorbereitung sind.

Die Berechnung des normalen Kathodenfalles in Gasgemischen.

Von **A. Günther-Schulze** in Charlottenburg.

Mit sechs Abbildungen. (Eingegangen am 28. November 1923.)

Im letzten Sommer habe ich Versuche über den normalen Kathodenfall in Gasgemischen [1]) veröffentlicht. Ferner habe ich vor kurzem [2]) einige Gesetzmäßigkeiten des normalen Kathodenfalles in reinen Gasen abgeleitet. Im folgenden ist der Versuch gemacht, mit Hilfe dieser Gesetzmäßigkeiten den seinerzeit gemessenen normalen Kathodenfall in Gasgemischen zu berechnen.

Es seien zwei Gase 1 und 2 gemischt und

V_{i_1}, V_{i_2} die Ionisierungsspannungen,
V_1, V_2 die normalen Kathodenfälle,
λ_1, λ_2 die mittleren freien Weglängen der Gasatome bei Atmosphärendruck und 0° C,
n_1, n_2 die von einem von der Kathode ausgehenden Primärelektron mit Hilfe der Kathodenfälle V_1, V_2 erzeugten Kationen,
β_1, β_2 die mittlere Ionisierungsausbeute der Elektronenstöße, das heißt, die Anzahl der von einem von der Kathode ausgehenden Primärelektron mit Hilfe des Kathodenfalles erzeugten Ionenpaare n_1, n_2, geteilt durch die Anzahl der Zusammenstöße N (oder Durchquerungen),
x der Bruchteil des Gases 1,
$1 - x$ der Bruchteil des Gases 2,
V_m der normale Kathodenfall des Gasgemisches.

Der Gasdruck sei während der Versuche konstant und der Einfachheit halber gleich 1 gesetzt.

I. Gemisch zweier einatomiger Gase. Zusammenstöße zwischen Elektronen und Atomen, von Ionisierung und Anregung abgesehen, elastisch.

Ein Primärelektron erleidet insgesamt N Zusammenstöße (oder Durchquerungen) bis es seine Kathodenfallenergie abgegeben hat. Die Zusammenstöße verteilen sich auf die beiden Gase im Verhältnis

---

[1]) ZS. f. Elektrochem. **29**, 370, 1923.
[2]) ZS. f. Phys. **20**, 1, 1923.

1. ihres Partialdruckes, 2. ihrer reziproken freien Weglängen. Das Elektron erleidet also mit den Atomen des Gases 1 die Zusammenstöße

$$N_1 = \frac{x \cdot N \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{1}$$

und mit denen des Gases 2

$$N_2 = \frac{(1-x)\, N \lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}. \tag{1a}$$

Die Zahl der Ionisierungen ist dann

$$\frac{x N \lambda_2 \beta_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad \text{und} \quad \frac{(1-x) N \lambda_1 \beta_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Bei jeder Ionisierung wird die Spannung V_{i_1} oder V_{i_2} verbraucht (bei Vernachlässigung höherer Ionisationsstufen).

Also wird

$$V_m = \frac{N}{\lambda_1 + \lambda_2} [x \lambda_2 \beta_1 V_{i_1} + (1-x) \lambda_1 \beta_2 V_{i_2}]. \tag{2}$$

In dem Gase 1 sind n_1 Kationen nötig [1]), um an der Kathode ein Elektron zu erzeugen, denn ein Elektron erzeugt n_1 Kationen, und der Prozeß erhält sich selbsttätig aufrecht. Die mittlere Ionisierungsfähigkeit eines Kations 1 beim Kathodenfall V_1 ist also $1 : n_1$.

In der Mischung besteht aber der Kathodenfall $V_m \geqq V_1$. Es ist also eine Annahme darüber erforderlich, wie sich die Ionisierungsfähigkeit der Kationen mit der durchlaufenen Spannung ändert. Denn Messungen liegen darüber noch nicht vor. Es sei die einfachste Annahme gewählt:

Die Ionisierungsfähigkeit der Kationen ist der Größe des durchlaufenen Kathodenfalles proportional.

Dann wird die Ionisierungsfähigkeit der Kationen 1 und 2 beim Kathodenfall V_m

$$\frac{1}{n_1} \frac{V_m}{V_1} \quad \text{und} \quad \frac{1}{n_2} \frac{V_m}{V_2}.$$

Das Produkt aus der Zahl der Ionen und ihrer Ionisierungsfähigkeit ergibt die Zahl der erzeugten Elektronen, die nach den eingeführten Voraussetzungen gleich Eins ist. Es wird also

$$\frac{V_m N}{\lambda_1 + \lambda_2} \left[\frac{x \beta_1 \lambda_2}{n_1 V_1} + \frac{(1-x) \beta_2 \lambda_1}{n_2 V_2} \right] = 1. \tag{3}$$

Nun ist $n_1 = \frac{V_1}{V_{i_1}}$, $n_2 = \frac{V_1}{V_{i_2}}$.

Ferner folgt aus (3):

$$N = \frac{V_m (\lambda_1 + \lambda_2)}{x \beta_1 \lambda_2 V_{i_1} + (1-x) \beta_2 \lambda_1 V_{i_2}}.$$

[1]) ZS. f. Phys. **20**, 153, 1923.

Wird dieses in (2) eingesetzt, so ergibt sich nach einer einfachen Umformung

$$V_m^2 = \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \frac{1-x}{x}\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{V_{i_2}}{V_{i_1}}}{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{1}{V_1^2} + \frac{1-x}{x}\frac{\beta_2}{\beta_1}\frac{V_{i_2}}{V_{i_1}}\frac{1}{V_1^2}}. \qquad (4)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung sind sämtliche Werte bis auf das Verhältnis β_2/β_1 bekannt. Für β_1 und β_2 liegen leider noch keine Messungen bei dem hier in Frage kommenden Elektronengeschwindigkeitsintervall von Null bis etwa 400 Volt vor. Bekannt ist nur, daß die β-Werte etwa zwischen 0,1 und 1 liegen und im allgemeinen mit zunehmender Masse der Atome zunehmen.

Unter diesen Umständen läuft die Anwendung der Gleichung (4) auf die Frage hinaus, ob sich für das Verhältnis β_2/β_1 wahrscheinliche Werte finden lassen, mit deren Hilfe sich die experimentell gefundene Abhängigkeit des Kathodenfalls V_m von dem Mischungsverhältnis der beiden Gase 1 und 2 über den ganzen Mischungsbereich hin durch Gleichung (4) befriedigend darstellen läßt.

Das ist nun für einatomige Gase, soweit bisher Messungen von V_m vorliegen, in der Tat der Fall.

Tabelle 1. Normaler Kathodenfall in Hg-Ar-Gemischen an einer Graphitkathode.

$\lambda_1 = 360 \cdot 10^{-8}$, $V_1 = 452$ Volt, $V_{i_1} = 10{,}4$ Volt, $\beta_2 = 0{,}233$.
$\lambda_2 = 635 \cdot 10^{-8}$, $V_2 = 158$ „ $V_{i_2} = 15{,}5$ „ β_1

Gehalt des Gemisches an Argon Proz.	V_m gemessen Volt	V_m berechnet Volt	Differenz Proz.	Gehalt des Gemisches an Argon Proz.	V_m gemessen Volt	V_m berechnet Volt	Differenz Proz.
0	452	452	—	69,4	247	252,0	+ 2,02
12,4	416	412,8	— 0,77	82,6	211	213,7	+ 1,28
19,0	399	394,0	— 1,25	92,7	181	182,4	+ 0,78
42,1	326	328,3	+ 0,71	100	158	158	—
57,7	282	285,3	+ 1,17			Mittel	1,00

Tabelle 1 enthält das gemessene [1]) und das berechnete V_m für Hg–Ar-Gemische bei Verwendung einer Graphitkathode. In diesem Falle beträgt die mittlere Abweichung zwischen Beobachtung und Rechnung 1,0 Proz., wenn $\frac{\beta_2}{\beta_1} = 0{,}233$ gesetzt wird. Das würde bedeuten, daß die mittlere Ionisierungsausbeute beim Hg-Atom (wegen dessen viel größerer Masse) etwa viermal so groß ist wie die des Ar.

[1]) ZS. f. Elektrochem. **29**, 370, 1923.

Ferner habe ich zur Prüfung der Gleichung (4) das Gemisch Ar–He mit einer Eisenkathode untersucht. Die Versuche ergaben ein vom Mischungsverhältnis unabhängiges $V_m = 161$ Volt. Das gleiche ergibt Gleichung (4) für beliebige Werte des Verhältnisses β_2/β_1.

Für einatomige Gase gibt also Gleichung (4) befriedigende Werte, soweit bisher Messungen vorliegen.

II. Gemisch von Edelgasen und mehratomigen Gasen. Sobald mehratomige Gase in Frage kommen, empfiehlt es sich, zwischen Edelgasen und sonstigen einatomigen Gasen zu unterscheiden. Die Zusammenstöße mit Elektronen erfolgen zwar in beiden Gruppen elastisch, im chemischen Verhalten trennt man jedoch die Edelgase als verbindungsunfähig scharf von den sonstigen verbindungsfähigen einatomigen Gasen oder Metalldämpfen. Wieweit diese Trennung berechtigt ist, wird sich alsbald zeigen.

Zusammenstöße der Elektronen mit mehratomigen Gasen verlaufen, auch von Ionisierung und Anregung abgesehen, nicht völlig elastisch, sondern nach der herrschenden Anschauung verlieren die Elektronen darüber hinaus noch im Mittel bei jedem Stoß einen bestimmten Bruchteil ihrer Energie. Infolgedessen muß zur Erzielung einer gegebenen Kationenmenge durch ein Primärelektron diesem ein höherer Kathodenfall zur Verfügung gestellt werden, als wenn die Stöße elastisch verliefen.

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich vorläufige Werte für die Koeffizienten α angegeben, um die der Kathodenfall durch die Stoßverluste erhöht wird. Sind diese Stoßverlustkoeffizienten für das Gas 1 α_1 und für das Gas 2 α_2, so ergibt eine der früheren ganz analoge Betrachtung die Gleichung

$$V_m^2 = \frac{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1} + \dfrac{1-x}{x}\dfrac{\beta_2}{\beta_1}\dfrac{V_{i_2}}{V_{i_1}}\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}{\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1}\dfrac{1}{V_1^2} + \dfrac{1-x}{x}\dfrac{\beta_2}{\beta_1}\dfrac{V_{i_2}}{V_{i_2}}\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}\dfrac{1}{V_2^2}}. \qquad (5)$$

Diese Gleichung (5) gilt für Gemische beliebiger Gase.

Ist die eine Komponente ein Edelgas, so ist das zugehörige α gleich Eins zu setzen.

Die Anwendung der Gleichung (5) auf die Gemische Ar–O, und das zur Prüfung der Gleichung (5) neuerdings untersuchte Gemisch O–He ist in den Fig. 1 und 2 dargestellt. Dabei sind der Rechnung folgende Werte zugrundegelegt worden:

[1]) l. c

	Ar	He	O
λ	$635 \cdot 10^{-8}$ cm	$1800 \cdot 10^{-8}$ cm	$647 \cdot 10^{-8}$ cm
V_i	15,5 Volt	25,4 Volt	14,0 Volt
α	1,00	1,00	2,97
V	158 Volt (an C)	161 Volt (an Fe)	356 Volt an Fe 371 „ „ C
	β_2/β_1 Ar–O : 2,00	β_2/β_1 He–O : 2,00	

Beide Figuren zeigen, daß Gleichung (5) die Messungen insofern wiedergibt, als die berechnete Mischungskurve ebenso wie die gemessene oberhalb der V_1 und V_2 verbindenden Geraden (punktiert, mit der Gleichung $V_m = x \cdot V_1 + (1-x)\, V_2$] liegt, daß aber die gemessenen Kurven sich in beiden Fällen unzweideutig über die berechneten erheben. Diese charakteristische Erhebung wird im folgenden der „Buckel“ genannt werden.

Wird für das Gemisch Ar–O $\frac{\beta_2}{\beta_1} = 3{,}00$ angesetzt, so berechnet sich die gestrichelte Kurve der Fig. 1. Die mittlere Abweichung

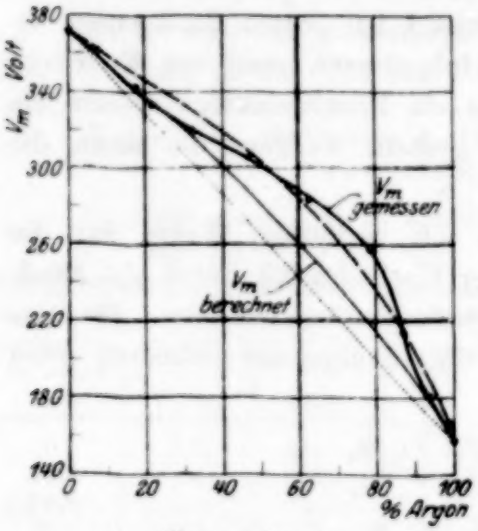


Fig. 1. Ar–O.

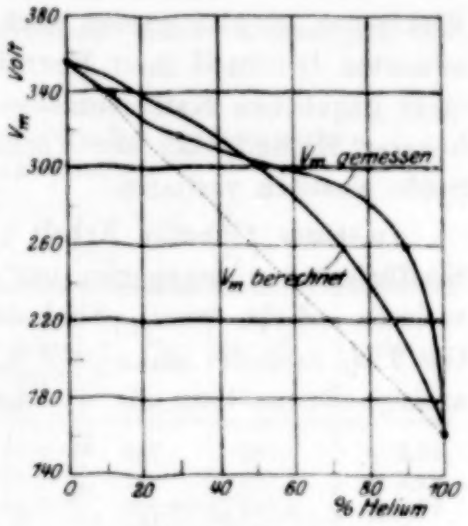


Fig. 2. He–O.

zwischen Beobachtung und Rechnung beträgt dann nur noch 2,2 Proz. Trotzdem scheint mir diese Änderung keine Verbesserung, sondern eine Verschleierung zu sein. Denn erstens ist der Wert $\frac{\beta_2}{\beta_1} = 3{,}00$ schon reichlich gezwungen. Zweitens aber vermag die gestrichelte Kurve den charakteristischen Buckel mit der doppelten Krümmung der Meßkurve in keiner Weise darzustellen. Es ist mit Hilfe der Gleichung (5) überhaupt nicht möglich, Kurven mit einem Buckel zu erzielen.

Um so wichtiger ist die Analyse dieses Buckels. Sie gelingt mit Hilfe der Erscheinungen in Gemischen verbindungsfähiger Gase.

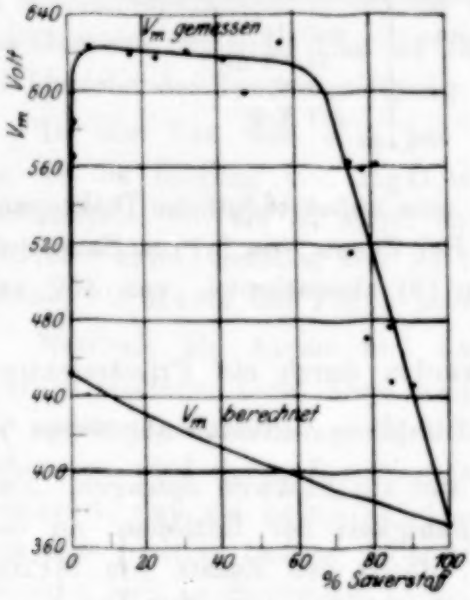


Fig. 3. Hg—O.

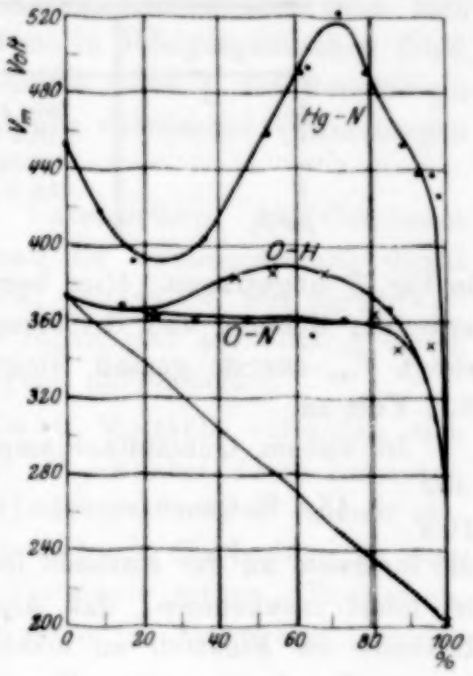


Fig. 4.

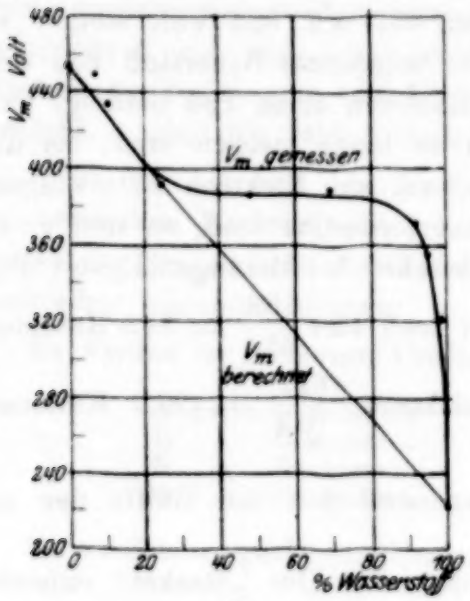


Fig. 5.

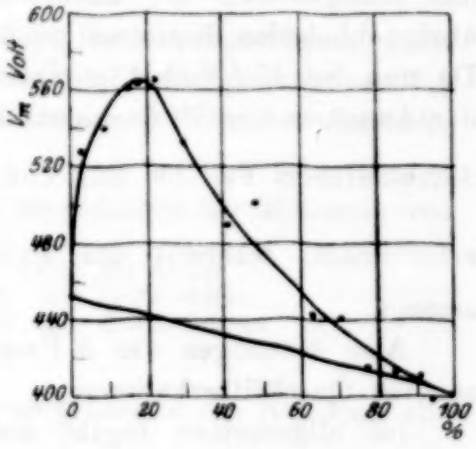


Fig. 6.

III. Gemische verbindungsfähiger Gase (Metalldämpfe und mehratomige Gase). Die Fig. 3 bis 6 enthalten die Messungen von V_m in Gemischen verbindungsfähiger Gase. Sie zeigen den aus Fig. 1 und 2 bereits bekannten Buckel sehr stark ausgeprägt. Am

wenigsten bei Hg–H, am stärksten bei Hg–O. Für dieses ist die Kurve nach Gleichung (5) mit den Werten:

	Hg	O
λ	$360 \cdot 10^{-8}$ cm	$647 \cdot 10^{-8}$ cm
V_i	10,4 Volt	14,0 Volt
a	1,00	2,97
V	452 Volt	371 Volt
β_2/β_1	0,468	

in Fig. 3 eingetragen. Hier besteht eine außerordentliche Diskrepanz zwischen Messung und Rechnung. Bei Zusatz von 5 Proz. Sauerstoff steigt V_m, anstatt gemäß Gleichung (5) abzunehmen, von 452 auf 622 Volt an.

In reinem Quecksilberdampf werden durch ein Primärelektron $\frac{452}{10{,}4} = 43{,}4$ Kationen erzeugt [von Strahlungsverlusten abgesehen [1])], die ihrerseits an der Kathode im Mittel ein Elektron erzeugen. Nun ist nicht anzunehmen, daß diese Fähigkeit der Kationen, an der Kathode ein Elektron zu erzeugen, durch den Zusatz von 5 Proz. Sauerstoff geändert wird. Denn ihre Ionisierungsfähigkeit hängt von ihrer Geschwindigkeit und dem Material der Kathode ab. Wenn also trotzdem der Kathodenfall von 452 auf 622 Volt steigt, so zwingt das zu dem Schluß, daß der zugesetzte Sauerstoff von den vom Primärelektron erzeugten 43,4 Kationen einen Teil beseitigt und daß infolgedessen der Kathodenfall so lange steigen muß, bis die übriggebliebenen Kationen genügen, um ein Elektron zu erzeugen. Da nun bei 452 Volt 43,4 Kationen erforderlich sind, so sind unter der Annahme der Proportionalität zwischen Ionisierungsfähigkeit und durchlaufenem Fall bei 622 Volt nur noch $43{,}4\,\frac{452}{622} = 31{,}5$ Kationen erforderlich, während das Primärelektron $\frac{622}{10{,}4} = 59{,}9$ Kationen erzeugt.

Also beseitigen die 5 Proz. Sauerstoff fast die Hälfte der erzeugten Quecksilberkationen.

Im allgemeinen ergibt sich hiernach: Der „Buckel“ entsteht dadurch, daß die Kationen der einen Gasart durch die Moleküle (oder Atome) der anderen zum Teil beseitigt werden. Je höher der Buckel, um so stärker ist diese Beseitigung. Liegt der Buckel einseitig, wie bei O–N, O–H, Hg–N usw., so ist diese Kationen-

[1]) l. c.

beseitigung eine einseitige, erstreckt er sich nach beiden Seiten, wie bei Hg–O, so ist die Kationenbeseitigung eine gegenseitige.

Über den Mechanismus dieser Kationenbeseitigung kann kein Zweifel bestehen. Der Umstand, daß sie in Edelgasgemischen fehlt, in verbindungsfähigen Gasen um so stärker wirkt, je reaktionsfähiger das Gemisch ist, weist klar auf die Bildung chemischer Verbindungen als Ursache der Ionenbeseitigung hin.

In der Tat läßt sich bei der Untersuchung des Gemisches Hg–O die Bildung von HgO während der Glimmentladung direkt beobachten. Ja, sie ist sogar so stark, daß es mir nur durch Verwendung eines Gefäßes von 34 Liter Inhalt und schnelles Arbeiten gelang, die Kurve der Fig. 3 befriedigend aufzunehmen.

Neutrale Hg-Atome und neutrale O_2-Moleküle verbinden sich zwar in Gasform nicht ohne weiteres. Wenn aber durch Ionenstoß aus einem O_2-Molekül ein O_2^+-Molekül oder gar zwei O^+-Atome entstehen, so wird deren Reaktionsfähigkeit durch die Ladung so weit gesteigert, daß sie heftig auf Quecksilberatome wirken. Ebenso erzeugt die positive Ladung eines Hg^+-Kations in diesem eine lebhafte Tendenz, sich an Sauerstoff anzulagern.

Aus welchem Grunde nun die entstandenen HgO^+-Ionen für den Ionisierungsvorgang an der Kathode ausscheiden, ob dadurch, daß sie Elektronen fangen und sich neutralisieren, oder ob ihre Ionisierungsfähigkeit zur Ionisierung mit Hilfe des Kathodenfalls V_m nicht mehr ausreicht, möchte ich dahingestellt sein lassen.

Über die Art und den Umfang der Kationenbeseitigung (oder der chemischen Reaktion) kann man aus den bisher gemessenen V_m-Werten der Gasgemische auf Grund der Lage und Höhe des „Buckels“ unmittelbar folgendes ablesen:

Es werden in größerem Umfange eingefangen die Kationen von

N	durch	O-Moleküle	H	durch	Hg-Atome
H	„	O-Moleküle	Hg	„	O-Moleküle
N	„	Hg-Atome	Hg	„	CO-Moleküle
O	„	Hg-Atome			

Es werden in geringem Umfange eingefangen die Kationen von

O	durch	N-Moleküle
O	„	H-Moleküle
CO	„	Hg-Atome

Es werden nicht eingefangen die Kationen von

Hg	durch	N-Moleküle
Hg	„	H-Moleküle

Das alles dürfte mit den chemischen Eigenschaften der Gase unter Berücksichtigung der erhöhten Reaktionsfähigkeit des Ionenzustandes im Einklang stehen.

Es ist zu erwarten, daß sich mit Hilfe geeigneter Annahmen über den Ionenfang die Gleichung (5) derart erweitern läßt, daß sie auch das V_m der Fig. 3 bis 6 zu berechnen gestattet. Ich möchte jedoch vorläufig davon absehen.

Dagegen verlohnt sich ein nochmaliges Betrachten der Fig. 1 und 2. In Argon–Sauerstoffgemischen zeigt sich ein nicht sehr großer, aber immerhin deutlicher, in Helium–Sauerstoffgemischen ein recht ausgeprägter Buckel. Nach dem eben Dargelegten heißt das: Argon-Ionen werden in geringem, Helium-Ionen in beträchtlichem Umfange durch Sauerstoff-Moleküle eingefangen. Helium- und Argon-Ionen verbinden sich mit Sauerstoff!

Trotz des klaren experimentellen Befundes der Fig. 1 und 2 hätte ich es nicht gewagt, an dem Dogma von der absoluten Verbindungsunfähigkeit dieser beiden Edelgase zu rütteln, wenn nicht glücklicherweise bereits eine Untersuchung von Franck und Knipping[1]) vorläge, in der diese beiden Forscher bezüglich des Heliums auf Grund ganz anderer Versuche, nämlich der Messung der Ionisierungsspannungen zu einem ähnlichen Schlusse gelangen. Sie finden nämlich, daß die im normalen Zustande gekreuzten Elektronenbahnen des Heliums durch Elektronenstöße in komplanare Bahnen übergehen, die metastabil sind. Das Heliumatom wird dadurch alkaliähnlich und fähig, sich zu verbinden. Es vermag He_2-Moleküle und auch z. B. mit Sauerstoff Verbindungen zu bilden, die jedoch nach Franck und Knipping unter Emission ultravioletter Strahlung sehr bald wieder zerfallen.

Verbindung des Heliums bedeutet aber Abgabe des einen Elektrons und Bildung eines He^+-Ions. Nun sind bei den hier beschriebenen Versuchen nicht nur Elektronenstöße wirksam, die Heliumatome mit komplanaren Bahnen erzeugen, sondern es werden direkt He^+-Ionen erzeugt und es ist nicht einzusehen, weshalb solche He^+-Ionen nicht imstande sein sollen, sich an andere Moleküle oder Atome anzulagern.

Demnach ist die hier behauptete Verbindung der Edelgase mit Sauerstoff nichts Neues, sondern eine Stütze der Folgerungen von Franck und Knipping. Doch gehen meine Versuche insofern darüber hinaus, als sie diese Verbindung auch für Argon und Sauer-

---

[1]) J. Franck und P. Knipping, Über die Anregungsspannungen des Heliums. ZS. f. Phys. 1, 320, 1920.

stoff wahrscheinlich machen. Das in seinen Eigenschaften zwischen Helium und Argon stehende Neon wird die Erscheinung vermutlich ebenfalls zeigen. Es stand mir leider nicht in hinreichender Menge zur Verfügung.

Das Helium, das ich zu den Versuchen verwandte, wurde mir in freigebigster Weise von den Herren Skaupy und Ewest überlassen und ich möchte ihnen dafür auch an dieser Stelle meinen besten Dank sagen.

Zusammenfassung.

1. Es wird eine Gleichung abgeleitet, mit deren Hilfe sich der normale Kathodenfall V_m in dem Gemisch zweier Gase 1 und 2 aus dem Verhältnis $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ der freien Weglängen, $\frac{V_{i2}}{V_{i1}}$ der Ionisierungsspannungen, $\frac{\beta_2}{\beta_1}$ der Ionisierungsausbeuten, $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ der Stoßverluste, den beiden Kathodenfällen V_1 und V_2, sowie dem Mischungsverhältnis berechnen läßt.

2. Die mit Hilfe dieser Gleichung berechneten Werte von V_m stimmen für Gemische einatomiger Gase mit den Messungen über das ganze Mischungsbereich hin gut überein.

3. Bestehen eine oder beide Komponenten des Gemisches aus verbindungsfähigen Gasen (Metalldämpfen oder mehratomigen Gasen), so besitzt die gemessene V_m-Kurve einen sich über die berechnete Kurve erhebenden „Buckel", der um so höher ist, je größer die Reaktionsfähigkeit der Komponenten unter Berücksichtigung der reaktionssteigernden Wirkung der Ionisierung ist.

4. Demgemäß wird der Buckel auf die Beseitigung der im Glimmlicht von den Primärelektronen gebildeten Kationen durch Bildung chemischer Verbindungen zurückgeführt.

5. Da sich der Buckel auch in geringem Maße bei Gemischen von Ar—O und in beträchtlichem Maße in He—O zeigt, wird angenommen, daß sich in diesen Gemischen infolge der Ionisierung ebenfalls Sauerstoffverbindungen von He und Ar bilden.

6. Diese Annahme findet für He eine Stütze in einer Untersuchung von Franck und Knipping über die Ionisierungsspannungen des Heliums, in der ebenfalls gezeigt wird, daß sich unter der Wirkung von Elektronenstößen eine reaktionsfähige metastabile Heliummodifikation zu bilden vermag.

Autokollimations-Monochromator, mit Wellenlängentrommel für das sichtbare und U.-V.-Gebiet, von 200 mμ bis 800 mμ.

Von **Carl Leiss** in Berlin-Steglitz.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 4. Dezember 1923.)

Der immer mehr fühlbar werdende Mangel an größeren Stücken optisch reinen Quarzes und der phantastisch hohe Preis dieses Stoffes zwingt uns, über konstruktive Umgestaltungen derjenigen Apparate nachzudenken, die größere Teile aus diesem Material enthalten. Bei den bisherigen U.-V.-Monochromatoren [1]) mit konstanter Ablenkung von 90° verwendet man allgemein das bekannte Straubelsche Quarzdoppelprisma, das man sich aus zwei Prismen von je 30° und einem totalreflektierenden Prisma bestehend zu denken hat. Stücke optisch reinen Quarzes in den Dimensionen, wie sie ein solches Prisma für eine Objektivöffnung von 30 mm erfordert, sind außerordentlich schwer zu beschaffen. Mit noch weniger Quarz kommt man aus, wenn man zwei Prismen von je 30° nimmt und an Stelle des reflektierenden Prismas einen Metallspiegel, wie das schon häufiger von mir geschehen ist, bringt.

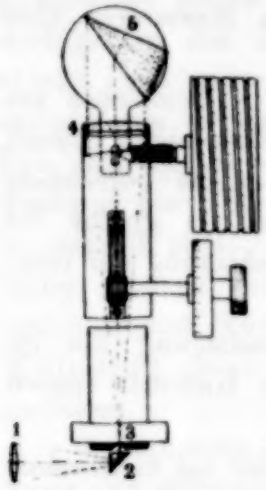


Fig. 1. Horizontalschnitt durch den Autokollimations-Monochromator.

Am wenigsten Material wird erforderlich, wenn man die Anordnung so trifft, wie sie aus Fig. 1 im Horizontalschnitt und aus Fig. 2 in der Ansicht ersichtlich ist. Hier genügt dazu — ohne irgend einen Nachteil für den Apparat — ein Prisma von 30°, ein Objektiv und ein Spalt. Das Licht einer seitlich der Quarzbeleuchtungslinse 1 aufgestellten Lichtquelle geht nach seinem Durchgang durch das totalreflektierende Prisma 2 aus Quarz durch den Spalt 3 und das Quarzobjektiv 4. Aus diesem tritt es parallel in das Quarzprisma 5 ein, wird an dessen hinterer versilberter Fläche reflektiert und gelangt auf gleichem Wege wieder in die untere Hälfte des symmetrischen Spaltes 3. Von hier ab können nun die durch den Spalt herausgegriffenen homogenen Spektralbezirke

[1]) C. Leiss, ZS. f. Instrkde. **32**, 292, 1912; ebenda **41**, 248, 1921; Derselbe, ZS. f. techn. Phys. **2**, 280, 1922.

durch eine Linse als paralleles oder konvergentes Bündel weiter geleitet werden.

Die optische Achse steht auf der versilberten Fläche des Prismas 5 senkrecht. Eine Verdoppelung der Spektrallinien kann nicht eintreten. Es ist auch gleich, ob das Prisma aus Links- oder Rechtsquarz geschnitten ist. Durch die Spiegelung an der Rückfläche wird die Drehung wieder aufgehoben.

Die Bewegung des Prismas erfolgt durch eine Schraube mit Spiralnuttrommel T_1 (Fig. 2) von 8 cm Durchmesser, auf welcher, wie bei den früheren Apparaten, eine Wellenlängeneinteilung angebracht ist.

Soll der Apparat nur zu Untersuchungen im Ultraviolett dienen, dann umfaßt die Trommel das Gebiet von 200 mμ bis 500 mμ. Wenn

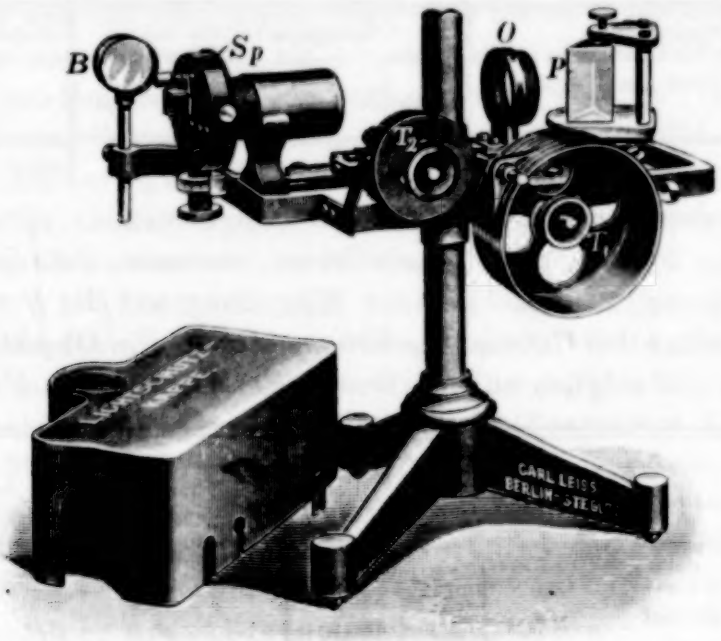


Fig. 2. Autokollimations-Monochromator.

hingegen der Apparat auch für das sichtbare Gebiet benutzt werden soll, dann wird ein zweites gegen das Quarzprisma auswechselbare Flintprisma (schweres Flint) beigegeben und die Trommel ist von 200 mμ bis 800 mμ geteilt. Beim Übergang von einem zum andern Gebiet wird die Mutter der Meßschraube eine Wenigkeit bis zu einem Anschlag verschoben. Die Einteilung von 200 mμ bis 400 mμ gilt dann für das Ultraviolett und von 400 mμ bis 800 mμ für das sichtbare Gebiet.

Zur Fokussierung des Objektivs für die verschiedenen Lichtarten wird das Objektiv durch Zahn und Trieb verschoben. Auf der Triebwelle sitzt die mit Wellenlängenteilung versehene Trommel T_2. Der Spalt *Sp* ist symmetrisch und mit Teiltrommel für 0,05 mm

pro Intervall versehen. Der Hauptkörper des Spaltes ist nach einem Einheitsmaß rund gehalten und mit zwei Klemmschrauben versehen, um Röhren mit Linsen, Farbfilter, Küvetten usw. aufstecken zu können.

Für den lichtdichten Abschluß dient ein über den Apparat zu setzender Blechkasten, der durch einige Schrauben gehalten wird. Der Apparat kann innerhalb ziemlich großer Grenzen an einer Stange hoch und tief gestellt werden.

Zwischen Beleuchtungslinse und Spalt kann an den Träger der Beleuchtungslinse ein verstellbares Tischchen zum Aufsetzen von Küvetten usw. angeschraubt werden.

Die wissenswerten optischen Daten sind aus folgenden beiden Zahlentafeln ersichtlich:

Objektiv bei			Öffnungsverhältnis bei			Dispersion zwischen	
800 mμ mm	500 mμ mm	200 mμ mm	800 mμ	500 mμ	200 mμ	C-F	500 u. 200 mμ
163	160	135	1:5,26	1:5,2	1:4,5	$3^0 25'$	$9^0 45'$

Die nutzbare Objektivöffnung beträgt 30 mm, die Länge der brechenden Flächen der Prismen ist so bemessen, daß die Objektive voll ausgenutzt werden. Bei der Einstellung auf die weniger brechbaren Strahlen bei 700 mμ bis 800 mμ stehen die Objektive so nahe wie technisch möglich an den brechenden Flächen des Prismas.

Spektralbezirk			Ausschnitt aus dem Spektrum bei einer Öffnung des Austrittsspaltes von 0,3 mm in mμ (etwa)
Sichtbares Gebiet	C =	656,3	7,8
	D =	589,3	6,0
	F =	486,1	3,0
	G =	434,1	1,8
Ultraviolett	Hg =	404,6	17,0
		365,0	9,0
		312,5	5,5
		253,6	3,0
	Cd =	214,0	1,0

Man ersieht aus diesen beiden Zahlentafeln, daß die optische Leistung dieses Apparates genau dieselbe wie die der Apparate ist, die ich früher [1]) beschrieben habe.

Eine photographische Kamera, wie bei den bisher gebräuchlichen Apparaten mit Eintritts- und Austrittsrohr läßt sich bei dieser Konstruktion nicht gut anbringen.

[1]) ZS. f. Phys. **9**, 203—206, 1922.

Über ein Feld inhomogener Strahlung.

Von **Walter Wessel** in Göttingen.

(Eingegangen am 2. Dezember 1923.)

Es ist bekannt, daß in einem von elektromagnetischer Strahlung erfüllten, im Strahlungsgleichgewichte befindlichen Medium eine vorhandene Dispersion sich gar nicht äußert, da jeder Strahl „was er durch Zerstreuung an Energie verliert, durch Zerstreuung anderer Strahlen gewinnt“ und „die von allen Seiten auf ein Volumenelement auffallende und von dort wieder nach allen Seiten zerstreute Strahlung sich genau ebenso verhält, als ob sie ohne jede Modifikation durch das Volumenelement direkt hindurchgegangen wäre“ [1]). Ähnlich vermag u. U. das Zusammenwirken von Absorption und Emission in Fällen inhomogener Strahlung ein durch Absorption bewirktes, exponentielles Abklingungsgesetz durch die Emission wieder in ein gewöhnlich quadratisches zu verwandeln.

Wir behaupten: In einem homogenen und unbegrenzten, absorbierenden und emittierenden Medium nimmt im stationären Strahlungsgleichgewichte die Intensität der von einer punktförmigen Lichtquelle ausgehenden Strahlung in hinreichendem Abstande von ihr trotz der Absorption nur quadratisch mit der Entfernung ab, und zwar erfolgt die Annäherung an dieses asymptotische Gesetz um so schneller, je stärker die Absorption ist.

Der Beweis des aus energetischen Gründen rein physikalisch vorauszusehenden Satzes beruht auf der Lösung einer von D. Hilbert zur strengeren Begründung der Kirchhoffschen Sätze aufgestellten Integralgleichung [2]). Sie ist eine solche für den Emissionskoeffizienten (ε_ν), der sich daraus als Funktion des Ortes bestimmen läßt und aus dem sich die Strahlungsintensität ($\Re_\nu$) durch eine Quadratur ergibt. Die Integralgleichung lautet in der Form von Jaffé [3]):

$$\varepsilon_\nu = \frac{\alpha_\nu}{4\pi}\int_v \frac{e^{-\alpha_\nu r_{12}}}{r_{12}^2}\,\varepsilon_\nu(x_1 y_1 z_1)\,dv_1 + \frac{\alpha_\nu}{4\pi}\int_f \frac{e^{-\alpha_\nu r_{12}}}{r_{12}^2}\,\Re_\nu(x_1 y_1 z_1)\cos(Nr)\,df_1. \quad (1)$$

[1]) M. Planck, Wärmestrahlung, 4. Aufl. 1921, § 28 Schluß.
[2]) D. Hilbert, Phys. ZS. **13**, 1026, 1912.
[3]) G. Jaffé, Ann. d. Phys. **68**, 616, 1922.

α_ν ist der Absorptionskoeffizient, r_{12} die Entfernung vom Aufpunkt x, y, z zum Integrationselement x_1, y_1, z_1, also

$$r_{12} = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2}. \tag{2}$$

Die Integration ist im ersten Gliede über den ganzen mit Strahlung erfüllten Raum zu erstrecken, im zweiten über die Oberfläche einer kleinen, die Strahlungsquelle umschließenden Kugel; $\bar{\mathfrak{K}}_\nu$ ist die Intensität daselbst, N die Normale.

Wir führen Polarkoordinaten r, ϑ, φ ein mit der Lichtquelle als Zentrum, setzen also

$$r_{12} = \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 (\sin\vartheta \sin\vartheta_1 \cos(\varphi - \varphi_1) + \cos\vartheta \cos\vartheta_1)}, \quad \bar{\mathfrak{K}}_\nu = \frac{1}{r_1^2}$$

und gewinnen, indem wir die kleine Kugel auf den Pol zusammenziehen, also dort $r_{12} = r$ setzen,

$$\varepsilon_\nu(r,\vartheta,\varphi) = \frac{\alpha_\nu}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha_\nu r_{12}}}{r_{12}^2} \varepsilon_\nu(r_1,\vartheta_1,\varphi_1) r_1^2 \, dr_1 \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \, d\varphi_1 + \alpha_\nu \frac{e^{-\alpha_\nu r}}{r^2} \cdot \tag{1a}$$

Es kann noch wegen der Kugelsymmetrie $\vartheta = 0$ gesetzt werden, wodurch r_{12} sich vereinfacht.

Wir behaupten, daß die Integralgleichung (1a), wenigstens für so große r, daß

$$\alpha_\nu r \gg 1, \tag{3}$$

die Lösung

$$\varepsilon_\nu = \frac{C}{r^2} \tag{4}$$

besitzt, wo C eine Konstante; daß also die nach Einsetzung von (4) in (1a) (und nach einer Integration über φ_1) sich ergebende Formel

$$\frac{2}{\alpha_\nu r^2} = \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha_\nu \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\vartheta_1}}}{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\vartheta_1} \, dr_1 \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1 \tag{5}$$

für hinreichend [Formel (3)] große Werte von r in r identisch erfüllt ist. — Wir betrachten dazu das Integral

$$J(r,\alpha_\nu) = \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha_\nu \sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\vartheta_1}}}{\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos\vartheta_1}} \, dr_1 \sin\vartheta_1 \, d\vartheta_1,$$

das sich nach ϑ_1 integrieren läßt:

$$J(r,\alpha_\nu) = -\int_0^{\infty} \frac{dr_1}{\alpha_\nu r r_1} \left\{ e^{\pm \alpha_\nu (r + r_1)} - e^{\pm \alpha_\nu (r - r_1)} \right\}.$$

Wir zerlegen dasselbe in $\int_0^r + \int_r^x$ und wählen die Vorzeichen im Exponenten so, daß die Integrale konvergieren, also

$$J(r,\alpha_\nu) = -\int_0^r \frac{d r_1}{\alpha_\nu r r_1}\left\{e^{-\alpha_\nu(r+r_1)} - e^{-\alpha_\nu(r-r_1)}\right\}$$

$$-\int_r^\infty \frac{d r_1}{\alpha_\nu r r_1}\left\{e^{-\alpha_\nu(r_1+r)} - e^{-\alpha_\nu(r_1-r)}\right\}$$

oder

$$J(r,\alpha_\nu) = 2\left\{\frac{e^{-\alpha_\nu r}}{\alpha_\nu r}\int_0^r \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha_\nu r_1}{r_1} d r_1 + \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha_\nu r}{\alpha_\nu r}\int_r^\infty \frac{e^{-\alpha_\nu r_1}}{r_1} d r_1\right\}.$$

Indem wir hier die Funktion Integrallogarithmus gemäß der Definition

$$\mathrm{li}(e^x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u}{u} du \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{li}(e^{-x}) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \tag{6}$$

einführen und die Identität[1])

$$\int_0^x \frac{\mathfrak{Sin}\,u}{u} du = \frac{\mathrm{li}(e^x) - \mathrm{li}(e^{-x})}{2} \tag{7}$$

benutzen, erhalten wir

$$J(r,\alpha_\nu) = 2\left\{\frac{e^{-\alpha_\nu r}}{\alpha_\nu r}\,\frac{\mathrm{li}(e^{\alpha_\nu r}) - \mathrm{li}(e^{-\alpha_\nu r})}{2} - \frac{\mathfrak{Sin}\,\alpha_\nu r}{\alpha_\nu r}\,\mathrm{li}(e^{-\alpha_\nu r})\right\}. \tag{8}$$

[1]) Es ist identisch in x:

$$\int_0^x \frac{\mathfrak{Sin}\,u}{u} du = \frac{1}{2}\lim_{\varepsilon=0}\left[\int_\varepsilon^{-x} \frac{e^u du}{u} + \int_{-\infty}^{x} \frac{e^u du}{u} - \int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-u} du}{u} - \int_\infty^x \frac{e^{-u} du}{u}\right].$$

Durch Einführung von $-u$ im ersten und zweiten Integral als neuer Variablen und Berücksichtigung von (6) erhält man die Formel (7). — Wir machen noch häufiger von der Formel

$$\int_\infty^1 \frac{e^{-xu}}{u} du = \int_\infty^x \frac{e^{-u} du}{u}$$

Gebrauch.

Es existieren für $e^{-x}\,\mathrm{li}\,(e^x)$ und $e^x\,\mathrm{li}\,(e^{-x})$ folgende asymptotische Reihenentwicklungen für großes Argument[1]):

$$\left.\begin{aligned} e^{-x}\,\mathrm{li}\,(e^x) &= \sum_{s=1}^{s=n}\frac{(s-1)!}{x^s} + R_n^{(1)} \qquad |R_n^{(1)}| < \frac{n!}{(-x)^{n+1}}, \\ e^{x}\,\mathrm{li}\,(e^{-x}) &= \sum_{s=1}^{s=n}\frac{(-1)^s\,(s-1)!}{x^s} + R_n^{(2)} \quad |R_n^{(2)}| < \frac{n!}{x^{n+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Mit deren Benutzung und unter Vernachlässigung negativ exponentieller Glieder erhält man für $\alpha_\nu r \gg 1$

$$J(r,\alpha_\nu) = 2\sum_{s=1}^{s=n}\frac{(2s-2)!}{(\alpha_\nu r)^{2s}} + \frac{\left[R_n^{(1)} - R_n^{(2)}\right]_{x=\alpha_\nu r}}{\alpha_\nu r}$$

oder, wenn Glieder mit $\dfrac{1}{(\alpha_\nu r)^4}$ gegen quadratische vernachlässigt werden,

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\alpha_\nu\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\vartheta_1}}}{\sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos\vartheta_1}}\,dr_1\sin\vartheta_1\,d\vartheta_1 = \frac{2}{\alpha_\nu^2 r^2}. \tag{10}$$

Integriert man diese Relation, die also eine asymptotische Identität in α_ν und r darstellt, bei festgehaltenem r über α_ν von α_ν bis ∞ — was offenbar erlaubt ist, da dann auf dem ganzen Integrationswege die Ungleichung (3) erfüllt ist —, so resultiert ohne weiteres die Formel (5) als eine ebenfalls in α_ν und r asymptotisch erfüllte Identität. Damit ist die Gleichung (4) für ε_ν bewiesen.

Die Strahlungsintensität $\mathfrak{R}_\nu$ ist natürlich im inhomogenen Strahlungsfelde an jedem Orte eine Funktion der Richtung. Wir werden sie etwa in Richtung des positiven Radius am Orte r bestimmen. Sie ergibt sich aus dem Emissionskoeffizienten durch[2])

$$\mathfrak{R}_\nu = \int_0^{r_0} e^{-\alpha_\nu r_1}\,\varepsilon_\nu(r_1)\,dr_1. \tag{11}$$

Hier ist r_1 vom Aufpunkte r aus gezählt, also $\varepsilon_\nu(r_1) = \dfrac{C}{(r-r_1)^2}$; r_0 ist die Grenze des Strahlungsfeldes; indem wir die Integration so weit erstrecken, als die Exponentialfunktion merkliche Beiträge liefert, setzen wir $r_0 = \varrho$, wo

$$\alpha_\nu\varrho \gg 1. \tag{12}$$

---

[1]) N. Nielsen, Theorie des Integrallogarithmus usw. (Leipzig 1906), S. 37, (9).

[2]) G. Jaffé, a. a. O., S. 617. Ein negativ exponentielles, von der direkten Einstrahlung herrührendes Glied haben wir gleich fortgelassen.

Wir denken uns nun den Aufpunkt an einem vom Zentrum so weit entfernten Orte, daß immer noch

$$\varrho \ll r; \tag{12a}$$

dann ist die Bedingung (3) von selber erfüllt. — Es ist also

$$\mathfrak{K}_\nu = C \int_0^\varrho \frac{e^{-\alpha_\nu r_1}}{(r-r_1)^2}\, dr_1 \tag{11a}$$

oder nach Wechsel der Variablen

$$\mathfrak{K}_\nu = -C\alpha_\nu e^{-\alpha_\nu r} \int_{\alpha_\nu r}^{\alpha_\nu (r-\varrho)} \frac{e^y}{y^2}\, dy$$

$$= C\alpha_\nu \left| \frac{e^{-\alpha_\nu \varrho}}{\alpha_\nu (r-\varrho)} - \frac{1}{\alpha_\nu r} - e^{-\alpha_\nu r}\left(\mathrm{li}\,(e^{\alpha_\nu (r-\varrho)}) - \mathrm{li}\,(e^{\alpha_\nu r})\right) \right|$$

und mit Benutzung der früheren asymptotischen Entwicklungen

$$\mathfrak{K}_\nu = C\alpha_\nu \left| \frac{e^{-\alpha_\nu \varrho}}{\alpha_\nu (r-\varrho)} - \frac{1}{\alpha_\nu r} - e^{-\alpha_\nu \varrho}\left(\frac{0!}{\alpha_\nu (r-\varrho)} + \frac{1!}{\alpha_\nu^2 (r-\varrho)^2} + \cdots\right) + \frac{0!}{\alpha_\nu r} + \frac{1!}{(\alpha_\nu r)^2} + \cdots \right|.$$

Wir erhalten also bei Vernachlässigung der negativ exponentiellen Glieder [vgl. (12)] und der höheren Potenzen von $\frac{1}{\alpha_\nu r}$ [vgl. (3)] wie behauptet

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{C}{\alpha_\nu r^2}. \tag{13}$$

Es sei noch darauf hingewiesen, daß auch in diesem Falle

$$\mathfrak{K}_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{\alpha_\nu}, \tag{14}$$

wie aus (4) und (13) folgt.

Der Verfasser dankt Herrn Prof. Born für sein freundliches Interesse.

Der Ostwaldsche Farbdoppelkegel.

Von **Otto Meissner** in Potsdam.

(Eingegangen am 9. Dezember 1923.)

§ 1. Nach W. Ostwald[1]) läßt sich jede „bezogene", d. h. nicht ausschließlich im Gesichtsfelde befindliche Farbe durch drei „Kennzahlen" eindeutig[2]) festlegen; es sind der **Farbton** c (in einer 100-teiligen Skala: 0 = gelb, 25 = rot, 50 = blau, aber erst bei 80 bis 85 „reines" Grün; die Gründe sind bei Ostwald nachzusehen), der **Weißgehalt** w und der **Schwarzgehalt** s, wozu als wichtige vierte, aber nicht unabhängige Größe die **Reinheit** r kommt, die angibt, wieviel „reine Farbe" in der vorgelegten enthalten ist und durch

$$r = 100 - (w + s) \tag{1}$$

definiert ist, wenn w und s, und folglich r, in Prozenten ausgedrückt werden. Auf die Bestimmung dieser Größen durch Farbkreis und Filter (bzw. „Pomi") kann hier nicht eingegangen werden. Eine fünfte Größe, der **Graugehalt**,

$$g = \frac{w}{w + s}, \tag{2}$$

wird im folgenden kaum Verwendung finden.

§ 2. Alle Abkömmlinge einer bestimmten reinen Farbe ($r = 100$) bilden ein **Farbdreieck**[3]), das man am besten gleichseitig nimmt und hochkant stellt: oben der Weißpunkt W, senkrecht die Grauachse mit dem unteren Endpunkt S (reines Schwarz). Der dritte Endpunkt ist der absolute Reinheitspunkt R. Es sind dann die Reingleichen [Isokátharen[4])] Parallelen zu WS, die Isoleuken Parallelen zu RS, die Isomélanen solche zu RW. RW enthält die „hellklaren", RS die „dunkelklaren" Farben; für WS, die Grauachse, ist die Reinheit = 0. Die Transversalen von W auf RS sind durch $r : s = \text{const}$

---

[1]) Vgl. seine Schriften: Farbenfibel; Farbenlehre I. II. (Leipzig, Verlag Unesma); Beiträge zur Farbenlehre, Abh. Sächs. Ak. d. W. (Teubner, Leipzig), **24**, Nr. 3.

[2]) „Metamere" Farben haben allerdings gleiche Kennzahlen und gleiches Aussehen, aber verschiedene Spektra. Obiger Satz im Text ist demnach dennoch richtig.

[3]) Vgl. außer Ostwald meine „Kolorimetrischen Untersuchungen" in der Physik. ZS., besonders IX, Physik. ZS. **24**, 213 ff., 1923.

[4]) Die Akzente geben für Nichtkenner des Griechischen die Tonsilbe an. καθαρός = rein, λευκός = weiß, μέλας, Stamm μελαν-, = schwarz, σκιά = Schatten, πολιός = grau.

definiert usf. in zyklischer Vertauschung der Buchstaben. $r:w = \text{const}$ sind Ostwalds „Schattengleiche“ (Isóskiën): eine hellklare Farbe verläuft bei zunehmender Beschattung längs einer solchen Linie. $w:s = \text{const}$ (wofür man auch $\frac{w+s}{s} = \text{const}$ schreiben kann, nach den elementaren Proportionsregeln) sind die Graugleichen (Isopólien). $w - s = \text{const}$ Linien gleicher Weiß-Schwarz-Differenz, „erste Isodelten“ könnte man sie nennen, sind Lote auf der Grauachse; $r - s = \text{const}$ und $r - w = \text{const}$ entsprechend auf RS oder RW.

§ 3. Durch Rotation des Farbdreiecks um die Grauachse entsteht ein Doppelkegel, von Ostwald kurz „Farbkörper“ [1]) genannt, auf und innerhalb dessen also sämtliche bunte ($r > 0$) und „unbunte“ ($r = 0$, d. h. nur auf der Achse) Farben [2]) liegen. 1. Ein Hauptschnitt liefert die aneinanderstoßenden Farbdreiecke zweier „Gegenfarben“, d. h. solcher, deren c um $+50$ verschieden sind, und die sich bei gleicher Reinheit zu einem Grau, einer „unbunten“ Farbe mischen [3]). 2. Parallelebenen zur „Äquatorebene“ — der Äquator selbst enthält alle reinen Farben ($c.00.00$ in Kennzahlen geschrieben) — haben die Gleichung $w - s = \text{const}$ ($\text{const} > 0$ nördlich, < 0 südlich vom „Äquator“). 3. Zur Achse ($W - S$) koaxiale Zylinder sind die Reingleichen, die Weißgleichen sind Kegel mit gleichem Öffnungswinkel wie der untere Kegelmantel, nämlich 120°, aber der Spitze zwischen S und W, um so näher an W, je größer w ist; die Schwarzgleichen entstehen umgekehrt durch Verschiebung der Spitze des oberen Zylinders längs der Grauachse. 4. Die Schattengleichen ($r:w = \text{const}$) sind Kegel mit der Spitze in S und einem Öffnungswinkel $< 120°$, analog $r:s = \text{const}$ Kegel mit der Spitze im Weißpunkt. Die Graugleichen sind Kegel mit der Spitze auf der W—S-Achse und einem Öffnungswinkel über 120° (180° gibt den Äquator: $w:s = 1$). 5. $r - s = \text{const}$ sind Kegel mit der Spitze auf der Grauachse und einem Öffnungswinkel von 60°. Die Spitze liegt für $r - s > 0$ auf der Verlängerung der Grauachse, oberhalb von W; für $r - w = \text{const}$ gilt Analoges mit Vertauschung von s, S und w, W. Die Flächen $w - s = \text{const}$ waren schon unter 2. behandelt.

---

[1]) Vgl. seinen Atlas „Der Farbkörper“, 12 Tafeln, auf 64 Feldern je eine Farbe (c) und Gegenfarbe ($c \pm 50$) in Abständen von 4 (bis 5) Einheiten in c.

[2]) Reflektiert und „bezogen“ (s. o.). Von Spiegelungserscheinungen ist abgesehen; für durchscheinende Farben hat Ostwald w und s noch nicht definiert, Verfasser eine Bestimmung wenigstens des Farbtons gegeben.

[3]) Wie dies Goethe gegenüber den Physikern jener Zeit richtig erkannt hat; vgl. seinen bekannten Vers über Mollweide.

§ 4. Nimmt man rechtwinklige kartesische Koordinaten xyz an, so legt man am besten den Koordinatenursprung in die Mitte des Farbkörpers, d.h. den Mittelpunkt des Äquatorkreises, der die Kennzahlen $*\cdot 50.50$ hat ($*$ bedeutet, daß der Farbton fehlt, daß es sich um eine „unbunte" Farbe handelt). Die Z-Achse legt man in die Grauachse, setzt am einfachsten $z = w - s$, so daß also $W(S)$ die Z-Koordinate $+100\,(-100)$ und $x = y = 0$ hat. Die Y-Achse gehe durch $c = 0$ (Gelb), die X-Achse durch $c = 25$ (Rot), dann ist

$$r^2 = x^2 + y^2. \tag{3}$$

$$\operatorname{tang} 3{,}6\,c = \frac{x}{y} \tag{4}$$

und wie oben

$$w - s = z. \tag{5}$$

Aus diesen Gleichungen in Verbindung mit der Identität (1) lassen sich die Kennzahlen durch xyz ausdrücken.

§ 5. Mit Hilfe dieser Gleichungen lassen sich leicht die Kennzahlen einer Mischfarbe aus ihren Komponenten bestimmen[1]). Die Farben mit den Kennzahlen $c_1 w_1 s_1$ und $c_2 w_2 s_2$ seien im Verhältnis $p:q$ zur Mischfarbe $c_m w_m s_m$ gemischt. Wie drücken sich $c_m w_m s_m$ durch $c_1 c_2 w_1 w_2 s_1 s_2$ aus?

Die kartesischen Koordinaten der Mischfarben sind

$$x_m = \frac{p x_1 + q x_2}{p+q}, \quad y_m = \frac{p y_1 + q y_2}{p+q}, \quad z_m = \frac{p z_1 + q z_2}{p+q}. \tag{6}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit den Gleichungen (3) bis (5):

$$r_m = \frac{1}{p+q}\sqrt{p^2 r_1^2 + q^2 r_2^2 + 2\,p\,q\,r_1\,r_2 \cos 3{,}6\,(c_1 - c_2)}, \tag{7}$$

$$\operatorname{tang} 3{,}6\,c_m = \frac{p\,r_1 \sin 3{,}6\,c_1 + q\,r_2 \sin 3{,}6\,c_2}{p\,r_1 \cos 3{,}6\,c_1 + q\,r_2 \cos 3{,}6\,c_2}, \tag{8}$$

$$w_m - s_m = \frac{p\,(w_1 - s_1) + q\,(w_2 - s_2)}{p+q}. \tag{9}$$

Hieraus und aus (1) in der Form

$$w_m + s_m = 100 - r_m \tag{1 a}$$

sind die drei Kennzahlen der Mischfarbe zu berechnen. (Bei Mischung mehrerer Farben ergibt sich keine grundsätzliche Schwierigkeit.)

Man sieht, daß die Reinheit einer Mischfarbe stets kleiner als das arithmetische Mittel (im allgemeinen Falle mit Gewichten, für

[1]) Ostwald hat in seiner Physikalischen Farbenlehre dies nicht allgemein getan.

$p = q$ direkt) der Reinheiten der gemischten Farbe ist. Die Reinheit kann $= 0$ nur für Gegenfarben werden: bei gleichem Anteil nur, wenn beide gleich rein sind. $\operatorname{tang} 3{,}6\, c_m = 0/0$ wird dann unbestimmt, wie es sein muß. c_m hängt auch von der Reinheit ab: je geringer die Reinheit der einen Komponente r_1, um so näher liegt c_m an c_2. c_m wird $= {}^1/_2 (c_1 + c_2)$, wenn sich $r_1 : r_2$ wie $q : p$ verhalten.

§ 6. Die Aufgabe, aus drei Farben Grau zu ermischen, ist hiernach nicht schwer zu lösen. Am Farbkörper sieht man sofort, daß die Mischung reiner Farben stets nur ein 50proz. Weiß ergeben kann, das allerdings dem Auge wegen des Weber-Fechnerschen Gesetzes noch ziemlich hell erscheint[1]). — Damit man überhaupt Grau erhält, muß die Grauachse durch das aus den drei zu den Farben gehörigen Punkten gebildete Dreieck gehen[2]), dazu ist nötig, daß, wenn — der Allgemeinheit unbeschadet — $c_1 < c_2 < c_3$ angenommen wird, $c_3 > 50 + c_1$ ist.

Bezeichnen dann $c_m w_m s_m$ die Kennzahlen der Mischung von $p_1 (c_1 w_1 s_1)$ und $p_2 (c_2 w_2 s_2)$, so muß, damit c_m und c_3 Gegenfarben sind, da tang um 180° periodisch ist, sein:

$$\frac{\sin 3{,}6\, c_3}{\cos 3{,}6\, c_3} = \frac{p_1 r_1 \sin 3{,}6\, c_1 + p_2 r_2 \sin 3{,}6\, c_2}{p_1 r_1 \cos 3{,}6\, c_1 + p_2 r_2 \cos 3{,}6\, c_3}$$

oder

$$p_1 r_1 \sin 3{,}6\,(c_1 - c_3) + p_2 r_2 \sin 3{,}6\,(c_2 - c_3) = 0. \qquad (10)$$

Soll der Mischpunkt genau in die Achse fallen, so muß $p_3 r_3 = p_m r_m$ sein, oder, mit leicht verständlicher Umformung:

$$\frac{p_3^2}{p_m^2} = \frac{p_1^2 r_1^2 + p_2^2 r_2^2 + 2 p_1 p_2 r_1 r_2 \cos 3{,}6\,(c_1 - c_2)}{p_1^2 r_3^2 + p_2^2 r_3^2 + 2 p_1 p_2 r_3 r_3}. \qquad (11)$$

Da hier noch zwei Größen willkürlich sind, kann man $p_m = 1$ und $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ setzen.

§ 7. Folgendes Rechnungsverfahren, das übrigens sehr nahe liegt, ist, weil zu $p_1 p_2 p_3$ symmetrisch, eleganter und auf Mischungen beliebig vieler Farben zu neutralem Grau verwendbar: für die Grauachse ist $x = y = 0$, also muß sein

$$\sum_\nu p_\nu r_\nu \sin 3{,}6\, c_r = 0, \qquad (12)$$

$$\sum_\nu p_\nu r_\nu \cos 3{,}6\, c_r = 0. \qquad (13)$$

---

[1]) Als „mittleres Grau" erscheint dem normalen Auge ein Grau mit etwa 15 Proz. Weißgehalt; vgl. Ostwald und meine Kolorimetrischen Untersuchungen in der Physik. Zeitschrift.

[2]) Das Wort „Farbdreieck", so nahe es läge und bequem es wäre, mußte hier vermieden werden, da es Ostwald (s. o.) bereits in festem Sinne für die Abkömmlinge einer bestimmten reinen Farbe verwendet.

Für $v \geqq 4$ sind natürlich $v - 4$ Größen p willkürlich; den Weißgehalt des resultierenden Graus erhält man aus

$$z_m = \sum_v p_v z_v : \sum_v p_v = w_m - s_m$$

und der Bedingung $w_m + s_m = 100$ zu:

$$w_m = 50 + \sum_v p_v z_v : \sum_v p_v. \tag{14}$$

Durch Angabe von w_m ist natürlich ein Grau eindeutig bestimmt ($* \; ws = w$).

Über eine stationäre Kosmologie im Sinne der Einsteinschen Gravitationstheorie.

Von **Kornel Lanczos** in Freiburg i. B.

Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 13. November 1923.)

Eine Welt ist im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie dann als stationär zu betrachten, wenn die Koeffizienten ihrer Maßbestimmung unabhängig sind von der Zeit, falls wir uns in einem Koordinatensystem befinden, in dem die Massen im Durchschnitt dauernd ruhen. Der Zusatz über das benutzte Koordinatensystem ist wesentlich, da die Zeit an sich keinen invarianten Begriff darstellt, sondern nur in der Bedeutung als Eigenzeit. In der gegebenen Fassung ist aber unsere Definition eindeutig. Allerdings sind ja auch Punkte möglich, wo keine Materie zu finden ist. In solchen Punkten denken wir uns einen Probekörper von verschwindend kleiner Masse angebracht und untersuchen, ob er in unserem Koordinatensystem in Ruhe bleibt. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß die Zeitlinien unseres Koordinatensystems geodätische Linien seien. Darum gehört z. B. die von de Sitter angegebene statische Lösung der kosmologischen Gleichungen nicht zu den stationären Welten. Das Schwarzschildsche Linienelement, welches in kosmologischer Betrachtung eine Welt mit einem einzigen Zentralkörper darstellen würde, kann ebenfalls nicht als stationäre Lösung gelten. Überhaupt gibt es für die ursprünglichen Feldgleichungen keine stationären Lösungen, die zugleich kugelsymmetrisch wären. Für die kosmologischen Gleichungen ist die einzige Lösung solcher Art die Einsteinsche Zylinderwelt. Sie ist meines Wissens überhaupt die einzige bis jetzt bekannte stationäre Welt. Bei ihr muß aber die durchschnittliche Materiedichte und somit auch die Gesamtmasse der Welt, einen ganz bestimmten, durch die kosmologische Konstante bedingten Wert haben, was ohne Zweifel ein bloßer Zufall wäre und darum keine befriedigende Annahme ist. Wir werden im folgenden eine neue Lösung diskutieren, die auch mit den ursprünglichen Feldgleichungen vereinbar ist und bei der eine solche aprioristische Beziehung zwischen Masse und kosmologischer Konstante nicht vorausgesetzt werden muß. Wir werden allerdings finden, daß die Masse der Zylinderwelt nicht unterschritten werden kann.

1. Die Wahl der Koordinaten.

Das Linienelement ds soll nicht das geometrische Linienelement selber bedeuten, sondern dasselbe multipliziert mit $\sqrt{-1}$ — es soll also drei positive Dimensionen haben und eine negative. Durch jeden Punkt der Welt denken wir uns eine materielle Weltlinie hindurchgehend. Dieses Bündel von geodätischen Linien schneiden wir durch irgend eine Fläche F („Fläche" im Sinne der vierdimensionalen Geometrie, also ein Gebilde von drei Dimensionen). Die Punkte dieser Fläche charakterisieren wir durch drei Koordinaten: x, y, z. Die Koordinaten eines Weltpunktes P legen wir nun folgendermaßen fest. Wir projizieren den Punkt P auf die Fläche F mit Hilfe der durch ihn hindurchgehenden geodätischen Linie und geben die drei Koordinaten des Projektionspunktes P' an. Als vierte Koordinate benutzen wir die Bogenlänge der geodätischen Linie zwischen P und P' und bezeichnen diese Länge mit t. Infolge dieser Wahl der vierten Koordinate ist der Koeffizient von dt^2 gleich -1. Unser Linienelement wird also folgende Form haben:

$$ds^2 = d\sigma^2 + 2\,d\Phi\,dt - dt^2. \tag{1}$$

$d\sigma^2$ ist dabei eine quadratische Differentialform der drei räumlichen Variablen, während $d\Phi$ folgende Bedeutung hat:

$$d\Phi = g_{14}\,dx + g_{24}\,dy + g_{34}\,dz. \tag{2}$$

Nun sollen aber unsere Parameterlinien t auch noch geodätische Linien sein. Die hinreichende und notwendige Bedingung hierfür ist, daß die drei Größen g_{i4} $(i = 1, 2, 3)$ unabhängig sind von t, was bei unserer Voraussetzung der Stationarität keine neue Forderung bedeutet.

In der Bezeichnung der Geometrie bildet das System der materiellen Weltlinien, die wir als t-Linien gewählt haben, ein sogenanntes „Strahlensystem" [1]). Unter Umständen kann es sein, daß wir eine Fläche finden, die sämtliche Strahlen des Systems orthogonal schneidet. Wir sprechen dann von einem „Normalensystem". Wählen wir diese Fläche als unsere Grundfläche F', so verschwinden die Koeffizienten g_{i4} und das Linienelement zerfällt in einen rein räumlichen und einen rein zeitlichen Teil:

$$ds^2 = d\sigma^2 - dt^2.$$

Nicht nur die benutzte Grundfläche $t = 0$, sondern auch alle Flächen $t = \text{const}$ haben dann die Eigenschaft, die materiellen Weltlinien senkrecht zu schneiden. In diesem Falle können wir also eine universelle Trennung zwischen Raum und Zeit durchführen. Der Übergang von unserer ursprünglichen, beliebig gelegten Fläche F zur neuen

[1]) Siehe z. B. Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differential-Geometrie 1899, S. 256.

Grundfläche kann immer durch eine Transformation: $t' = t + f(x, y, z)$ vorgenommen werden. Wir erkennen daraus, was das charakteristische Kennzeichen dafür ist, ob wir es mit einem Normalensystem zu tun haben oder nicht. Es hängt davon ab (auch in einer nichtstationären Welt), ob $d\Phi$ ein vollständiges Differential ist oder nicht. In ersterem Fall setzen wir

$$t' = t - \Phi(x, y, z)$$

und bringen dadurch die gemischten raum-zeitlichen Komponenten des Maßtensors zum Verschwinden. Ist aber $d\Phi$ kein vollständiges Differential, so ist die Tilgung sämtlicher g_{i4} nicht möglich. Es muß aber betont werden, daß die Eigenschaft eines Strahlensystems, ein Normalensystem zu bilden, eine rein geometrische Eigenschaft ist und nichts mit irgendwelchen physikalischen Eigenschaften der Materie zu tun hat. Sie ist eine bestimmte Art der geometrischen Verteilung der Materie. Auch als physikalische Forderung kann sie nicht eingeführt werden, denn schon durch die Lorentztransformation verlieren ja Raum und Zeit ihre Selbständigkeit, und um so weniger kann man in der allgemeinen Relativitätstheorie eine universelle Scheidung von Raum und Zeit verlangen. Ihre lokale Trennung ist natürlich unter allen Umständen möglich, wenn wir es nur überhaupt mit einem regulären Weltpunkte zu tun haben, und das wollen wir für den ganzen Weltbereich im folgenden immer stillschweigend voraussetzen. Die Normalität der Materieverteilung werden wir aber aufgeben, und das müssen wir auch, wenn wir über die Einsteinsche Zylinderwelt hinauskommen wollen, denn diese ist die einzig mögliche stationäre Welt bei einer normalen Verteilung der Materie. (Um Verwechslungen zwischen den beiden Bedeutungen des Wortes „normal" vorzubeugen, wollen wir im folgenden lieber von einer „orthogonalen" Verteilung sprechen.) Aus demselben Grunde müssen wir auch auf die Kugelsymmetrie verzichten. Bei Kugelsymmetrie könnte $d\Phi$ nur von der Form

$$d\Phi = f(r)\,dr$$

sein, wäre also ein vollständiges Differential. Eine kugelsymmetrische Verteilung der Materie bildet also immer ein Normalensystem.

Wir wollen noch einiges bemerken in bezug auf den Variabilitätsbereich der Koordinaten, was bei der kosmologischen Betrachtung der Welt als Ganzes eine bedeutungsvolle Rolle spielt. Angenommen, wir hätten ein reguläres Linienelement vorliegen, mit nirgends verschwindender Determinante und sämtliche g_{ik}-Funktionen wären, in ihrer Abhängigkeit von irgend einer Koordinate φ betrachtet, periodische Funktionen dieser Veränderlichen, mit der Periode A. Dann ist es

ohne weiteres gestattet, die Fläche $\varphi = 0$ mit der Fläche $\varphi = A$ zusammenfallen zu lassen, so zwar, daß wir zwei Punkte als identisch erklären, deren φ-Koordinate Null bzw. A ist, während ihre übrigen Koordinaten übereinstimmen. Ja, wir können bei einer allseitig geschlossenen Fläche Polarkoordinaten einführen, so daß sämtliche g_{ik}-Funktionen in bezug auf sämtliche Variablen periodisch seien. Der Variabilitätsbereich sämtlicher Koordinaten ist dann in einen n-dimensionalen Würfel eingeschlossen, dessen Kantenlänge durch eine Ähnlichkeitstransformation immer $= 1$ gesetzt werden kann. Dabei werden gewöhnlich einzelne Stellen auftreten, wo die Determinante verschwindet. In solchen Punkten muß eine besondere Untersuchung ergeben, ob der angenommene Variabilitätsbereich mit der Regularität dieser Punkte verträglich ist. Betrachten wir z. B. das euklidische Linienelement der Ebene in der Form:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Die g_{ik} sind hier unabhängig von φ, also in bezug auf φ konstant. Auch eine Konstante ist aber als periodische Funktion einfachster Art aufzufassen, wobei die Periode beliebig groß gewählt werden kann. Trotzdem ist der Variabilitätsbereich von φ eindeutig zwischen Null und 2π festgelegt durch das Verschwinden der Determinante bei $r = 0$, da sonst eine singuläre Spitze auftreten würde. Anders beim euklidischen Linienelement in rechtwinkligen oder auch schiefwinkligen Koordinaten. Hier sind alle g_{ik} konstant mit konstanter Determinante, hier können wir also alle Koordinaten als periodisch betrachten mit beliebig großer Periode. Auf diese Weise kommt eine allseitig geschlossene Fläche zustande, die trotzdem überall euklidisch ist, alle ihre Punkte gleichwertig und vollständig singularitätenfrei. Es ist vielleicht nicht genügend beachtet worden, daß das euklidische Linienelement keineswegs zum unendlichen Raum führen muß, sondern auch eine solche nach allen Richtungen geschlossene Weltfläche zuläßt. (Die Dimensionszahl kann beliebig sein.) Die Zusammenhangsverhältnisse einer solchen geschlossenen euklidischen Ebene sind die einer Ringfläche. Man kann diese Ebene zu einem Zylinder zusammenrollen und nun diesen oben und unten offenen Zylinder wie einen Schlauch so lange verbiegen, bis der obere Grenzkreis mit dem unteren zur Deckung kommt. Allerdings geht das nicht ohne Deformation, und in der Tat gibt es im dreidimensionalen euklidischen Raum keine Fläche, die als Ganzes unsere soeben erwähnte Geometrie widerspiegeln würde. Aber schon in vier Dimensionen ist das der Fall. Betrachten wir das Gebilde, das durch die beiden Zylinder:

$$x^2 + y^2 = 1 \qquad z^2 + u^2 = 1$$

herausgeschnitten wird. Schneiden wir diese Fläche längs zweier zueinander senkrechter Kreise auf und breiten sie in die Ebene aus, so bekommen wir ein Quadrat mit der Länge 1, dessen rechter Rand mit dem linken, der obere mit dem unteren zusammenfällt. An Stelle des Quadrates können wir genau so gut auch ein beliebiges Parallelogramm nehmen. Um uns die Geometrie auf einer solchen Fläche klarzulegen, brauchen wir nur die unendliche euklidische Ebene in lauter Periodenparallelogramme zu zerlegen, wie wir es bei der Untersuchung der elliptischen Funktionen zu tun pflegen und dann je zwei korrespondierende Punkte als identisch zu betrachten. Die Geraden sind jetzt geschlossene Linien, wenn gewisse Rationalitätsbedingungen erfüllt sind. Sonst sind sie aber offene Linien, die dann jedem Punkt unendlich oft beliebig nahekommen, ohne jemals exakt in denselben Punkt zurückzukehren. Jede Translation verschiebt die Fläche in sich, während eine Drehung als Ganzes nicht möglich ist. — Wir erkennen an diesem Beispiel, daß die vollständige Charakterisierung einer Geometrie auf rein differentialgeometrischem Wege im allgemeinen nicht durchführbar sein wird. Der Variabilitätsbereich der Koordinaten läßt sich aus den Differentialgleichungen des Feldes nicht eindeutig ablesen. Schon im einfachsten euklidischen Fall sehen wir dieses, wo doch nicht nur der verjüngte Krümmungstensor, sondern auch der vollständige Riemann-Christoffelsche Tensor verschwindet. Wenn wir auch die eine Seite des Periodenparallelogrammes als Längeneinheit wählen, so bleibt trotzdem noch Länge und Neigung der anderen Seite unbestimmt, und in höheren Dimensionen ist die Anzahl der Bestimmungsstücke noch größer.

Auch für eine stationäre Welt kommt diese Bemerkung zur Geltung. Wenn die g_{ik}-Koeffizienten unabhängig sind von der Zeit, so braucht die Zeit keine Koordinate zu bedeuten, die von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert, sie kann auch eine periodische Koordinate, eine Art Winkelkoordinate darstellen. Es besteht also die Möglichkeit, daß die Welt nicht nur in räumlicher, sondern auch in zeitlicher Beziehung periodisch, also nach allen Richtungen geschlossen ist, wobei die Periode der Zeit beliebig groß sein kann. Vom Standpunkte einer Harmonie zwischen mathematischem Geist und Weltgeist müßte sogar eine solche Endlichkeit und Geschlossenheit der Weltfläche vorausgesetzt werden, um die Singularität im Unendlich-Fernen zu eliminieren [1]).

---

[1]) In physikalischer Beziehung würden sich aus einer solchen Auffassung recht merkwürdige Folgerungen ergeben, die aber nirgends zu einem inneren

2. Eine stationäre Lösung für die ursprünglichen Feldgleichungen.

Wir betrachten vorerst die Feldgleichungen ohne kosmologisches Glied, haben es also mit folgendem Gleichungssystem zu tun:

$$R_{ik} = T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} T. \tag{3}$$

Die Massen messen wir dabei nicht in Grammen, sondern in natürlichen Einheiten, also in Zentimetern, nach der Umrechnung:

$$1\,\mathrm{g} = 1{,}87 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{cm}.$$

Da die einzelnen Sterne in solcher Entfernung sind, daß eine gegenseitige Beeinflussung durch Druck- oder andere Kräfte nicht in Frage kommt, haben wir für den Materietensor den einfachen Impulstensor eines freien Körpers anzusetzen, also:

$$T^{ik} = \mu \frac{dx_i}{ds} \frac{dx_k}{ds}, \tag{4}$$

wobei die Skalare μ die Dichte der Masse bedeutet. Da aber die Massen in unserem Koordinatensystem in Ruhe sind, verschwinden alle kontravarianten Komponenten bis auf T^{44}, dessen Wert gleich $-\mu$ ist.

Bevor wir auf unsere spezielle Lösung eingehen, wollen wir eine merkwürdige allgemeine Eigenschaft jedes stationären Systems ableiten. Wir untersuchen die Gleichung mit den Indizes [4, 4]. Auf der rechten Seite steht $T_{44} - \frac{1}{2} T g_{44}$. Es ist aber:

$$T_{44} = -\mu, \quad T = \mu. \tag{5}$$

Die rechte Seite ist also $= -\frac{1}{2}\mu$. Die linke Seite reduziert sich auf folgende Terme:

$$\begin{aligned} R_{44} = {} & 2 \left\{ \begin{matrix} 4 & 1 \\ 2 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 4 & 2 \\ 1 \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} 4 & 1 \\ 3 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 \end{matrix} \right\} + 2 \left\{ \begin{matrix} 4 & 2 \\ 3 \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} 4 & 3 \\ 2 \end{matrix} \right\} \\ & + \left\{ \begin{matrix} 4 & 1 \\ 1 \end{matrix} \right|^2 + \left\{ \begin{matrix} 4 & 2 \\ 2 \end{matrix} \right|^2 + \left\{ \begin{matrix} 4 & 3 \\ 3 \end{matrix} \right|^2 . \end{aligned} \tag{6}$$

Widerspruch führen. Da das Elektron nirgends weder Anfang noch Ende haben kann, müßte es nach Ablauf einer Zeitperiode wieder in denselben Raumpunkt zurückgekehrt sein, von wo es ausgegangen, was höchst unwahrscheinlich wäre. Es könnte aber auch seine Existenz in einem anderen Raumpunkt fortsetzen, wobei es scheinbar ein zweites Elektron bilden würde. So kommen wir auf den Gedanken, daß vielleicht die Weltschläuche sämtlicher Elektronen nur Ausschnitte aus einem einzigen Urschlauch sind und die einzelnen Elektronen nur zeitlich verschiedene Entwicklungsstadien eines einzigen Urgebildes. Die prinzipielle Gleichheit aller Elementarbausteine der Materie (wenigstens was die negativen Elektronen anbelangt) könnte dadurch seine natürliche Erklärung finden und unsere Überzeugung von der Einheit des Universums um große Ausblicke bereichert werden. Doch gehört die Verfolgung dieser spekulativen Ideen nicht in den Rahmen der vorliegenden Arbeit.

Nun können wir durch eine lokale Transformation im betrachteten Punkte die Orthogonalform des Linienelements herstellen. Und zwar machen wir das so, daß wir setzen:

$$dt' = dt - g_{14}\,dx - g_{24}\,dy - g_{34}\,dz, \tag{7}$$

wodurch wir erreichen, daß die gemischten Komponenten der vierten Zeile verschwinden. Dann transformieren wir dx, dy, dz unter sich, bis auch die übrigen gemischten Komponenten lokal getilgt sind. Bei dieser Transformation bleibt auch das neue Koordinatensystem stationär, indem die Differentialquotienten der g_{ik} nach t auch weiterhin verschwinden. Jetzt können wir aber setzen:

$$\left\{\begin{matrix} i\ k \\ j \end{matrix}\right\} = \left[\begin{matrix} i\ k \\ j \end{matrix}\right]_g^{jj}.$$

Und wegen der Stationarität haben wir:

$$\left[\begin{matrix} 4\ i \\ k \end{matrix}\right] = -\left[\begin{matrix} 4\ k \\ i \end{matrix}\right].$$

Wir erkennen, daß jetzt die drei letzten Glieder in R_{44} verschwinden und erhalten für μ die Beziehung:

$$\frac{\mu}{4} = \left[\begin{matrix} 4\ 1 \\ 2 \end{matrix}\right]^2 g^{11}\,g^{22} + \left[\begin{matrix} 4\ 1 \\ 3 \end{matrix}\right]^2 g^{11}\,g^{33} + \left[\begin{matrix} 4\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right]^2 g^{22}\,g^{33}. \tag{8}$$

Die Größen g^{11}, g^{22}, g^{33} sind aber notwendigerweise positiv. Die rechte Seite kann also unter keinen Umständen negativ werden. Wir kommen somit zu folgendem merkwürdigen Resultat: In einer stationären Welt kann die Massendichte überall nur positiv sein.

Aus der allgemeinen Relativitätstheorie ergibt sich als Folgerung die Äquivalenz zwischen schwerer und träger Masse. Über das Vorzeichen des Proportionalitätsfaktors kann aber a priori nichts ausgesagt werden. Es wird empirisch so festgelegt, daß die gegenseitige Beeinflussung der Materie sich als Anziehung und nicht als Abstoßung äußern soll. Im Prinzip wäre auch das entgegengesetzte Vorzeichen genau so zulässig oder es wäre denkbar, daß die Massen teilweise mit positivem, teilweise mit negativem Vorzeichen einzuführen wären. In einer stationären Welt fällt diese Zweideutigkeit weg und die mittlere Massendichte ergibt sich notwendig mit demjenigen Vorzeichen, welches auch in der Wirklichkeit realisiert ist. Daß zwei an und für sich ganz heterogene Aussagen, wie einerseits, daß das Linienelement sich aus drei positiven und einer negativen Dimension zusammensetzt und andererseits, daß die gegenseitige Beeinflussung der Materie sich in einer Anziehung und nicht in einer Abstoßung äußert, durch die Forderung der Stationarität in eine notwendige Beziehung zueinander kommen, ist gewiß als interessante Konsequenz zu betrachten und

vielleicht auch als Fingerzeig, daß wir nicht auf falscher Fährte sind, wenn wir nach stationären Lösungen der Feldgleichungen suchen. Wir wollen zu dieser Erörterung gleich noch den Fall der kosmologischen Gleichungen hinzufügen. Dann ist bei der Gleichung [4, 4] der ganze Unterschied, daß auf die rechte Seite an Stelle von $-\frac{\mu}{2}$ jetzt $-\frac{\mu}{2}+\lambda$ tritt. Unsere Konsequenz lautet dann:

$$\mu \geq 2\lambda. \tag{9}$$

Die Massendichte kann nirgends die Massendichte der Zylinderwelt unterschreiten.

Wir sagten schon, daß unsere Lösung nicht kugelsymmetrisch sein kann. Die seitlichen Komponenten der vierten Zeile würden dann getilgt werden können und damit die Masse überall verschwinden. Die Lösung wäre der überall masselose euklidische Raum. Wohl aber kann gefordert werden, daß eine Rotationssymmetrie bestehen soll. Auch der tatsächliche Weltraum ist ja nicht einmal in Annäherung kugelsymmetrisch aufgebaut, während eine ziemlich gut angenäherte Rotationssymmetrie mit der Milchstraße als Äquator und dem galaktischen Pol als Rotationspol tatsächlich vorhanden ist. Geometrisch bedeutet diese Rotationssymmetrie, daß wir eine Winkelvariable ψ einführen können, so, daß sämtliche g_{ik} von ψ unabhängig sind. Dieses ψ wählen wir als dritte Variable, schreiben also von jetzt ab statt z immer ψ. Die g_{ik}-Funktionen sind also nunmehr nur noch von x und y abhängig. Durch eine passend gewählte Transformation $t' = t + f(x, y)$ kann g_{14} immer zum Verschwinden gebracht werden, ebenso g_{18} durch eine ähnliche Transformation von ψ. Wir wollen aber weitergehen und auch $g_{24} = 0$ setzen. Wir nähern uns dadurch am meisten einer orthogonalen Verteilung der Materie, indem nur eine räumlich-zeitliche Komponente: g_{34} von Null verschieden bleibt. Außerdem setzen wir $g_{23} = 0$ und erreichen dadurch, daß jetzt vier von den Feldgleichungen, nämlich die mit den Indizes [1, 4], [2, 4], [1, 3], [2, 3] im voraus identisch erfüllt sind. Es bleiben somit sechs Gleichungen übrig, von denen aber [4, 4] nur die Massendichte festlegt und nicht als Beziehung zwischen den Tensorkomponenten aufzufassen ist. Die Zahl der zu erfüllenden Gleichungen reduziert sich also auf fünf.

Über die Normierung der Koordinaten x und y haben wir noch nichts gesagt. Wir können aber denjenigen Teil des Linienelements, der die Differentiale dx und dy allein enthält, für sich betrachten und hier isometrische Koordinaten einführen. Wir setzen also $g_{11} = g_{22}$

und $g_{12} = 0$. Infolge dieser Vereinfachungen erscheint unser Linienelement nunmehr in folgender Form:

$$ds^2 = G(dx^2 + dy^2) + P d\psi^2 + 2 Q d\psi dt - dt^2. \tag{10}$$

Wir erkennen, daß der räumliche Teil Orthogonalität besitzt und überhaupt von sämtlichen gemischten Komponenten nur g_{34} übriggeblieben ist. Wir machen aber noch eine wesentliche Vereinfachung. Um die exakte mathematische Durchführung unseres Problems zu ermöglichen, nehmen wir an, daß die g_{ik} nicht von x und y, sondern allein von der einen Veränderlichen — z. B. x — abhängen sollen. Wir erreichen dadurch die große Erleichterung, daß wir von partiellen auf totale Differentialgleichungen kommen, die sich glücklicherweise leicht lösen lassen. In geometrischer Beziehung bedeutet diese Vereinfachung, daß nun außer der Rotationssymmetrie noch eine andere Art von Symmetrie besteht. Nicht nur die durch die Rotationsachse gehenden Schnittebenen $\psi = \text{const}$ sind alle kongruent miteinander, sondern auch die Ebenen $y = \text{const}$. In beiden Scharen von Ebenen herrscht eine Geometrie, die auf je einer Rotationsfläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes darstellbar ist.

Die Einschränkungen also, die wir innerhalb der stationären rotationssymmetrischen Lösungen machen, sind die folgenden: Unabhängigkeit sämtlicher g_{ik} von y, Verschwinden von g_{23} und g_{34}. Unsere Lösung wird so gewissermaßen die Fundamentallösung darstellen innerhalb eines ganzen Systems von möglichen Lösungen.

Durch die Unabhängigkeit von y ist nun auch die Gleichung [1, 2] identisch erfüllt. Die Zahl der zu erfüllenden Gleichungen ist also nur noch vier. Unbekannte Funktionen haben wir aber nur drei, nämlich P, Q und G. Das Problem scheint also überbestimmt zu sein. Wir werden jedoch sehen, daß die eine der Gleichungen überflüssig ist, indem sie sich als Folge der drei anderen ergibt.

Wir führen noch zwei Bezeichnungen ein. Die negative Determinante desjenigen Teiles des Linienelementes, welches nur die Differentiale $d\psi$ und dt enthält, bezeichnen wir mit γ. Es sei also:

$$\gamma = P + Q^2. \tag{11}$$

Die ganze Determinante g drückt sich dadurch aus in der Form:

$$g = -G^2 \gamma. \tag{12}$$

Außerdem wird es sich als zweckmäßig erweisen, den negativen Logarithmus von G einzuführen; wir setzen also:

$$G = e^{-u}. \tag{13}$$

Die Differentiation nach x wollen wir durch Punkte andeuten. Die Tabelle der Klammerausdrücke hat dann folgendes Aussehen:

$$\left.\begin{array}{lll} \left\{\begin{matrix}1&1\\1&\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\dot{u} & \left\{\begin{matrix}2&2\\1&\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2}\dot{u} & \left\{\begin{matrix}2&1\\2&\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2}\dot{u} \\ \left\{\begin{matrix}1&3\\3&\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\gamma}(\dot{P}+\dot{Q}Q) & \left\{\begin{matrix}1&3\\4&\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\gamma}(\dot{P}Q-\dot{Q}P) & \\ \left\{\begin{matrix}1&4\\3&\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\gamma}\dot{Q} & \left\{\begin{matrix}1&4\\4&\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\gamma}\dot{Q}Q & \\ \left\{\begin{matrix}3&3\\1&\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2G}\dot{P} & \left\{\begin{matrix}3&4\\1&\end{matrix}\right\} = -\frac{1}{2G}\dot{Q}. & \end{array}\right\} \quad (14)$$

Alle übrigen Klammerausdrücke sind $= 0$.

Wir untersuchen vorerst die Gleichungen [3, 4] und [3, 3]. Der große Vorteil der isometrischen Koordinaten, die wir im ersten Teil des Linienelementes eingeführt haben, zeigt sich darin, daß aus diesen beiden Gleichungen G herausfällt, so daß Beziehungen zwischen P und Q allein übrigbleiben. Wir bestimmen aus ihnen diese beiden Funktionen und verwenden die noch zu erfüllenden beiden Gleichungen [1, 1] und [2, 2] zur Bestimmung von G.

Die rechte Seite der Gleichung [3, 4] lautet:

$$T_{34} - \tfrac{1}{2}\mu Q.$$

Es ist aber

$$T_{34} = T^{44} g_{43} g_{44} = \mu Q \quad (15)$$

und für μ haben wir nach Gleichung (5) und (6):

$$\mu = \frac{\dot{Q}^2}{\gamma G}. \quad (16)$$

Es folgt also:

$$R_{34} = \frac{1}{2\gamma G}\dot{Q}^2 Q, \quad (17)$$

wobei wir R_{34} nach der bekannten Formel zu berechnen haben:

$$R_{ik} = \frac{\partial^2 \lg\sqrt{g}}{\partial x_i \partial x_K} - \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\left\{\begin{matrix}i&k\\s&\end{matrix}\right\}}{\partial x_s} + \left\{\begin{matrix}i&r\\s&\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}k&s\\r&\end{matrix}\right\}. \quad (18)$$

Der erste Term fällt weg, von der zweiten Summe bleibt nur das erste Glied übrig, und der dritte Term, das Klammerprodukt, läßt sich an Hand unserer Tabelle (14) leicht auswerten. Das Resultat ist folgende Differentialgleichung für Q:

$$\frac{\ddot{Q}}{\dot{Q}} - \frac{1}{2}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = 0, \quad (19)$$

deren Lösung ergibt:

$$Q = 2C\sqrt{\gamma}. \quad (20)$$

(Daß wir die Integrationskonstante mit dem Faktor 2 angesetzt haben, wird sich für das Spätere als zweckmäßig erweisen.)

Ganz analog behandeln wir die Gleichung [3, 3]. Hier haben wir:

$$T_{33} = T^{44} g_{43} g_{43} = -\mu Q^2 \tag{21}$$

und somit:

$$R_{33} + \frac{\dot{Q}^2}{\gamma G}\left(Q^2 + \tfrac{1}{2} P\right) = 0. \tag{22}$$

Das Einsetzen der Werte ergibt hier für die linke Seite unter Berücksichtigung von (19) folgenden Ausdruck:

$$\frac{1}{2\gamma G}\left(\ddot{\gamma}\gamma - \tfrac{1}{2}\dot{\gamma}^2\right), \tag{23}$$

dessen Nullsetzen unmittelbar die Bestimmung von γ gestattet:

$$\sqrt{\gamma} = Ax + B. \tag{24}$$

Die Konstante B können wir durch eine Verschiebung des Nullpunktes der Koordinate x zum Verschwinden bringen, die Konstante A durch eine Ähnlichkeitstransformation von ψ zu 1 machen. Dann bleibt also:

$$\gamma = x^2, \tag{25}$$

und nach Gleichung (20) wird:

$$\left.\begin{aligned} \dot{Q} &= 2Cx, \\ Q &= Cx^2 + \alpha; \end{aligned}\right| \tag{26}$$

die Konstante α ist wieder unwesentlich, denn sie wird getilgt durch die Transformation:

$$t' = t - \alpha\psi.$$

Wir setzen also: $\alpha = 0$.

Nun haben wir die beiden Funktionen P und Q der Maßbestimmung bereits ermittelt und zugleich die Gleichungen [3, 3] und [3, 4] befriedigt. Wir wenden uns den noch zu lösenden Gleichungen [1, 1] und [2, 2] zu. Schreiben wir vorerst die Differenz der beiden Gleichungen auf, also:

$$R_{11} - R_{22} = 0. \tag{27}$$

Aus dieser Gleichung fällt der zweite Differentialquotient von G heraus, wir erhalten also zur Bestimmung von G eine Differentialgleichung erster Ordnung. Dieselbe lautet:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2 \lg\sqrt{\gamma}}{dx^2} - \left[\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ 1 \end{Bmatrix}\right] \frac{d \lg\sqrt{\gamma}}{dx} \\ &+ \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ 3 \end{Bmatrix}^2 + 2 \begin{Bmatrix} 1 & 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 1 & 4 \\ 4 \end{Bmatrix}^2 = 0 \end{aligned}\right| \tag{28}$$

und nach Einsetzen der Werte aus unserer Tabelle 14 kommt:

$$\dot{u} = \frac{\dot{Q}^2}{\dot{\gamma}} - \left(\frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}} - \frac{1}{2}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\right). \tag{29}$$

Das zweite Glied verschwindet infolge Gleichung (24). Setzen wir ins erste Glied die ermittelten Werte von Q und γ ein, so haben wir:

$$\left.\begin{aligned} \dot{u} &= 2\,C^2 x \\ u &= C^2 x^2 + \beta \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Die Integrationskonstante β kann durch eine Ähnlichkeitstransformation von x und y aufgehoben werden. Unsere Formeln ändern sich dadurch nicht, nur daß an Stelle von C eine andere Konstante tritt. Wir setzen also $\beta = 0$. Schließlich können wir auch noch über die Konstante C verfügen. Ihr Wert wird nämlich ganz davon abhängig sein, welche Maßeinheit wir als Längeneinheit definieren. Statt der willkürlichen Einheit *cm* wollen wir eine natürliche Einheit einführen, indem wir C zweckmäßigerweise $= 1$ setzen. Dann haben wir also schließlich:

$$u = x^2, \quad \gamma = x^2, \quad Q = x^2, \quad P = x^2 - x^4. \tag{31}$$

Nach Festsetzung einer natürlichen Maßeinheit stellt also unsere Lösung eine ganz bestimmte Geometrie vor, ohne jeden willkürlichen Parameter. Ihre Maßbestimmung lautet:

$$ds^2 = e^{-u}\,(dx^2 + dy^2) + (x^2 - x^4)\,d\psi^2 + 2x^2\,d\psi\,dt - dt^2. \tag{32}$$

Wir haben noch zu zeigen, daß die Gleichungen [1, 1] und [2, 2] auch einzeln erfüllt sind, nicht nur ihre Differenz. Wir wählen die Gleichung [2, 2]:

$$R_{22} + \tfrac{1}{2}\mu G = 0, \tag{33}$$

das heißt:

$$-\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{d\sqrt{g}\begin{Bmatrix}2&2\\1\end{Bmatrix}}{dx} + 2\begin{Bmatrix}2&1\\2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}2&2\\1\end{Bmatrix} + \frac{\dot{Q}^2}{2\gamma} = 0. \tag{34}$$

Die linke Seite ist aber:

$$-\frac{1}{2}\left(\ddot{u} + \frac{\dot{\gamma}}{2\gamma}\,\dot{u} - \frac{\dot{Q}^2}{\gamma}\right), \tag{35}$$

und infolge der Gleichung (29) erhalten wir:

$$\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} - \frac{\dot{\gamma}}{2\gamma} = 0, \tag{36}$$

welche Beziehung in der Tat erfüllt ist.

Unsere in Gleichung (32) aufgestellte Maßbestimmung ist mit Ausnahme der Stelle $x = \infty$ überall regulär. Wohl verschwindet die Determinante bei $x = 0$. Doch ist diese Singularität leicht hebbar. Wir setzen für die Umgebung dieser Stelle:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\cos\psi \\ \eta &= x\sin\psi \\ \zeta &= y \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

und erhalten dadurch das Linienelement — abgesehen von unendlich kleinen Größen zweiter Ordnung — in folgender Form:

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + 2(\xi\, d\eta - \eta\, d\xi)\, dt - dt^2. \tag{38}$$

Wir erkennen aus dieser Transformation, daß $x = 0$ die Symmetrieachse unserer Welt ist und daß in der Umgebung dieser Achse x, ψ und y die Bedeutung von euklidischen Zylinderkoordinaten haben. x ist der Radiusvektor der Grundebene, ψ die zugehörige Amplitude und die Höhe. φ variiert also zwischen 0 und 2π, x variiert, von 0 angefangen, auf der positiven Zahlenachse. Einer besonderen Erwähnung bedarf die Stelle $x = 1$. Hier verschwindet die Determinante des räumlichen Linienelementes, und für $x > 1$ wird die Determinante sogar negativ. Der Raumteil des Linienelementes hat also, von hier angefangen, eine negative Dimension neben zwei positiven. Das scheint ein paradoxes Ergebnis zu sein, ist es aber in Wirklichkeit nicht. Wir dürfen nämlich nicht vergessen, daß die Flächen $t = \text{const}$ irgendwelche Durchschnitte des Weltraumes darstellen, denen eine objektive Bedeutung nicht zuzuschreiben ist. Man dürfte sie keineswegs etwa als „Raum" interpretieren. Einen Raum an sich gibt es ja nicht, und mit den „Lokalräumen" in den einzelnen Punkten haben diese Schnitte nichts zu tun. Sie berühren an der Stelle $x = 1$ den Nullkegel und dringen dann in denselben ein — daher die negative Dimension. Die Punkte, die zur Koordinate $x = 1$, sind aber genau so regulär wie irgendwelche andere Punkte, obwohl sie — wie wir sehen werden, für einen Beobachter, der sich auf der Symmetrieachse befindet, in der Tat eine exzeptionelle Rolle spielen. Die einzige wirkliche Singularität unserer Weltfläche liegt an der Stelle $x = \infty$. Dieselbe liegt durchaus im Endlichen, wie wir erkennen, wenn wir uns auf einer x-Linie vom Mittelpunkt aus diesem Punkte zu bewegen. Die gesamte Bogenlänge ist dann:

$$s = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Wir sehen auch, daß große Werte von x nur eine sehr kleine Umgebung dieses Punktes umgrenzen und daß der überwiegende Teil der Weltfläche auf kleinere Werte von x beschränkt ist. Doch kann unsere Lösung bis an $x = \infty$ heran ohnedies nicht in Frage kommen. Die Massendichte [s. Gleichung (10)] ändert sich nämlich mit x nach folgendem Gesetz:

$$\mu = 4\, e^{x^2}. \tag{39}$$

Sie nimmt also für wachsende x enorm zu. Diese Massendichte ist natürlich die mittlere kosmische Dichte, die zustande kommt, wenn

wir die Massen der Sterne auf den ganzen Zwischenraum zwischen denselben gleichmäßig verteilen. Nimmt die Dichte zu, so muß der gegenseitige Abstand der Sterne abnehmen. Schließlich nähern sie sich einander so stark, daß Nebelbildung erfolgt. Dann treten aber Druckkräfte auf, und unser Ansatz für den Materietensor wird hinfällig. So besteht also die Möglichkeit, daß durch die Kraftwirkungen der Materie die singuläre Spitze an der Stelle $x = \infty$ abgeglättet wird.

3. Die geodätischen Nullinien.

Alle unsere Kenntnisse vom Universum werden durch Lichtstrahlen vermittelt. Es ist also eine Grundaufgabe jeder Kosmologie, vor allen Dingen die Gesetze der Lichtausbreitung festzustellen. Das ist eine rein geometrische Frage, da die Ausbreitung des Lichtes im Vakuum längs geodätischer Nullinien erfolgt. Wir wollen also jetzt den Verlauf der geodätischen Nullinien berechnen.

Die Gleichung der geodätischen Linien lautet ganz allgemein:

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} m\ n \\ i \end{matrix} \right\} \frac{dx_m}{ds} \frac{dx_n}{ds}, \tag{40}$$

s bedeutet hierbei die Bogenlänge der geodätischen Linie. Es ändert sich aber nichts an den Gleichungen, wenn man an Stelle von s eine ihr proportionale Größe ϱ als unabhängige Variable wählt, indem man

$$s = \alpha \varrho \tag{41}$$

setzt. Im allgemeinen ist diese Transformation belanglos, nicht aber im Falle der geodätischen Nullinien, wo $\alpha = 0$ wird. Wir wollen also ϱ schreiben statt s und vorerst die Differentialgleichungen für ψ und t aufstellen. Diese lauten nach der Tabelle 14:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d\varrho^2} + \frac{\dot{P} + \dot{Q}Q}{\gamma} \frac{dx}{d\varrho} \frac{d\psi}{d\varrho} + \frac{\dot{Q}}{\gamma} \frac{dx}{d\varrho} \frac{dt}{d\varrho} = 0, \\ \frac{d^2 t}{d\varrho^2} + \frac{\dot{P}Q - \dot{Q}P}{\gamma} \frac{dx}{d\varrho} \frac{d\psi}{d\varrho} + \frac{\dot{Q}Q}{\gamma} \frac{dx}{d\varrho} \frac{dt}{d\varrho} = 0. \end{aligned}\right| \tag{42}$$

Wir können durch $\frac{dx}{d\varrho}$ dividieren und bekommen dann in bezug auf $\frac{d\psi}{d\varrho}$ und $\frac{dt}{d\varrho}$ ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung. Es sei für einen Augenblick gesetzt:

$$\frac{d\psi}{d\varrho} = v, \quad \frac{dt}{d\varrho} = w.$$

Dann haben wir also:

$$\left.\begin{aligned} \dot{v} + \frac{P + \dot{Q}Q}{\gamma} v + \frac{\dot{Q}}{\gamma} w = 0, \\ \dot{w} + \frac{\dot{P}Q - \dot{Q}P}{\gamma} v + \frac{\dot{Q}Q}{\gamma} w = 0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Ein erstes Integral dieser Gleichungen läßt sich folgendermaßen leicht finden. Wir können a priori einsehen, daß in einer stationären Welt keine Rotverschiebung auftritt. Denn die Zeit, während welcher ein Lichtimpuls hinwegstreicht, ist für alle getroffenen Punkte dieselbe. Nun besteht aber — wie ich in einer früheren Arbeit[1]) gezeigt habe — eine einfache Beziehung zwischen der Rotverschiebung und den beiden Winkeln, den Lichtquelle und Beobachter mit der sie verbindenden Nullinie einschließen. Tritt keine Rotverschiebung auf, so sind diese beiden Winkel gleich. In einer stationären Welt muß also eine geodätische Nullinie alle von ihr getroffenen materiellen Weltlinien unter demselben Winkel schneiden. Der Kosinus dieses Winkels ist in unserem Fall gegeben durch

$$\cos\gamma = \frac{i}{\alpha}\left(\frac{dt}{d\varrho} - Q\frac{d\psi}{d\varrho}\right).$$

Soll dieser Winkel längs der ganzen Nullinie konstant sein, so bedeutet das also:

$$\frac{dt}{d\varrho} - Q\frac{d\psi}{d\varrho} = \text{const}.$$

In der Beziehung

$$w - Qv = \text{const}$$

haben wir aber ein erstes Integral unserer Differentialgleichungen (43). In der Tat, führen wir an Stelle von w eine neue Funktion ω ein, indem wir setzen:

$$w = \omega + Qv.$$

So erhalten wir für ω die Beziehung:

$$\dot{\omega} = 0,$$

also

$$\omega = \text{const}.$$

Der Wert dieser Konstanten hängt nur von der für ϱ gewählten Maßeinheit ab, und wir können ihn ohne Einschränkung der Allgemeinheit $= 1$ setzen. Es ist dann:

$$w = 1 + Qv. \tag{44}$$

---

[1]) Siehe ZS. f. Phys. **17**, 168, 1923.

Führen wir diesen Wert in die erste Gleichung ein, so läßt sich dieselbe in folgender Form schreiben:

$$\gamma \dot{v} + \dot{\gamma} v + \dot{Q} = 0,$$

also

$$\gamma v + Q = B. \tag{45}$$

Wir können also jetzt v und w in expliziter Form anschreiben:

$$\frac{d\psi}{d\varrho} = \frac{B - Q}{\gamma}, \tag{46}$$

$$\frac{dt}{d\varrho} = \frac{P + BQ}{\gamma}. \tag{47}$$

Es fehlen noch $\frac{dx}{d\varrho}$ und $\frac{dy}{d\varrho}$. Letzteres ergibt sich sofort aus der Gleichung:

$$\frac{d^2y}{d\varrho^2} - \dot{u}\,\frac{dx}{d\varrho}\,\frac{dy}{d\varrho} = 0, \tag{48}$$

also

$$d \log \frac{\frac{dy}{d\varrho}}{\frac{dx}{}} = \dot{u},$$

$$\frac{dy}{d\varrho} = A e^{u}. \tag{49}$$

Das $\frac{dx}{d\varrho}$ ergibt sich schließlich aus der Forderung, daß für Nullinien $ds = 0$ sein muß. Das bedeutet in unserem Falle:

$$e^{-u}\left[\left(\frac{dx}{d\varrho}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varrho}\right)^2\right] + P\left(\frac{d\psi}{d\varrho}\right)^2 + 2Q\,\frac{d\psi}{dt}\,\frac{dt}{d\varrho} - \left(\frac{dt}{d\varrho}\right)^2 = 0 \tag{50}$$

und daraus ergibt sich:

$$e^{-u}\left(\frac{dx}{d\varrho}\right)^2 = \frac{P + B(2Q - B)}{\gamma} - A^2 e^{u}. \tag{51}$$

An Hand dieser Relation können wir an Stelle von ϱ die Veränderliche x als unabhängige Variable in die Gleichungen (49), (46) und (47) einführen, und erhalten dann durch je eine Quadratur y, ψ und t als Funktionen von x, indem wir nur für P, Q und u ihre bereits früher ermittelten Werte (31) einzusetzen haben.

Betrachten wir nun einen Beobachter, der sich auf der Symmetrieachse der Welt befindet. Diese Voraussetzung kann ja in guter Annäherung für die Lage unserer Sonne im Weltraum in der Tat mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit angenommen werden. Nun ist für $x = 0$: $P = Q = \gamma = 0$. Aus Gleichung (51) erkennen wir, daß hier $\frac{dx}{d\varrho}$ unendlich groß würde, wenn die Konstante B von 0 ver-

schieden wäre. Für alle Lichtstrahlen, die durch die Symmetrieachse gehen, muß also $B = 0$ sein. Die rechte Seite der Gleichung (51) vereinfacht sich jetzt, und wenn wir für die Funktionen P, Q und u ihre Werte einsetzen, erhalten wir:

$$e^{-x^2}\left(\frac{dx}{d\varrho}\right)^2 = 1 - x^2 - A^2 e^{x^2}. \tag{52}$$

Die rechte Seite ist eine mit wachsendem x monoton abnehmende Funktion. Sie darf aber nicht negativ werden. Wir sehen also, daß für alle Lichtstrahlen, die durch die Symmetrieachse gehen (und auch für andere Punkte der Welt liegen die Verhältnisse analog), x nicht über einen maximalen Wert wachsen kann. Dieser Wert hängt von der Konstanten A ab, deren Variabilitätsbereich ihrerseits zwischen 0 und 1 eingeschlossen sein muß. Der größte Wert, den x überhaupt erreichen kann, ist $x = 1$, bei $A = 0$. Von solchen Gebieten des Weltraumes, wo $x > 1$ ist, kann ein Beobachter auf der Symmetrieachse durch Lichtsignale (aber auch durch andere Wirkungen, die sich ja nicht mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten können) überhaupt nie etwas erfahren. Ist $A = 1$, so muß $x = 0$ sein. Es entspricht dieser Fall einem Lichtstrahl, der in der Symmetrieachse verläuft. Um einen klaren Überblick über die obliegenden Verhältnisse zu bekommen, wollen wir den Weltraum auf einen euklidischen Koordinatenraum abbilden. Wir sagten schon, daß um die Symmetrieachse herum x, ψ und y die Bedeutung von euklidischen Zylinderkoordinaten haben. Wir konstruieren nun einen euklidischen Bildraum, auf welchen die Punkte des Weltraumes so abgebildet werden, daß wir ihre Koordinaten überall als Zylinderkoordinaten auftragen. Auch in diesem Bildraum herrscht natürlich Rotationssymmetrie, außerdem ist er zylindrisch in bezug auf die y-Achse. Wegen der Unabhängigkeit der Maßbestimmung von y ist nämlich die y-Koordinate des Beobachters durchaus gleichgültig. Bewegen wir uns im Weltraum längs der Symmetrieachse nach oben — oder auch längs einer anderen y-Linie —, so bleibt das durchschnittliche Weltbild, also auch die scheinbare Verteilung der Sterne, gänzlich unverändert. Insbesondere umgibt uns z. B. die Milchstraße dauernd als größter Kreis. Ist die y-Koordinate periodisch — und das muß sie sein, wenn der Weltraum geschlossen sein soll —, so kehren wir schließlich nach Rücklegung einer endlichen Strecke von der entgegengesetzten Seite her in unseren Ausgangspunkt zurück.

Wir wollen in unserem Bildraum den Verlauf einer Lichtbahn untersuchen. Es sei vorerst $A = 0$, dann ist $y = 0$: der Licht-

strahl verläuft in einer zur Symmetricachse senkrechten Ebene: in der Milchstraßenebene. x und ψ sind Polarkoordinaten dieser Ebene. Es ist aber jetzt nach Gleichung (52) und (46):

$$\frac{dx}{d\varrho} = \sqrt{1-x^2}\,.\,e^{\frac{x^2}{2}}$$
$$\frac{d\psi}{d\varrho} = -1,$$

und so wird die Gleichung der Lichtbahn durch folgende Differentialgleichung bestimmt:

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{53}$$

Setzen wir:

$$x = \sin w, \tag{54}$$

so ist:

$$\psi = -\int e^{-\frac{\sin^2 w}{2}}\,dw = -e^{-\frac{1}{4}}\int e^{\frac{\cos 2w}{4}}\,dw. \tag{55}$$

Wir haben die so entstehende Kurve in Fig. 1 aufgezeichnet.

Verfolgen wir die Bahn des Lichtstrahls vom Mittelpunkt O ausgehend. Die Krümmung der Bahn nimmt immer mehr zu und schließlich hat der Radiusvektor seinen Maximalwert 1 erreicht, der Lichtstrahl biegt um und beschreibt spiegelbildlich dieselbe Bahn nach rückwärts. Er kehrt schließlich wieder in den Mittelpunkt zurück. Wir projizieren natürlich sämtliche Sterne, die auf die Lichtbahn fallen, in Richtung der Ankunftstangente OP' auf die Himmelskugel. Die Anzahl der Sterne, die das Licht auf seiner Bahn antrifft, nimmt anfänglich zu — die Sterne sollen durchschnittlich gleiche Massen haben — wegen Zunahme der kosmischen Dichte, dann, nach erfolgter Berührung des Grenzkreises $x = 1$, wieder ab. Die ganze Kurve kann natürlich um den Mittelpunkt herum beliebig gedreht werden, doch müssen wir die Umlaufrichtung immer beibehalten. Die Bahn des Lichtes ist nicht umkehrbar. Den Punkt P erblicken wir in der Richtung OP'. Senden wir aber in dieser Richtung ein Lichtsignal aus, so erreicht dieses den Punkt P nicht. Wir müssen es in Richtung des gestrichelten Pfeiles OP'' absenden, damit es nach P gelange.

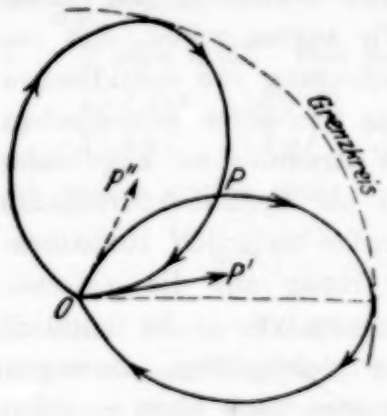


Fig. 1.
Bahn des Lichtstrahls in der Milchstraßenebene.

Die höheren galaktischen Breiten verhalten sich in bezug auf Projektion der Lichtbahn auf die Grundebene ganz ähnlich. Auch hier bekommen wir in den Mittelpunkt zurücklaufende Kurven, nur daß der Grenzkreis sich immer mehr zusammenzieht. Die Bahn des Lichtes bildet eine Art Schraubenlinie, mit immer steiler werdender Ganghöhe. Da nach niedrigeren Breiten zu immer sternreichere Gegenden in Mitleidenschaft gezogen werden, hätten wir qualitativ eine Deutung gefunden für die Zunahme der Sternzahl bei zunehmender Entfernung vom galaktischen Pol. Doch sehen wir ohne weiteres, daß wir quantitativ nicht durchkommen. Die kosmische Dichte ist im Grenzkreis der galaktischen Ebene nur auf das e-fache (also nicht einmal dreifache) gestiegen, gegenüber der Dichte im Mittelpunkt. Wir wenden uns jetzt den kosmologischen Gleichungen zu und werden sehen, daß in der Tat durch das kosmologische Glied der Radius des Grenzkreises außerordentlich stark hinausgeschoben werden kann.

4. Ausdehnung auf die kosmologischen Gleichungen.

Gegenüber dem in Kap. 2 behandelten Gleichungssystem (3) haben wir jetzt das folgende System zu lösen:

$$R_{ik} + \lambda g_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T. \tag{56}$$

Der Unterschied gegenüber den früheren Gleichungen ist zweifacher Art. Einerseits haben wir für $T = \mu$ einen anderen Wert einzusetzen als (16), andererseits haben wir auf der linken Seite überall das kosmologische Glied zu addieren, oder auf der rechten Seite abzuziehen. Wir wollen die Veränderungen, die mit den einzelnen Gleichungen vor sich gehen, der Reihe nach durchgehen.

Vor allen Dingen haben wir jetzt für μ die Beziehung:

$$\mu = 2\lambda + \frac{\dot{Q}^2}{\gamma G}. \tag{57}$$

Die frühere Massendichte ist also um 2λ zu vergrößern. Betrachten wir nun die Gleichung [3, 4], so erkennen wir, daß die Veränderung der Massendichte und die Wirkung des kosmologischen Gliedes sich gerade kompensieren. Diese Gleichung bleibt also unverändert und darum auch die aus ihr abgeleitete Beziehung (19) sowie (20). Die Gleichung [3, 3] erfährt aber eine Veränderung. Auf der rechten Seite von (28) haben wir statt 0 zu setzen: $-2\lambda G$, so daß wir nach (23) jetzt für γ folgende Differentialgleichung erhalten:

$$\ddot{\gamma}\,\gamma - \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 = -4\lambda\gamma^2 e^{-u}. \tag{58}$$

Die Gleichung [1, 1] — [2, 2] bleibt unverändert, somit also auch die Bestimmungsgleichung (29) für u. Verwerten wir hierin die soeben gefundene Beziehung für γ und setzen auch für $\dot{Q}$ seinen Wert aus (20) ein, so erhalten wir:

$$\dot{u} = 4\frac{\gamma}{\dot{\gamma}}(C^2 + \lambda e^{-u}). \tag{59}$$

Differenzieren wir nun diese Gleichung logarithmisch, so können wir γ und u separieren, dann kommt nämlich:

$$\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} - \frac{\ddot{\gamma}}{\dot{\gamma}} - 4\lambda e^{-u}\frac{\gamma}{\dot{\gamma}},$$

oder unter Berücksichtigung von (58):

$$\frac{\ddot{u}}{\dot{u}} = \frac{1}{2}\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}. \tag{60}$$

Auch hier besteht also die Gleichung (36), die sich ebenso auch aus der Gleichung [2, 2] ableiten ließe. Das Erfülltsein der letzten Gleichung ist somit wieder bereits eine Folge der übrigen.

Die Gleichung (60) läßt einerseits γ auf u zurückführen, indem sie ohne weiteres integrierbar ist:

$$\sqrt{\gamma} = A\dot{u}, \tag{61}$$

andererseits folgt durch Multiplikation mit (59) eine Differentialgleichung für u allein:

$$\ddot{u} = 2(C^2 + \lambda e^{-u}). \tag{62}$$

Haben wir u dieser Gleichung gemäß bestimmt, so haben wir nach (61) auch γ und nach (20) auch Q erhalten.

Die Gleichung (62) läßt nun ein erstes Integral zu, durch Multiplikation mit $\dot{u}$. Dann können wir auf beiden Seiten integrieren und erhalten

$$\frac{\dot{u}^2}{4} = C^2 u - \lambda e^{-u} + B, \tag{63}$$

durch eine Quadratur ergibt sich dann x als eine transzendente Funktion von u, aus deren Umkehrung wir schließlich u als Funktion von x bestimmen können. Über die beiden hier auftretenden Integrationskonstanten dürfen wir auch hier wieder durch eine passende Normierung von Nullpunkt und Maßstab der x-Koordinate frei verfügen. Dasselbe gilt von der Konstanten A durch Normierung der Maßeinheit für ψ. Wir wollen, daß um die Symmetrieachse herum x, ψ und y wieder die Bedeutung von euklidischen Zylinderkoordinaten haben sollen. Dann muß an der Stelle $x = 0$ sein:

$$u = 0, \quad \dot{u} = 0, \quad \gamma = x^2. \tag{64}$$

Die Reihenentwicklung für u um $x = 0$ herum muß also mit einem quadratischen Glied anfangen, die Konstante B der Gleichung (64) muß $= \lambda$ gesetzt werden. Schließlich können wir die beiden Konstanten C und λ durch Einführung einer natürlichen Maßeinheit auf einen einzigen Parameter zurückführen. Diese Maßeinheit legen wir durch die Forderung fest, daß der Koeffizient des quadratischen Gliedes in der Reihenentwicklung für u gerade $= 1$ sein soll. Dann muß in Gleichung (61) $A = {}^1/_2$ gesetzt werden, und nach Gleichung (62) muß zwischen C und λ folgende Beziehung bestehen:

$$C^2 + \lambda = 1. \tag{65}$$

Da sowohl C wie λ positiv sind, können sie also nur zwischen 0 und 1 variieren. Wir können an ihrer Stelle einen Winkel ω als Fundamentalparameter einführen, den wir so definieren, daß sei:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\lambda} &= \sin\omega, \\ C &= \cos\omega. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Unsere fundamentalen Beziehungen ergeben sich also schließlich in folgender Zusammenstellung:

$$\left.\begin{aligned} \gamma &= C^2 u + \lambda(1 - e^{-u}), \\ Q &= C u, \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

$$\frac{\dot{u}^2}{4} = C^2 u + \lambda(1 - e^{-u}), \tag{68}$$

$$\mu = 2\lambda + 4c^2 e^u, \tag{69}$$

$$C^2 + \lambda = 1. \tag{65}$$

Die Gleichung (68) läßt sich in zwei extremen Fällen elementar integrieren. Entweder wenn λ oder wenn C verschwindet. Der erste Fall entspricht dem Parameterwinkel $\omega = 0$. Dann ist $C = 1$ und $u = x^2$, — wir kommen genau auf unsere frühere Lösung der ursprünglichen Feldgleichungen zurück. Der zweite Fall entspricht dem Parameterwinkel $\omega = \frac{\pi}{2}$. Dann ist $\lambda = 1$. Setzen wir:

$$e^{-u} = \cos^2\varphi, \tag{70}$$

so erhalten wir folgendes Linienelement:

$$ds^2 = d\varphi^2 + \cos^2\varphi\, dy^2 + \sin^2\varphi\, d\psi^2 - dt^2. \tag{71}$$

Das ist aber nichts anderes, wie die Einsteinsche Zylinderwelt. Denn der räumliche Teil des Linienelementes stellt eine Kugel des vierdimensionalen Raumes vor, mit dem Radius 1. Allerdings ersehen wir aus Gleichung (70), daß das Variabilitätsintervall von φ auf 0 bis π 2 beschränkt ist. Darum haben wir es mit einer Kugel im Riemannschen Sinne zu tun, wo jeder Punkt mit seinem Gegenpol zusammenfällt.

Für mittlere Werte von ω führt die Quadratur der Gleichung (68) nicht mehr auf elementare Funktionen. Doch ist es gar nicht nötig, diese Gleichung zu integrieren. Da wir P und Q als Funktionen von u bestimmt haben, können wir anstatt x einfach u als neue Koordinate einführen. Es verändert sich dadurch nur g_{11} und die neuen Koordinaten sind nicht mehr isometrisch. Das neue g_{11} ist nämlich:

$$g_{11} = \frac{e^{-u}}{\dot{u}^2} = \frac{1}{4}\,\frac{e^{-u}}{C^2 u + \lambda(1-e^{-u})}, \tag{72}$$

während die anderen Komponenten lauten:

$$\left.\begin{aligned} g_{22} &= e^{-u}, \\ g_{33} &= P = C^2(u-u^2) + \lambda(1-e^{-u}), \\ g_{34} &= Q = Cu, \\ g_{44} &= -1. \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Wir haben also in den Koordinaten u, y, ψ auch dieses Mal die explizite Form des Linienelements auffinden können.

Wir kommen jetzt zur Bestimmung der Lichtbahnen in unserer Welt. Die Formeln hierzu liegen bereits in den Gleichungen (46), (47), (49), (51) fertig vor, denn bei ihrer Ableitung haben wir auf die Feldgleichungen keine Rücksicht genommen, nur die allgemeine Form des Linienelements vorausgesetzt. Wir brauchen also nur für P und Q unsere neuen Werte einzusetzen. Für die Symmetrieachse haben wir auch dieses Mal $B = 0$.

Es interessiert uns vor allem, den Radius des Grenzkreises festzustellen, außerhalb welchem jede Einwirkung auf den Mittelpunkt unmöglich ist. Wir sahen schon, daß diese Grenze durch die Bedingung $\frac{dx}{d\varrho} = 0$ festgesetzt wird. Der Wirkungsbereich zieht sich um so mehr zusammen, aus je höheren galaktischen Breiten das Licht ankommt. Am größten ist er in der Milchstraße, — also in der Ebene $y = 0$. Hier ist $A = 0$ und als Bedingung für den Grenzkreis haben wir die Beziehung:

$$P = 0. \tag{74}$$

Nach unseren Formeln bedeutet dies folgende Gleichung für u:

$$u - u^2 + \frac{\lambda}{c^2}(1-e^{-u}) = 0. \tag{75}$$

Wir sehen jetzt die Wirkung des kosmologischen Gliedes. Das Verhältnis $\frac{\lambda}{c^2} = \operatorname{tg}^2\omega$ kann beliebig groß werden. Dadurch wächst aber

auch die Wurzel dieser Gleichung in beliebigem Maße. Setzen wir der Kürze halber:

$$\operatorname{tg}\omega = k. \tag{76}$$

Für genügend große Werte von u können wir e^{-u} neben 1 vernachlässigen und haben dann einfach eine quadratische Gleichung zu lösen:

$$u - u^2 + k^2 = 0,$$
$$u = \frac{1}{2} + \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}. \tag{77}$$

Für große Werte von k ist angenähert:

$$u = k. \tag{78}$$

Der Radius des Grenzkreises kann also beliebig weit hinausgeschoben werden und damit auch die Massendichte in der Milchstraße unbegrenzt ansteigen. Man kann also jetzt versuchen, das Phänomen der Milchstraße auch quantitativ deuten zu wollen. Nehmen wir, um ein Beispiel zu nennen, im Grenzkreis eine 1000 mal größere Dichte an als in der Mitte, so müßte k ungefähr $= 11$ sein. Das entspräche einem Parameterwinkel von $\omega = 84{,}5°$. Dieses Verhalten der Lösung für große k-Werte entspricht eigentlich nicht unserer Erwartung. Je mehr sich ω an $90°$ nähert, je größer also k wird, um so mehr müßten wir uns an die Einsteinsche Zylinderwelt annähern. Da kann aber von einem Grenzkreis und einer Materienanhäufung sicher nicht die Rede sein — ist doch die Materie dann überall gleichmäßig verteilt. Demgegenüber finden wir, daß der „Milchstraßeneffekt" gerade mit wachsendem k immer schärfer zum Ausdruck kommt. Die Sachlage in diesem scheinbaren Widerspruch ist die, daß unsere Lösung bei $u = \infty$ eine Singularität hat. Diese Singularität wird auch bei einer Annäherung an die Zylinderwelt nicht verwischt. Die Massenverteilung wird wohl immer gleichmäßiger und das Gebiet hoher Massendichten zieht sich auf eine immer schmälere Zone zurück. Sie schrumpft schließlich beim Übergang zum Einsteinschen Kugelraum auf den Äquator der Kugel zusammen. Es bleibt aber hier trotzdem ein Massenhorizont von unendlich großer Masse bestehen. Wohl hat dieser Grenzübergang nur theoretisches Interesse, denn wir sagten ja schon, daß bei hohen Dichten unser Ansatz für den Materietensor hinfällig wird und so die Singularität bei $u = \infty$ überhaupt nicht zustandekommt. Aber es ist immerhin bemerkenswert, daß die überall singularitätenfreie Zylinderwelt innerhalb unseres Lösungssystems nicht approximiert werden kann, und nicht zu den eigentlichen Lösungen gehört, obwohl sie formal unter ihnen anzutreffen ist.

5. Die Abstandsfunktion der Lichtintensität.

Einen wichtigen Fingerzeig in bezug auf die kosmologische Struktur des Weltalls geben uns die Sternabzählungen, die in verschiedenen Himmelsgegenden vorgenommen werden und die Anzahl der Sterne pro Quadratgrad angeben. Selbstverständlich muß von Schwankungen zufälliger Art abgesehen und statistische Mittelwerte gebildet werden. Insbesondere ist es berechtigt, die Grundstruktur des Weltalls rotationssymmetrisch anzunehmen und die Abweichungen davon als Schwankungen zu betrachten. Wir haben dann Mittelwerte zu bilden aus den Sternzahlen verschiedener galaktischer Länge bei ein und derselben galaktischen Breite und erhalten so das „typische Sternsystem" v. Seeligers [1]). Die Zahl der Sterne pro Flächeneinheit hängt aber nicht nur von der Himmelsgegend ab, sondern auch davon, bis zu welcher Größenordnung sie berücksichtigt wurden. Die einzelnen Größenklassen definieren verschiedene Abstufungen der scheinbaren Helligkeit. Diese aber hängt einerseits von der absoluten Helligkeit des Sternes ab, andererseits von seiner Entfernung. Um die scheinbare Helligkeit auf die absolute zurückzuführen, müssen wir das Gesetz kennen, nach welchem die Intensität des Lichtes mit der Entfernung abnimmt. Dieses Gesetz wollen wir jetzt für unsere oben gefundene Lösung ermitteln, da wir erst dann in die Lage gesetzt werden, über die Verteilung der Sternzahlen auf die verschiedenen Größenklassen und verschiedenen galaktischen Breiten etwas auszusagen.

Denken wir uns ein System von Lichtstrahlen gegeben, ausgehend von einem leuchtenden Punkt, und stellen wir uns die Aufgabe, die Lichtintensität in irgend einem Punkte des Raumes zu bestimmen. Zu diesem Zwecke bringen wir in den fraglichen Punkt eine unendlich kleine absorbierende Oberfläche df, orientieren sie senkrecht zu den Lichtstrahlen, und messen die während einer bestimmten Zeit auffallende Strahlungsenergie. Beziehen wir diese Energie auf die Flächeneinheit und Zeiteinheit, so haben wir damit ein Maß für die Lichtintensität bekommen. Durch das Flächenelement df wird ein bestimmtes, unendlich schmales Bündel von Lichtstrahlen begrenzt. Nach dem Gesetz von der Erhaltung der Energie strömt in den verschiedenen Querschnitten überall pro Zeiteinheit dieselbe Energie hindurch. Daraus folgt aber, daß in zwei Punkten P und Q die Lichtintensitäten sich umgekehrt verhalten wie die Querschnitte:

$$\frac{J_P}{J_Q} = \frac{df_Q}{df_P}. \tag{79}$$

[1]) Siehe z. B. H. Kienle, Die räumliche Dichteverteilung im Sternsystem. Die Naturwissenschaften **10**, 679, 1922.

Setzen wir die Lichtintensität in der Entfernung 1 von der Lichtquelle $= 1$, so ist die Lichtintensität in irgend einem Raumpunkt P gegeben durch folgendes Verhältnis:

$$J = \frac{d\omega}{df}, \tag{80}$$

$d\omega$ bedeutet hier den Raumwinkel des unendlichen schmalen Strahlenbündels, df seinen Querschnitt im Punkte P.

Wir brauchen diesen Gedankengang nur ins Vierdimensionale zu erheben, um ihn unverändert auch in die allgemeine Relativitätstheorie zu übertragen. Betrachten wir eine unendlich schmale Weltröhre, die gebildet wird von der Gesamtheit aller Lichtstrahlen (geodätischen Nullinie), welche während der Zeit dt in den Raumwinkel $d\omega$ ausgesandt werden. Wenn keine Stauung der Energie eintreten soll, so muß es gleichgültig sein, an welcher Stelle der Lichtröhre wir unser absorbierendes Flächenelement anbringen, wenn nur diese so dimensioniert ist, daß sie den Röhrenquerschnitt gerade ausfüllt. Wir sehen also, daß wir auch hier die Lichtintensität durch den Querschnitt der Weltröhre messen können, indem die Beziehung (81) auch hier ihre Gültigkeit behält, wobei wir nur zu vergegenwärtigen haben, daß jetzt df_P und df_Q Flächenelemente des vierdimensionalen Raumes bedeuten.

Unsere Aufgabe besteht also jetzt darin, den Querschnitt einer unendlich engen Weltröhre, deren Mantellinien aus zum leuchtenden Punkt gehörenden geodätischen Nullinien bestehen, an zwei Punkten miteinander zu vergleichen. Zur Lösung dieser Aufgabe stellen wir folgende allgemeine Überlegung an. Die einzelnen Glieder unseres Bündels von geodätischen Nullinien seien durch folgende Gleichungen charakterisiert:

$$\left.\begin{aligned} y &= f_1(x, \alpha, \beta, \gamma), \\ z &= f_2(x, \alpha, \beta, \gamma), \\ t &= f_3(x, \alpha, \beta, \gamma). \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Sind die Parameter α, β, γ konstant, während x variiert, so soll das eine bestimmte Linie unseres Bündels ergeben. Verändern wir die Parameterwerte kontinuierlich, so bekommen wir die benachbarten Nullinien. Da es sich um ein unendlich schmales Bündel handelt, ist der Variabilitätsbereich der Parameter unendlich klein.

Wir können die Gleichungen (81) auch als Transformationsgleichungen auffassen, wenn wir an ihrer Hand die Koordinaten y, z, t durch die Parameter α, β, γ ersetzen. Die Berechnung des Querschnittes df gestaltet sich nun sehr einfach durch eine Beziehung, die wir zum leicht berechenbaren Volumelement der Lichtröhre her-

stellen können. Wir sagten schon, daß wir die absorbierende Fläche, mit deren Hilfe wir die Lichtintensität messen, so orientieren wollen, daß sie auf der Bahn der Lichtstrahlen senkrecht stehen soll. Und zwar diese Orthogonalität gemessen in dem Lokalraum, den wir im Beobachtungspunkt P immer einführen können. Das Linienelement habe da die Form:

$$ds^2 = d\sigma^2 - dt^2, \tag{82}$$

wobei $d\sigma$ das Linienelement des Lokalraumes bedeutet. Das Volumelement der Weltröhre ist nun gleich Querschnitt mal Höhenelement. Dieses Höhenelement ist wegen der orthogonalen Orientierung nichts anderes als der unendlich kleine Abstand $d\sigma$ zwischen zwei benachbarten Punkten $x = \xi$ und $x = \xi + dx$ eines Lichtstrahls, gemessen im Lokalraum. Wir haben also die Beziehung

$$dv = df\,d\sigma. \tag{83}$$

Das Volumelement dv zwischen einem Querschnitt $x = \xi$ und $x = \xi + dx$ ist aber bestimmt durch:

$$dv = \sqrt{g'}\,dx\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma,$$

somit kommt also für df:

$$df = \sqrt{g'}\frac{dx}{d\sigma}\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma. \tag{84}$$

Das Produkt $d\alpha\,d\beta\,d\gamma$ bleibt längs der ganzen Lichtröhre konstant. Wir setzen es $= \varepsilon$. Weiterhin sehen wir, daß die explizite Ausführung der Transformation (81) gar nicht erforderlich ist, da wir nur die Determinante g' des transformierten Systems brauchen. Diese berechnet sich aber aus der ursprünglichen Determinante g und der Funktionaldeterminante der Transformation. Letztere wollen wir mit Δ bezeichnen. Dann ist:

$$\sqrt{g'} = \sqrt{g}\,\Delta \tag{85}$$

und wir haben

$$df = \varepsilon\sqrt{g}\,\Delta\frac{dx}{d\sigma}. \tag{86}$$

Nun ist die Lichtintensität umgekehrt proportional zu df, wir erhalten also für sie:

$$J = \frac{\varkappa\quad d\varrho}{\sqrt{g}\,\Delta\,d\sigma}, \tag{87}$$

wo $\varkappa$ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Illustrieren wir die Durchführung dieser Rechnung an einem einfachen Beispiel. Berechnen wir die Abnahme der Lichtintensität für eine Lichtquelle, die sich auf der Symmetrieachse unserer Welt befindet, während der Beobachter sich sukzessive bis zum Grenzkreis

entfernt. Wir wollen der Einfachheit halber nur die Milchstraße ins Auge fassen.

In unserer stationären Welt haben wir noch die Vereinfachung, daß die Berücksichtigung der vierten Dimension überflüssig wird. Wir brauchen nur y und x (besser gesagt ψ) zu transformieren und haben es daher nur mit zwei Parametern: α und β zu tun.

In den Gleichungen (46), (49) und (51) haben wir jetzt $B = 0$ zu setzen, während A in einem unendlich kleinen Intervall um Null herum zu variieren ist. Die Differentialgleichungen zur Bestimmung von y und ψ als Funktionen von x lauten folgendermaßen:

$$\frac{dy}{dx} = A\sqrt{\frac{\gamma}{P}}\, e^{\frac{u}{2}}$$

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{Q}{\sqrt{\gamma P}}\, e^{-\frac{u}{2}}. \tag{88}$$

Denken wir uns P, Q und u als Funktionen von x gegeben, so können wir diese Gleichungen durch je eine Quadratur lösen und die Lösung in folgender Form aufschreiben:

$$y = A\,Y(x)$$

$$\psi = f(x) + p. \tag{89}$$

Es bedeutet hierbei $Y(x)$ das folgende Integral:

$$Y(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{\gamma}{P}}\, e^{\frac{u}{2}}\, dx. \tag{90}$$

Lassen wir die Integrationskonstanten A und p in einem unendlich kleinen Bereich um Null herum variieren, so haben wir ein unendlich schmales Lichtstrahlenbündel, welches ausgesandt wird von einer Lichtquelle an der Stelle $x = 0$, $y = 0$, in der Richtung $\psi = 0$. Es sind also jetzt A und p diejenigen Parameter, die wir im vorhergehenden mit α, β bezeichnet haben. Wir bilden vorerst die Funktionaldeterminante Δ in bezug auf sie. Dieselbe ist von einfachstem Bau, nämlich:

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y(x) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = Y(x). \tag{91}$$

Durch die lokale Transformation:

$$dt' = dt - Q\,d\psi$$

stellen wir Raum und Zeit im Beobachtungspunkt senkrecht auf einander und haben als Linienelement des Lokalraums den Ausdruck:

$$d\sigma^2 = e^{-u}(dx^2 + dy^2) + \gamma\, d\psi^2. \tag{92}$$

Es ist also:

$$\frac{d\sigma}{dx} = e^{-\frac{u}{2}} \sqrt{1 + \frac{Q^2}{P}} = e^{-\frac{u}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\gamma}{P}}, \tag{93}$$

weiterhin:

$$g = -\gamma e^{-2u},$$

und so haben wir alles beisammen, um nach Gleichung (87) die Lichtintensität auszudrücken. Wir finden:

$$J = \frac{\varkappa}{\sqrt{P}} \frac{e^{\frac{u}{2}}}{Y(x)}. \tag{94}$$

Den Proportionalitätsfaktor $\varkappa$ bestimmen wir folgendermaßen. In der unmittelbaren Umgebung der Lichtquelle können wir den Raum immer als euklidisch betrachten. Die Abhängigkeit der Lichtintensität von der Entfernung muß also hier die Form $\frac{1}{r^2}$ haben. Durch die Zahl 1 im Zähler haben wir dann die Einheit der Lichtintensität so festgelegt, daß sie in der Einheit der Entfernung $= 1$ sein soll. Nun ist für kleine x in erster Annäherung:

$$Y(x) = x.$$

Außerdem ist hier:

$$\sqrt{P} = x.$$

Wir haben also:

$$J = \frac{\varkappa}{x^2}.$$

Nun bedeutet aber um den Nullpunkt herum x gerade den Radiusvektor der Grundebene, also die Entfernung von der Lichtquelle. Mithin ist $x = r$ und wir haben $\varkappa = 1$ zu setzen. Die endgültige Formel für die Lichtintensität lautet also schließlich:

$$J = \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{e^{\frac{u}{2}}}{Y(x)}. \tag{95}$$

Wir brauchten nur noch die Funktionen P und Q aus den Gleichungen (73) einzusetzen und auch im Integral $Y(x)$ an Stelle von x die Variable u einzuführen.

Der zweite Faktor im Ausdruck von J ist eine abnehmende Funktion von u. Ebenso der erste Faktor, aber nur bis zu einer bestimmten Grenze. Der Nenner erreicht schließlich einen maximalen Wert, nimmt dann ab und sinkt im Grenzkreis angelangt auf Null. Die Intensität des Lichtes, welches ein im Mittelpunkt ruhender Stern aussendet, nimmt also anfänglich mit wachsender Entfernung ab, schließlich entsteht aber ein steiler Anstieg, bis in den Grenzkreis angelangt die Lichtintensität unendlich groß wird.

Doch haben wir hier den Fall erörtert, daß die Lichtquelle im Mittelpunkt ruht, während der Beobachter in der Milchstraße nach außen wandert. Bei der Berechnung der scheinbaren Helligkeit der Sterne interessiert uns aber der reziproke Fall: Der Beobachter ruht im Mittelpunkt, während die Lichtquelle sich nach außen bewegt. Der Unterschied gegenüber dem soeben betrachteten Fall liegt nur in der Berechnung der Funktionaldeterminante. Wir dürfen jetzt nicht $B = 0$ setzen, sondern haben auch in B einen unendlich kleinen Parameter. Wohl aber dürfen wir das Quadrat von B (ebenso wie auch A^2 und AB) als Größe zweiter Ordnung vernachlässigen. Für y haben wir auch dieses Mal dieselbe Differentialgleichung wie in (88). Für ψ aber folgt jetzt aus (51) und (46):

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{Q}{\sqrt{\gamma P}} e^{-\frac{u}{2}} + \frac{1}{P}\sqrt{\frac{\gamma}{P}} e^{-\frac{u}{2}} B. \tag{96}$$

Bei der Integration müssen wir beachten, daß wir ein Bündel von Lichtstrahlen bekommen wollen, welches durch einen bestimmten Punkt gehen soll. Dieser Punkt habe die Koordinaten:

$$x = \xi, \quad y = 0, \quad \psi = 0.$$

Dann wird unsere Lösung folgende Form zeigen:

$$\left.\begin{aligned} y &= A\,[Y(x) - Y(\xi)] \\ \psi &= f(x) - f(\xi) + B\,[\varphi(x) - \varphi(\xi)] \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

Unsere Parameter α, β sind jetzt A und B. Die Funktionaldeterminante berechnet sich jetzt in folgender Form:

$$\Delta = [Y(x) - Y(\xi)]\,[\varphi(x) - \varphi(\xi)]. \tag{98}$$

Und die Lichtintensität ganz wie in (94):

$$J = \frac{\varkappa}{\sqrt{P}} \frac{e^{\frac{u}{2}}}{\Delta}. \tag{99}$$

Wir wollen die Lichtintensität im Mittelpunkt kennenlernen, also an der Stelle $x = 0$. In der Umgebung dieser Stelle können wir $\sqrt{P} = x$ setzen, während $\varphi(x)$ im zweiten Faktor vom Δ über alle Maßen wächst. Wir haben also den Grenzwert eines Produktes auszuwerten, dessen einer Faktor $= 0$, der andere $= \infty$ wird. Das läßt sich nach der Regel von L'Hospital leicht ausführen und wir erhalten als Grenzwert -1. Da außerdem $u = 0$, $Y(o) = 0$ ist, haben wir das Resultat:

$$J = \frac{\varkappa}{Y(\xi)}. \tag{100}$$

Den Faktor $\varkappa$ bestimmen wir wieder an der Stelle, wo das Licht ausgesandt wird, also bei $x = \xi$. Das Gesetz der Lichtausbreitung muß hier die Form haben:

$$J = \frac{1}{d\sigma^2}.$$

Andererseits ist an dieser Stelle:

$$\Delta = \dot{Y}\dot{\varphi}\, dx^2 = \frac{\gamma}{P^2}\, dx^2.$$

Es muß also sein:

$$\frac{\varkappa}{\sqrt{P}}\,\frac{P^2}{\gamma}\, e^{\frac{u}{2}} = \frac{dx^2}{d\sigma^2} = e^u\,\frac{P}{\gamma}$$

und daraus folgt:

$$\varkappa = \frac{e^{\frac{u}{2}}}{\sqrt{P}},$$

was nach Einsetzen in Gleichung (100) wieder zu unserem früheren Resultat führt:

$$J = \frac{1}{\sqrt{P}}\,\frac{e^{\frac{u}{2}}}{Y(x)}. \tag{101}$$

(An Stelle der fixierten Koordinate ξ haben wir wieder die Variable x gesetzt.) Wir sehen also, es besteht Vertauschbarkeit von Lichtquelle und Beobachter in bezug auf die Lichtintensität (was keineswegs selbstverständlich ist, da die Lichtwege in beiden Fällen ganz getrennt verlaufen).

Auf ganz ähnliche Weise können wir auch die Abstandsfunktion der Lichtintensität in der Richtung nach dem galaktischen Pol zu berechnen. Nur ist es hier zweckmäßiger, nicht x, sondern y als unabhängige Variable zu betrachten, da x nur in einem sehr kleinen Intervall variiert.

Wir haben es mit einem Strahlenbündel zu tun, welches von einem Punkt $y = \eta$ der Weltachse ausgehen soll. Es muß also $B = 0$ gesetzt werden. Der Parameter A variiert jetzt um den Wert 1 herum. Doch wollen wir nicht sofort zur Grenze 1 übergehen. Wir setzen vielmehr:

$$A = 1 - \varepsilon\,(1 + \alpha) \tag{102}$$

und betrachten ε als eine kleine feste Größe, während α um 0 herum variiert. Wir haben dann ein schmales Strahlenbündel vorliegen, welches nicht genau nach $y = 0$ zielt, sondern etwas seitlich abgebogen ist.

Da x nur sehr wenig von 0 wegkommt, können wir für alle Funktionen die Reihenentwicklung nach x mit dem ersten Glied abbrechen. Für ψ gilt jetzt unter Berücksichtigung der Formeln (73):

$$\frac{d\psi}{dy} = -C,$$

also:

$$\psi = -Cy + p.$$

Für x haben wir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2\varepsilon(1+\alpha) - (1+C^2)x^2}}, \tag{103}$$

also:

$$x = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{1+C^2}}\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\sqrt{1+C^2}\,(y-\eta). \tag{104}$$

Bilden wir jetzt die Funktionaldeterminante nach α und p, so erhalten wir — abgesehen von einem konstanten Faktor:

$$\sin\sqrt{1+C^2}\,(y-\eta).$$

Das $\frac{d\sigma}{dy}$ haben wir $= 1$ zu setzen, das $\sqrt{\gamma} = x$. Es wird also die Lichtintensität:

$$J = \frac{x}{\sin^2\sqrt{1+C^2}\,(y-\eta)}.$$

Da in der Umgebung $y = \eta$ das Gesetz folgende Form haben muß:

$$J = \frac{1}{(y-\eta)^2},$$

so muß sein:

$$x = 1 + C^2.$$

Das gesuchte Gesetz hat also schließlich folgende Gestalt:

$$J = \frac{1+C^2}{\sin^2\sqrt{1+C^2}\,y}. \tag{105}$$

Nach denselben hier dargelegten Prinzipien läßt sich die Abstandsfunktion der Lichtintensität auch für alle mittleren Breiten finden, worauf wir aber hier nicht näher eingehen wollen.

6. Astronomische Prüfungsmöglichkeiten.

Wollen wir unsere soeben besprochene Weltgeometrie mit der Konstruktion des tatsächlichen Weltraumes vergleichen, so müßten wir vor allem über die Größe des Weltparameterwinkels orientiert sein, außerdem wissen, in welchem Verhältnis unsere Maßeinheit, das Zentimeter, zur natürlichen Maßeinheit steht. Da scheint mir folgender Weg gangbar zu sein. Es sei irgendwo im Weltraum ein kugelförmiges Gebilde

gegeben, von welchem Licht zu uns gelangt. Wegen der nicht-euklidischen Beschaffenheit der Welt wird sich das Bild dieser Kugel nicht als Kreis auf den Himmel projizieren, sondern zu einer Ellipse deformiert. Diese Deformation wollen wir jetzt berechnen.

Denken wir uns wieder ein unendlich schmales Strahlenbündel, welches sich im Mittelpunkt vereinigt. Wir machen an irgend einer Stelle einen senkrechten Querschnitt, und die Form der Umgrenzung soll ein Kreis sein. Nun fragen wir, wie ist dann die Umgrenzung bei einem senkrechten Querschnitt um den Mittelpunkt herum.

Beschränken wir uns, der Einfachheit halber, wieder auf die Milchstraße. Das Linienelement des Lokalraumes haben wir schon in Gleichung (92) aufgeschrieben. Führen wir an Stelle von y und ψ die Parameter A und p ein, so haben wir:

$$d\sigma^2 = e^{-u}(dx^2 + Y^2 dA^2) + \gamma\left(-\frac{Q e^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{\gamma P}}dx + dp\right)^2. \qquad (106)$$

Für eine Fläche, welche auf den x-Linien senkrecht stehen soll, muß sein:

$$\left(1 + \frac{Q^2}{P}\right) e^{-u}\, dx - \frac{Q\gamma e^{-\frac{u}{2}}}{\sqrt{\gamma P}}\, dp = 0.$$

An Hand dieser Beziehung können wir dx durch dp ausdrücken und haben dann:

$$d\sigma^2 = e^{-u} Y^2 dA^2 + P dp^2. \qquad (107)$$

Lassen wir p allein variieren, und dann A allein, so bekommen wir einmal eine Linie in der Milchstraße, dann eine zu ihr senkrechte. Da beide gleich lang sein sollen, muß dA zu dp in folgendem Verhältnis stehen:

$$\frac{dA}{dp} = \sqrt{P}\frac{e^{\frac{u}{2}}}{Y}. \qquad (108)$$

Andererseits ist an der Stelle $x = 0$:

$$d\sigma^2 = x^2(dA^2 + dp^2).$$

Wir erkennen also, daß der Kreis zu einer Ellipse eingedrückt erscheint, dessen große Achse der Grundebene parallel gerichtet ist, und welche das Achsenverhältnis hat:

$$\frac{b}{a} = \sqrt{P}\frac{e^{\frac{u}{2}}}{Y}. \qquad (109)$$

Nähern wir uns dem Grenzkreis, so wird die Ellipse immer flacher und schließlich zu einer geraden Linie, da im Grenzkreis $P = 0$ wird. Diese Folgerung deckt sich außerordentlich schön mit der Tatsache, daß die kugelförmigen Sternhaufen in der Milchstraßengegend alle abgeplattet sind, mit einem der galaktischen Ebene

parallelen Äquator. Nach unserer Auffassung wäre das als optische Täuschung zu betrachten, ganz analog zur Abflachung der Sonnenscheibe am Horizont, hervorgerufen durch die astronomische Refraktion. Da gerade von den kugelförmigen Sternhaufen durch die Untersuchungen Shapleys[1]) eine Fülle von Einzelheiten bekannt ist, und ihre Entfernung durch Anwendung des Prinzips von der kosmischen Homogenität ermittelt werden kann, scheint es nicht ausgeschlossen, aus ihrer Abflachung den Weltparameter berechnen zu können. Für die Einsteinsche Zylinderwelt müßte natürlich wegen der allseitigen Symmetrie die Abflachung verschwinden. In der Tat folgt das aus unserer Formel. Für $C = 0$ ist nämlich:

$$Y(u) = \frac{1}{2}\int_0^u \frac{e^{\frac{u}{2}}\,du}{\sqrt{1-e^{-u}}},$$

und wenn wir wieder wie in Gleichung (70) setzen:

$$e^{-u} = \cos^2\varphi,$$

so ist

$$Y = \operatorname{tg}\varphi;$$

also:

$$\frac{e^{\frac{u}{2}}}{Y} = \frac{1}{\sin\varphi}.$$

Andererseits ist jetzt

$$\sqrt{P} = \sin\varphi$$

und so das Achsenverhältnis nach Gleichung (109) $= 1$.

Ein anderer wichtiger Punkt betrifft, wie schon bemerkt, die Untersuchung der Sternverteilung nach Größenklassen und galaktischen Breiten. Um in dieser Richtung Schlüsse zu ziehen, müssen wir über die absolute Größe und absolute Helligkeit der Sterne irgendwelche Voraussetzungen machen. Die einfachste Annahme ist die, daß im Durchschnitt genommen alle Sterne dieselbe Masse und dieselbe absolute Helligkeit besitzen. Dann ist die Sternzahl in einem Volumenelement einfach proportional der dort herrschenden Massendichte. Wollen wir die Gesamtheit aller Sterne ermitteln, die in einer bestimmten Richtung pro Flächeneinheit auf den Himmel projiziert werden, so haben wir über ein unendlich schmales Strahlenbündel zu integrieren, das im Beobachtungspunkt, also in der Weltachse, zusammenläuft. Nach unseren obigen Erörterungen und Bezeichnungen ist das Volumenelement proportional zu

$$\sqrt{g}\,\Delta\,dx,$$

[1]) Siehe A. Kopff, Die Untersuchungen H. Shapleys über Sternhaufen und Milchstraßensystem. Die Naturwissenschaften **9**, 769, 1921.

und somit wird die Sternzahl N durch folgenden Ausdruck gegeben sein:

$$N = \nu \int_0^x \sqrt{g}\, \Delta\, \mu\, dx, \tag{110}$$

wo ν einen Proportionalitätsfaktor bedeutet. Setzen wir die Werte für $\sqrt{g}$, μ aus (73) und für Δ aus (91) ein, so folgt also für das Anwachsen der Sternzahl in der Milchstraße:

$$N = \nu \int e^{-u} Y \sqrt{\gamma}\, (2\lambda + 4\, C^2 e^u)\, dx,$$

oder, da wir nach Gleichung (61) setzen können:

$$\sqrt{\gamma}\, dx = \frac{1}{2}\, du,$$

so kommt in der Abhängigkeit vom Parameter u:

$$N = \nu \int_0^u e^{-u}\, Y(u)\, (\lambda + 2\, C^2 e^u)\, du. \tag{111}$$

In der Richtung nach dem galaktischen Pol zu ist es auch hier am zweckmäßigsten, y anstatt x als Variable zu betrachten. Hier bekommen wir:

$$N = 2\nu \int_0^y \sin^2 \sqrt{1 + C^2}\, y\, dy \tag{112}$$

oder bei Ausführung der Integration:

$$N = \nu \left(y - \frac{\sin 2\sqrt{1 + C^2}\, y}{2\sqrt{1 + C^2}} \right). \tag{113}$$

Wir haben in der Fig. 2 und 3 die Zunahme der Sternzahl und die Abnahme der Lichtintensität einerseits in Richtung des Pols, andererseits in Richtung des Äquators dargestellt. Wir haben den Briggischen Logarithmus der Lichtintensität als Ordinate aufgetragen, um die Einreihung der Sternzahl in die verschiedenen Größenklassen der Helligkeit leicht vornehmen zu können. Um nämlich die Parameterwerte zu erhalten (gleichgültig, ob u oder y), die zu den einzelnen Größenklassen gehören, brauchen wir nur diejenigen Punkte auf der Intensitätskurve abzustecken, deren Ordinaten jeweils um 0,4 kleiner werden. Die zugehörigen Abszissen geben uns die gesuchten Parameterwerte, und mit Hilfe der Sternzahlkurve finden wir dann die Zunahme der Sternzahl auf je eine Größenklasse. Diese Konstruktion beruht auf der Definition der aufeinanderfolgenden Größenklassen durch die Beziehung:

$$\mathrm{Log}\, J_n - \mathrm{Log}\, J_{n+1} = 0{,}4.$$

Nach dem galaktischen Pol zu ist der Verlauf der Kurven genau so wie in der Einsteinschen Zylinderwelt. In der Tat, wenn wir

$C = 0$ setzen, so ändert sich an den Kurven nichts, nur die Maßeinheit der Abszisse y. Die Lichtintensität nimmt bis zu einem Minimum ab, um von da ab wieder spiegelbildlich ins Unendliche zu wachsen. Doch ist es möglich, daß die Koordinate y eine solche Periode hat, daß wir bei dem ersten Minimum bereits die Grenze der größten Entfernung erreicht haben und nun wieder in nähere Gebiete gelangen, bis wir beim nächsten Maximum in unseren Ausgangspunkt zurückgekehrt sind. Auf alle Fälle sehen wir, daß die

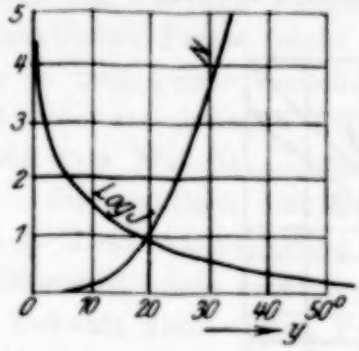


Fig. 2.
Sternzahlen und Lichtintensität am galaktischen Pol.

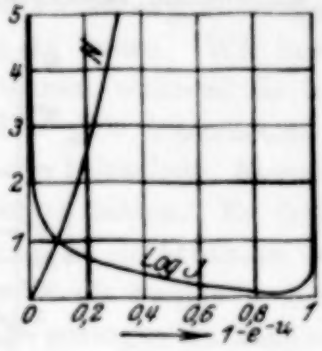


Fig. 3.
Sternzahlen und Lichtintensität in der Milchstraße.

Lichtintensität eine untere Grenze hat und Sterne oberhalb einer gewissen Größenordnung nicht auftreten.

In der galaktischen Ebene erfolgt die Abnahme der Lichtintensität anfänglich auf ganz ähnliche Weise. Tatsächlich können wir im Integral:

$$Y(u) = \frac{1}{2C}\int_0^u \frac{e^{\frac{u}{2}}\,du}{\sqrt{u - u^2 + k^2(1 - e^{-u})}}$$

für kleine u die ersten zwei Glieder unter der Quadratwurzel neben dem dritten vernachlässigen. Dann haben wir es aber mit demselben Integral zu tun wie in der Zylinderwelt. Für größere u ändert sich dieses Verhalten. Hier können wir nun e^{-u} neben 1 vernachlässigen und folgende Substitution einführen:

$$u = \frac{1}{2} + k' \sin w, \text{ wo: } k' = \sqrt{k^2 + \frac{1}{4}}. \qquad (114)$$

Wir erhalten dadurch näherungsweise das transzendente Integral:

$$\frac{e^{\frac{1}{4}}}{2C}\int e^{\frac{k'}{2}\sin w}\,dw,$$

wobei wir noch für größere k-Werte praktisch $k' = k$ setzen dürfen. Die Lichtintensität nimmt ein wenig langsamer ab als im galaktischen Pol, das Minimum liegt etwas höher. Dann erfolgt ein rapider Anstieg der Helligkeit. Wir kommen in ein anomales Gebiet, wo mit zunehmender Entfernung die Helligkeit der Sterne größer wird und im Grenzkreis ins Unendliche steigt. Der Raum wirkt wie eine Art Zylinderlinse, für welche die Weltachse in bezug auf den Grenzkreis gewissermaßen eine Brennlinie bildet. Das helle, selbst dem bloßen Auge auffallende Leuchten der Milchstraßenwolken und die große

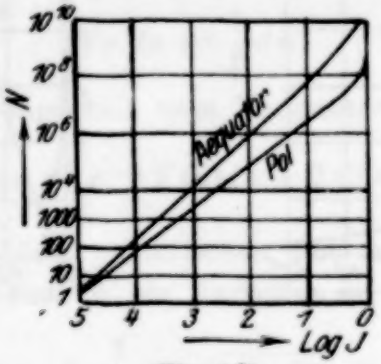


Fig. 4 [1]).

Verteilung der Sternzahlen nach Größenklassen. (Eine Einheit der Abszisse = 2,5 Größenklassen, die Einteilung der Ordinate ist logarithmisch.)

Häufigkeit auch relativ heller Sterne in der Milchstraße könnte aus diesem anomalen Gebiet stammen. Doch dürfen wir nicht vergessen, daß die Massendichte in diesen Gegenden bereits so groß wird, daß eine teilweise Absorption des Lichtes durch die vorgelagerten Massen

[1]) Die kleinste Intensität, die überhaupt vorkommt, ist ungefähr $J = 1$, also $\log J = 0$. Unterhalb dieser Größenordnung treten im Mittel keine Sterne auf (abgesehen natürlich von der Schwächung durch Absorption). Nehmen wir an, daß wir diese Grenze mit der Größenklasse 18 ungefähr erreicht haben, so entspricht dem Abszissenwert 5 die Größenklasse 5,5, dem Abszissenwert 4 die Größenklasse 8 usw., um je 2,5 Größenklassen ansteigend. Die Sternzahl N wächst nach dem galaktischen Pol zu, angenähert nach dem Gesetz $N = \alpha J^{-3/2}$. Auch im Äquator gilt dieses Gesetz bis zu den letzten Größenklassen hinauf, nur überlagern sich hier noch die Sterne aus der anomalen Zone in der Nachbarschaft des Grenzkreises. Deren Zahl wächst nun nach dem Gesetz βJ^{-2}, also weit schneller als bei den nahen Sternen, außerdem ist ihre Dichte schon an und für sich viel größer, was in der Größe des Koeffizienten β zum Ausdruck kommt. Die Sternzahl im Äquator steht also zur Sternzahl im Pol angenähert im Verhältnis:

$$\frac{N_{Aq}}{N_P} = 1 + \gamma J^{-1/2}.$$

Wir haben in der Fig. 4 $\gamma = 100$ gewählt. Um auf einen so hohen Koeffizienten zu kommen, müßte allerdings der Parameter k ziemlich groß angenommen

sehr wahrscheinlich nicht mehr zu vernachlässigen ist. Sowohl aus diesem Grunde, wie auch infolge Unkenntnis des Parameters k kann der Fig. 4 nur eine qualitative Bedeutung beigemessen werden. Quantitative Einzelheiten können sich erst aus einer Bearbeitung des stellarastronomischen Beobachtungsmaterials ergeben. Doch sehen wir das starke Ansteigen der Sternzahlen im Äquator gegenüber dem Pol, hervorgerufen durch Hinzukommen derjenigen Sterne, die in das anomale Gebiet gehören.

Dann ist, was den Vergleich mit der Erfahrung anbelangt, noch ein wesentlicher Punkt nicht außer acht zu lassen. Wir haben die Materie in homogener Verteilung angenommen, während sie in Wirklichkeit eine atomistische Struktur besitzt. Die kosmischen Räume sind frei von Materie, letztere ist in den einzelnen Sternen konzentriert, die praktisch diskrete Massenpunkte bilden. Es fragt sich, ob durch diese Atomisierung der Materie die Lichtbahnen und die Intensitätsverhältnisse nicht wesentlich beeinflußt werden[1]). Ich hoffe, in der Zukunft über diesen Punkt näheres aussagen zu können.

Schließlich wollen wir nicht vergessen, daß unsere Lösung nur eine — und zwar die einfachste — Möglichkeit bildet, unter allen stationären Lösungen. Wir haben angenommen, daß alle Koeffizienten des Maßtensors nur von der einen Koordinate x abhängen sollen, außerdem haben wir g_{23} und $g_{24} = 0$ gesetzt. Unsere Lösung erhielt dadurch die größtmögliche Symmetrie. Man könnte eine Erweiterung versuchen, indem man sich von der letzteren Einschränkung freimachte. Man hätte es dann immer noch mit einem System von totalen Differentialgleichungen zu tun. Über die Konstitution dieser allgemeineren Lösung kann nur ihre explizite Darstellung Aufschluß geben.

---

werden (etwa schätzungsweise $k = 25$), was nicht wahrscheinlich ist, weil dann das Milchstraßengebiet sehr eng begrenzt und außerhalb desselben die Sternverteilung schon fast in die gleichmäßige übergehen würde. Doch ist zu bedenken, daß wir im obigen die absolute Masse und die absolute Helligkeit der einzelnen Sterne als im Mittel überall gleich angenommen haben. Da aber die Bedingungen eines Strahlungsgleichgewichts in der Milchstraße infolge der großen Sterndichte ohne Zweifel ganz anders sind wie in mittleren Gebieten, könnte hier die absolute Helligkeit bedeutend angewachsen sein, was den Koeffizienten γ im selben Verhältnis vergrößern würde. Im ähnlichen Sinne wirkte auch eine Abnahme der Massen. Die spektroskopischen Befunde, kombiniert mit den Beobachtungen an sehr entfernten (abgeflachten) kugelförmigen Sternhaufen, müßten über diese Punkte Auskunft geben können, die Kenntnis der metrischen Struktur im großen allein genügt zu ihrer Entscheidung nicht.

[1]) Ich möchte allerdings vermuten, daß die Dichtigkeit der Sternverteilung im kosmischen Maßstab gemessen sehr groß ist, so daß dieser Einfluß nur als Korrektion in Frage zu kommen brauchte.

Vielleicht handelt es sich bei der hier in Betracht gezogenen Kosmologie nur um eine weitgehende Schematisierung, um eine erste grobe Annäherung an die Wirklichkeit. Auch dann scheint mir das Eingehen auf diese Möglichkeit nicht ohne Interesse zu sein. Haben wir es doch mit dem Grundtypus einer stationären rotationssymmetrischen Weltstruktur als Lösung der Einsteinschen Fundamentalgleichungen zu tun und zugleich mit einem Beispiel für die weltumfassende Schönheit der geometrischen Betrachtungsweise und die weitgespannten Horizonte, die sich auf diesen Bahnen noch eröffnen werden.

Freiburg i. B., Physikalisches Institut, Oktober 1923.

Bemerkungen über die *N*-Serie der *X*-Spektren.

Von V. Dolejšek in Prag.

Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 21. November 1923.)

Es war zu erwarten, daß es nach der neuen Durchmusterung der *M*-Serie möglich sein wird, genaue Werte für die Energie der *M–N–O–P* Atomniveaus aller jener Elemente anzugeben, deren *M*-Serie mit den jetzigen experimentellen Mitteln erreichbar ist. Das ist aber nicht der Fall. Der Grund dafür liegt hauptsächlich darin, daß die in Frage kommenden Linien in genügender Anzahl nur bei den zwei schwersten Elementen auftreten. Hjalmar hat festgestellt, daß bei Elementen niederer Atomnummern die meisten der bei Uran und Thor gefundenen Linien der *M*-Serie verschwinden. Die Frage nach der Existenz der meisten Linien der *N*-Serie mußte unbeantwortet bleiben, da sie in einem Wellenlängenbereich sich vorfinden müßten, der der Kristallgittermethode unzugänglich ist. Es scheint, daß eben wegen dieser unsicheren Identifizierung der Linien der *M*-Serie ihre Heranziehung zur Korrektion der *N*-Niveaus und Identifizierung der *N*-Linien, wie es ursprünglich beabsichtigt war[1]), nicht möglich ist. Es zeigt sich dagegen, daß die Identifizierung der *N*-Linien auf Grund der Identifizierung der *L*-Linien, die wir für die schwereren Elemente Coster verdanken, sicherer ist als die mittels der Werte aus der *M*-Serie[2]), die von Hjalmar mit den Ergebnissen seiner neuerlichen Durchmessung der *M*-Serie vorgenommen wurde.

Hjalmar gibt in seiner Arbeit Linien der *N*-Serie an, die nur zum Teil mit den von mir gefundenen zusammenfallen. Außerdem stellt er Linien dieser Serie fest, die ich nicht erhalten habe, während einige von mir aufgefundene Linien von ihm nicht bemerkt wurden. Hjalmars Identifizierung dieser Linien unterscheidet sich daher, meist auch bei den übereinstimmend gefundenen Linien, von der von mir vorgeschlagenen. Die von mir, im Gegensatz zu Hjalmar gefundenen Linien hält er für Linien von Verunreinigungen in höherer Ordnung. (Diese Deutung halte ich für unzutreffend, in Anbetracht der in der zitierten Arbeit geübten Vorsichtsmaßregeln. Um schwache und starke Linien von Spuren von Verunreinigungen in so hoher Ordnung zu erhalten, wie Hjalmar zur Erklärung einiger dieser

[1]) V. Dolejšek, ZS. f. Phys. **10**, 136, 1922.
[2]) E. Hjalmar, ebenda **15**, 91, 1923.

Linien annimmt, wird, meiner Ansicht nach, noch eine große Vervollkommnung der *X*-Spektroskopie notwendig sein. Beim jetzigen Stande der *X*-Spektroskopie könnte man so jede Linie deuten.) Da meine erste Arbeit an einer Apparatur, welche mir Herr Prof. Siegbahn in seinem Laboratorium zur Verfügung gestellt hat, durchgeführt wurde, und ich bisher keine Apparatur für dieses Wellenlängengebiet besitze, kann ich den Charakter der fraglichen Linien vorläufig experimentell nicht bestätigen. Wenn man sich aber auf den Standpunkt stellt, daß es sich vor allem um die theoretisch deutbaren Linien, also die sogenannten Bogenlinien, handelt, die sich als *N*-Linien in das Schema einreihen lassen, so kann man leicht theoretisch zeigen, daß man die Änderung Hjalmars an meiner Identifizierung nicht annehmen kann.

Wir werden das folgendermaßen beweisen: Zur Identifizierung ziehen wir einerseits das Bohr-Costersche Schema, anderseits das Moseleysche Diagramm heran. Da wir hier im allgemeinen nur die Linien der beiden letzten Elemente messen können, ist die Benutzung des Moseleyschen Diagramms direkt unmöglich, und eine Identifizierung lediglich unter Verwendung des Bohr-Costerschen Schemas erscheint daher einigermaßen unsicher. Um dennoch das Moseleysche Diagramm anwenden zu können und dadurch die Sicherheit der Identifizierung zu erhöhen, extrapolieren wir die bei den Elementen Uran und Thor gemessenen Frequenzwerte, deren Analogie vermutet wird, mit Hilfe des Moseleyschen Diagramms auf das Element Wismut und überzeugen uns, ob der so erhaltene Wert mit dem nach dem Bohr-Costerschen Schema aus den anderen Serien dieses Elementes berechneten übereinstimmt. Aus dem Bohr-Costerschen Schema erhalten wir bekanntlich für den Frequenzwert der Linie nur ein gewisses Gebiet, innerhalb dessen diese liegen muß. Daraus kann man nun entscheiden, ob die vermutete Analogie wirklich besteht, ob also die Identifizierung richtig ist. Notwendig ist zu erwägen, wie groß der durch die Extrapolation mögliche Fehler ist im Vergleich zu dem Gebiet im Bohr-Costerschen Schema, das sich für den Frequenzwert ergibt.

Da das Element Wismut [Atomnummer 83][1]), das nächste Element, dessen *X*-Spektrum der Messung zugänglich ist, verhältnismäßig weit von unseren beiden Elementen U (Atomnummer 92) und Th (Atomnummer 90) liegt, gewinnen wir bei dem von uns vorgeschlagenen

[1]) Man kann auch die Nachbarelemente der Atomnummern 82, 81 usw. in Rechnung ziehen, um die Richtigkeit der Resultate zu verbürgen.

Verfahren einen großen Vorteil dadurch, daß die Fehler der aus dem Bohr-Costerschen Schema bei Wismut gerechneten Werte sich durch Projektion auf unsere beiden Werte bei Uran und Thor so verkleinern, daß sie ungefähr innerhalb der Meßfehler unserer Linienwerte liegen, oder umgekehrt vergrößern sich unsere Meßfehler durch Extrapolation auf die Größe der bei Wismut berechneten. So ein Meßfehler von ungefähr 0,5 im Frequenzwert bei Th verursacht eine Abweichung von ungefähr 3,0 bei Bi.

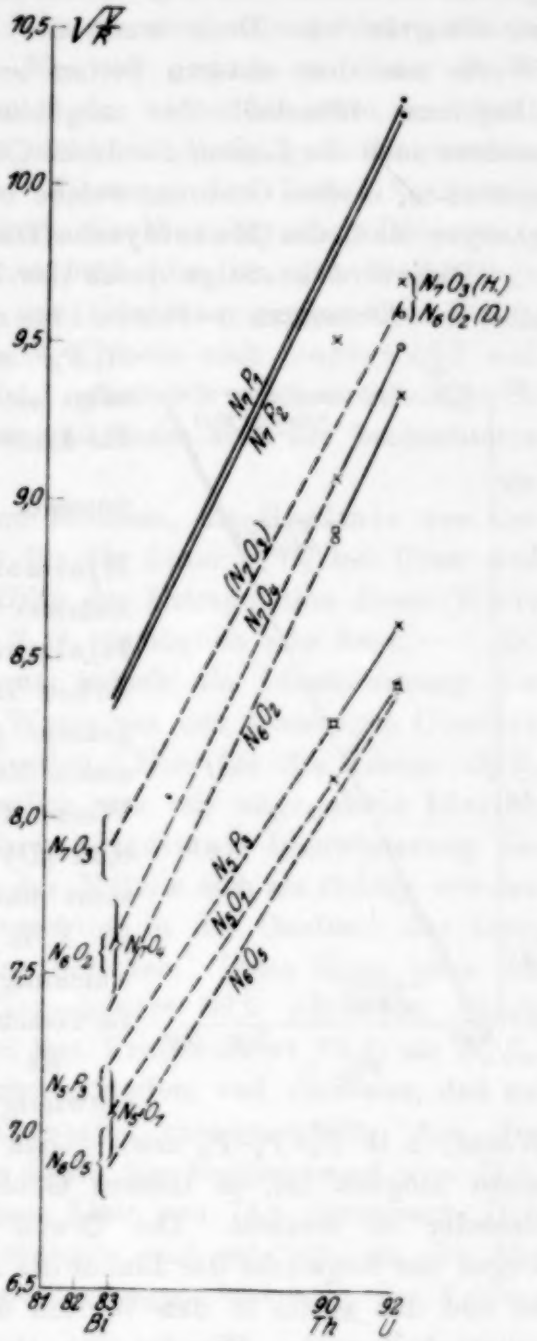


Fig. 1.

Vorher aber müssen wir zeigen, daß wir berechtigt sind, die Extrapolation vorzunehmen. Es handelt sich im Grunde genommen darum, ob sich in diesem Gebiet Abweichungen vom Moseleyschen Diagramm zeigen, und zwar im Bereich zwischen den Elementen der Atomnummer 92 bis 83, welche hier in Betracht kommen. Selbstverständlich spielen hier die unerwarteten Abweichungen, wie sie z. B. in der *K*-Serie in der Umgebung des Elementes von der Atomnummer 18 hervortreten [1]), keine Rolle. Es handelt sich hier um die Extrapolation und rohe Abschätzung der Niveaus. Nach der Bohrschen Theorie soll man aber an den Stellen des periodischen Systems Abweichungen vom Moseleyschen Diagramm, das ist von seiner Geradlinigkeit erwarten, wo neue Bahnen von Elektronen einsetzen. Man kann sehen, daß eine solche Krümmung in der Umgebung von Ce (Atom-

[1]) Siegbahn und Dolejšek, ZS. f. Phys. **10**, 165, 1922.

nummer 53) eintritt[1]). Ebenso kann man aber dortselbst bemerken, daß keine solche unvermittelte Abweichung vom Moseleyschen Diagramm zwischen den Elementen mit den Atomnummern 92 bis 80 zu erwarten ist. Denn wenn die Niveaus dieser Elemente, deren Werte aus den anderen Serien berechnet sind, das Moseleysche Diagramm innerhalb der möglichen Fehlergrenzen erfüllen, dann müssen auch die Linien, die durch Übergänge zwischen diesen Niveaus entstehen, in den Grenzen, welche nur durch die vorhandenen Fehler gezogen sind, das Moseleysche Diagramm erfüllen.

Dies wird bestätigt durch das Diagramm, das wir mit den bei allen drei Elementen meßbaren Linien $N_7 P_1$ und $N_7 P_2$ (nach Hjalmar $N_7 P_1$) zeichnen können. In der Fig. 2 zeigt sich die Geradlinigkeit wirklich für die Linien $N_7 P_2$ erfüllt. Für Uran (Atomnummer 92) finde ich $\sqrt{\frac{\nu}{R}} = 10{,}23$, Hjalmar 10,24. Bei Thorium (Atomnummer 90) ist mein Resultat 9,83, Hjalmars 9,85. Der Wert 9,82 aus der Arbeit Hjalmars[2]), der sich dem Diagramm ganz streng einfügt, beruht auf einem Rechenfehler. Wenn man noch die Werte für Wismut (Atomnummer 83) 8,32 (D) und 8,31 (Hj) in Betracht zieht, sieht man, daß ein Fehler von ungefähr 50 X.-E. eine verhältnismäßig große Abweichung vom Moseleyschen Diagramm verursacht (wie früher bemerkt worden ist).

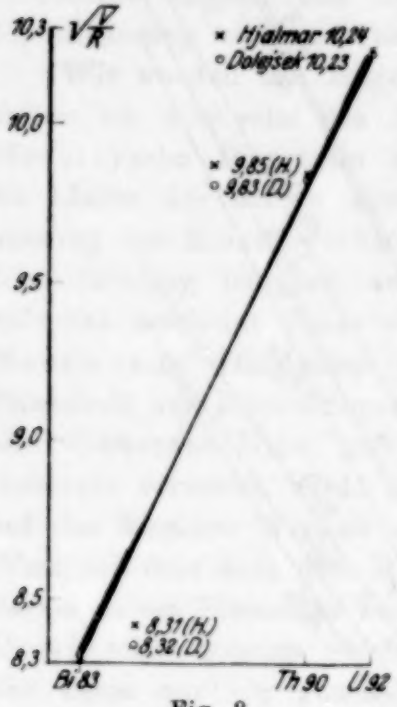


Fig. 2.

Es ist leicht einzusehen, daß es schwierig ist, die Energie- (Frequenz-) Werte, z. B. $P_1 - P_2 - P_3$ usw., genau zu bestimmen, trotzdem es sehr leicht möglich ist, in diesem Gebiet die zugehörigen Linien voneinander zu trennen. Der Grund liegt hauptsächlich darin, daß wegen der Schwäche der Linien die Meßgenauigkeit nicht ausreichend ist und daß schon in den Werten der N-Niveaus eine gewisse Ungenauigkeit steckt. Wendet man also das extrapolierte Moseleysche Diagramm auf die von Hjalmar als $N_7 O_3$ bezeichneten Linien an, so bekommt man durch die Extrapolation einen Energiewert für diese

[1]) Bohr und Coster, ZS. f. Phys. **12**, 362, 1923. Die Fig. 1 ist dieser Arbeit entnommen.

[2]) Hjalmar, l. c.

Linie bei Wismut, der außerhalb der möglichen Fehlergrenzen viel größer ist, als der Wert für das N_7-Niveau sich aus dem Bohr-Costerschen Schema ergibt, was sicher ausgeschlossen ist. Außerdem wäre dann diese Linie meßbar, denn es sind solche viel größerer Wellenlänge gemessen worden. Es tritt jedoch an dieser Stelle keine Linie auf, und wenn dort auch eine vorhanden wäre, so könnte sie aus dem angegebenen Grunde nicht als $N_7 O_3$ gedeutet werden. Ebenso verhält es sich mit der Deutung der Linie $N_6 O_2$ von Hjalmar. Nach Extrapolation mittels des Moseleyschen Diagramms wäre ihr Frequenzwert für Wismut 66,0 (das ist eine Wellenlänge in der Nähe der langwelligsten von Hjalmar gemessenen Linie), während wir für die Energie des N_6-Niveaus nach Coster 58,7 und nach Hjalmar aus der M-Serie 61,3 erhalten, was ersichtlich gegen die Identifizierung der berechneten und damit auch der beobachteten Linie spricht.

Berechnet man weiter aus den Niveaus, die Hjalmar aus der M-Serie erhält, den Frequenzwert für die Linie $N_6 O_5$ bei Uran und Thor, so sieht man wieder, mit Hilfe der Extrapolation dieser Werte auf Wismut, daß dort die Linie $N_6 O_5$ unmöglich sein kann.

In allen diesen Fällen stimmt jedoch die Identifizierung der Linien überein, die mit Hilfe der Werte aus den Messungen Costers an der L-Serie vorgenommen wurden. Nur für die Linien $N_5 O_1$ und $N_6 O_2$ stellt sich die ursprünglich von mir angegebene Identifizierung als fehlerhaft heraus, während Hjalmars Identifizierung der Linie $N_5 O_1$ nach den Werten aus der M-Serie sich als richtig erweist. Auch bleibt noch der kleine Unterschied in der Deutung der Linie $N_5 P_3$ von mir und von Hjalmar bestehen. Diese Linie habe ich nur bei Thorium mit einem Frequenzwert 69,5 gefunden. Auch Hjalmar deutet diese Linie (bei ihm Frequenzwert 69,3) als $N_5 P_3$. Bei Uran habe ich sie jedoch nicht gefunden, und vermutet, daß sie mit einer M-Linie desselben Elementes zusammenfällt. Aus der L-Serie berechnet sich für diese Linie ein Frequenzwert von 77,6. Hjalmar gibt einen Wert für diese Linie von 74,4 (gemessen, 76,8 berechnet) an. Diese beiden Deutungen sind möglich, da die Abweichungen zwischen beiden Identifizierungen innerhalb der Fehlergrenzen liegen.

Geht man nun analog wie vorher alle bisher identifizierten Linien der N-Serie durch, und verwendet man besondere Sorgfalt darauf, nur die zuverlässigsten Werte für die Niveaus heranzuziehen, so erweist sich die Deutung der von mir als $N_6 O_2$ (Frequenzwert bei U 92,3, Th 78,9) und $N_7 O_3$ (Frequenzwert bei U 90,4, Th 79,5)

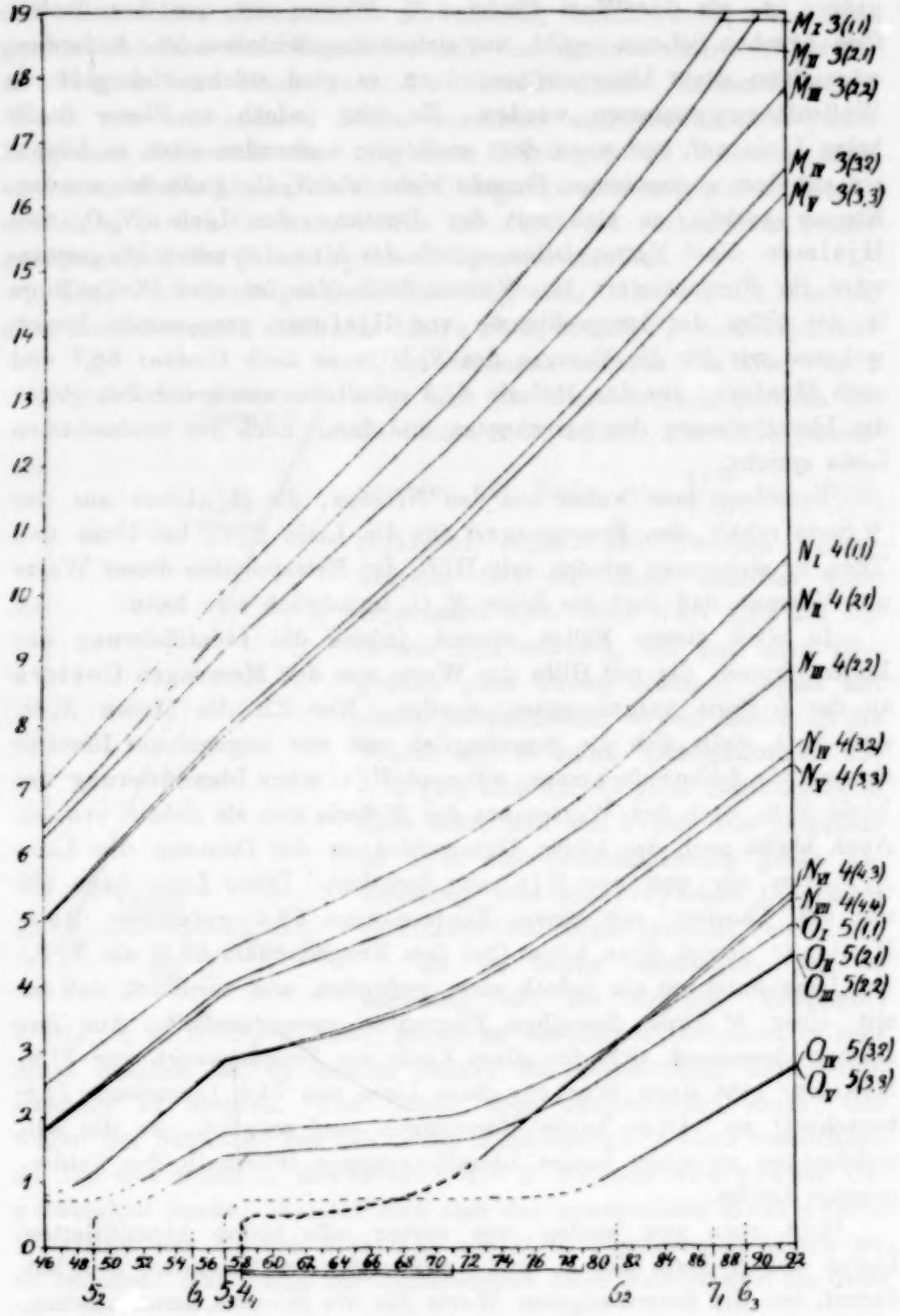

M_I 3(1.1)
M_{II} 3(2.1)
M_{III} 3(2.2)
M_{IV} 3(3.2)
M_V 3(3.3)
N_I 4(1.1)
N_{II} 4(2.1)
N_{III} 4(2.2)
N_{IV} 4(3.2)
N_V 4(3.3)
N_{VI} 4(4.3)
N_{VII} 4(4.4)
O_I 5(1.1)
O_{II} 5(2.1)
O_{III} 5(2.2)
O_{IV} 5(3.2)
O_V 5(3.3)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
46 48 50 52 54 56 58 60 62 64 66 68 70 72 74 76 78 80 82 84 86 88 90 92
5_2 6_4 5_3 4_4 6_2 7_1 6_3

Fig. 3.

bezeichneten Linien als abänderungsbedürftig, wofern man nicht unwahrscheinlich große Werte für die O_2- und O_3-Niveaus bei Wismut annehmen will.

Vollständige Übereinstimmung der Meßergebnisse mit den aus dem Bohr-Costerschen Schema sich ergebenden Werten für die entsprechenden Linien bei Wismut wird jedoch erhalten, falls man so vorgeht, daß man die von mir gefundene Uranlinie mit einem Frequenzwert von 90,4 und die von Hjalmar gemessene Thorlinie vom Frequenzwert 82,49, die auch er schon als solche erkannte, als $N_6 O_2$-Übergang ansieht. Die von Hjalmar als Uranlinie $N_6 O_2$ (Frequenzwert 87,72) bezeichnete kann als Übergang $N_7 O_4$ gedeutet werden. Als zugehörige Thoriumlinie kommt eine der beiden, von mir früher als $N_6 O_2$ (Frequenzwert 78,9) und $N_7 O_3$ (Frequenzwert 79,5) angesehenen Linien in Betracht. Das vom Bohr-Costerschen Schema für den Frequenzwert der entsprechenden Wismutlinie sich ergebende Gebiet erlaubt nicht, die Entscheidung zwischen diesen Linien zu treffen.

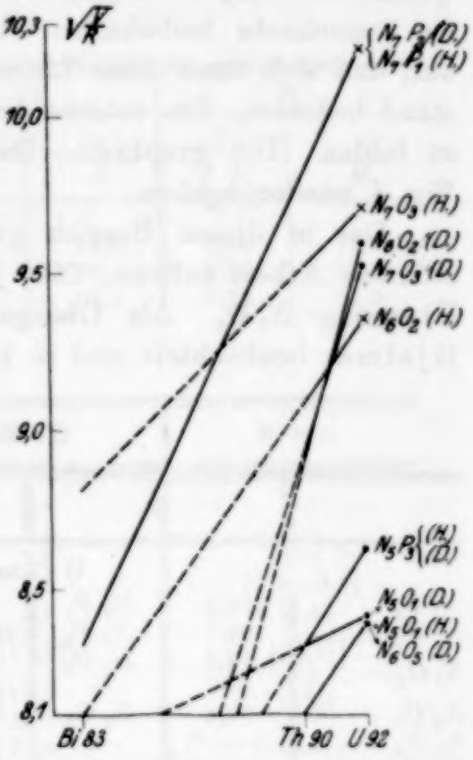


Fig. 4.

Für die Linie $N_5 P_3$ des Urans, bei der ich nach der Rechnung aus Costers Messungen der L-Serie vermutete, daß sie mit einer unbekannten M-Linie desselben Elementes zusammenfällt, hat Hjalmar den Wert 74,43 gefunden. Der Wert paßt für diese Linie nach den oben genannten Kriterien sehr gut, wenn man als zugehörige Thorlinie $N_5 P_3$ die sowohl von mir (Frequenzwert 69,5) als auch die von Hjalmar (69,3) gefundene und gleich identifizierte Linie beibehält. Für diese Linie käme aber auch die von mir früher als $N_5 O_1$ bezeichnete mit einem Frequenzwert von 69,1 in Betracht. Es erübrigt noch die Identifizierung der Linien $N_5 O_1$ und $N_6 O_5$, deren Werte sehr nahe liegen. Bei ihrer Unterscheidung hilft der Umstand, daß das Gebiet der aus verschiedenen Daten berechneten Werte dieser Linien bei Wismut sehr klein ist. Man kann so für die Linie $N_6 O_5$ bei Uran meinen ursprünglichen Wert 70,9 behalten. Offenbar denselben Wert 77,78 hat Hjalmar früher als $N_5 O_1$ be-

zeichnet. Als $N_5 O_1$-Linie können wir dann bei Uran meinen früher als $N_5 O_2$ angesprochenen Wert von 71,3 identifizieren, während wir bei Thorium den früheren Wert Hjalmars für die entsprechende Linie 66,01 behalten. Sowohl aus der Rechnung nach dem Bohr-Costerschen Schema als auch durch Extrapolation kann man sich überzeugen, daß die Linie $N_6 O_5$ bei Thorium der Messung unzugänglich ist. Denn die Wellenlänge dieser Linie wäre größer als die längste bisher von Hjalmar erreichte Linie. Dasselbe läßt sich über diese Linie auch dann sagen, wenn bei Uran die Linie $N_5 O_1$ (Frequenzwert 71,3) als $N_6 O_5$ bezeichnet wird und als $N_5 O_1$ die früher so bezeichnete beibehalten wird. Der Unterschied tritt nur darin auf, daß sich dann diese Linien überkreuzen, was wohl keinen Übelstand bedeutet. Ein entscheidendes Kriterium dafür scheint vorläufig zu fehlen. Die graphische Darstellung der erwähnten Linien ist in Fig. 4 wiedergegeben.

Der in diesen Bereich gehörende Übergang $N_5 O_2$, der in der zitierten Arbeit auftrat, fällt jetzt weg, dagegen erscheint nun der Übergang $N_7 O_4$. Als Übergang $N_7 O_3$ könnte bei Uran die von Hjalmar beobachtete und so bezeichnete mit einem Frequenzwert von

Tabelle 1.

	D		H		Bemerkungen
		U (Atomnummer 92).			
$N_7 P_1$	105,9	$N_7 P_1$	—	—	
$N_7 P_2$	104,7	$N_7 P_2$	104,8	$N_7 P_1$	
$N_7 O_3$	92,3	$N_6 O_2$	—	—	Identifizierung mit Vorbehalt.
	—	—	94,75[1])	$N_7 O_3$	Fehlt bei Thorium.
$N_6 O_2$	90,4	$N_7 O_3$	—	—	[1]) Von Hjalmar gef. bei Th.
$N_7 O_4$	— [2])	—	87,72	$N_6 O_2$	[2]) Bei Th von mir gemessen.
$N_5 P_3$	—	—	74,43	$N_5 P_3$	
$N_5 O_1$	71,3	$N_5 O_2$	— [3])	—	[3]) Bei Th von Hjalmar.
$N_6 O_5$	70,9	$N_6 O_5$	70,78	$N_5 O_1$	
		Th (Atomnummer 90).			
$N_7 P_1$	97,9	$N_7 P_1$	—	—	
$N_7 P_2$	96,9	$N_7 P_2$	96,97	$N_7 P_1$	
$N_7 O_3$	—	—	—	—	
$N_6 O_2$	— [1])	—	82,49	$N_6 O_2$	
$N_7 O_4$	78,9	$N_6 O_2$	— [2])	—	
	79,5	$N_7 O_3$	—	—	
$N_5 P_3$	69,5	$N_5 P_3$	—	—	
	69,1	$N_5 O_1$	69,3	$N_5 P_3$	
$N_5 O_1$	— [3])	—	66,01	$N_5 O_1$	
$N_6 O_5$	—	—	—	—	Nicht meßbar. Zu langwellig.
		Bi (Atomnummer 83).			
$N_5 P_1$	69,9	$N_5 P_1$	68,99	—	
$N_5 P_2$	69,4	$N_5 P_2$	—	$N_5 P_1$	

94,75 oder die von mir (Frequenzwert 92,3) früher als $N_6\,O_2$ gedeutete in Betracht kommen. Das Bohr-Costersche Schema ließe erwarten, daß bei Thor dann die entsprechende Linie mit einem Frequenzwert von 86 vorhanden ist. In Tabelle 1 ist eine Übersicht über die neue Identifizierung der Linien gegeben. In der ersten Spalte sind der entsprechende Wert (meine Messung) und meine ursprüngliche Bezeichnung, in vierter und fünfter Spalte die Werte und Bezeichnungen Hjalmars angegeben.

Aus dieser Identifizierung kann man auch die Frequenzwerte der P- und O-Niveaus ausrechnen. Wenn man für die N-Niveaus folgende Werte einsetzt:

	U		Th		Bi	
	$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$	$\frac{\nu}{R}$	$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$	$\frac{\nu}{R}$	$\sqrt{\frac{\nu}{R}}$	$\frac{\nu}{R}$
N_7 . . .	10,33	107,1	9,9	98,0	8,40	70,6
N_6 . . .	9,8	96,0	9,4	88,4	7,85	61,6
N_5 . . .	8,8	77,4	8,43	71,1	7,72	51,8

so erhält man:

	U ν/R	Th ν/R	Bi ν/R
P_1 . . .	1,2	0,1	0,7
P_2 . . .	2,4	1,1	1,1
P_3 . . .	3,0	1,8	[0] [1]
O_1 . . .	6,1	5,1	[1,8—2,8]
O_2 . . .	5,6	5,9	[4,6]
O_3 . . .	[[12,3 / 14,8]]	[[11,5]]	[[8,2]]
O_4 . . .	19,4	18,5 / 19 1	[15,8]
O_5 . . .	[25,1	23,6	[[14,6]]

Es wird weiter versucht werden, sobald die Apparatur für lange Wellen fertiggestellt ist, in erster Linie die erreichbaren N-Niveaus direkt experimentell zu ermitteln und jene Linien, die bisher nicht gedeutet werden konnten, unterzubringen.

Prag, Physikalisches Institut II der Universität.

[1]) Die einfache Klammer bedeutet, daß die Werte durch Extrapolation mit den Moseley-Diagrammen gewonnen sind; die doppelte Klammer Unsicherheit in der Identifizierung.

Interferenzmethode zur Bestimmung von Brennweiten optischer Systeme.

Von **E. Bratke** in Spandau.

Mit fünf Abbildungen. (Eingegangen am 23. November 1923.)

Die Interferenzerscheinung, die der nachstehend beschriebenen Methode zugrunde liegt, kommt bei folgender Anordnung zustande.

Auf eine planparallele Platte P (Fig. 1), die etwa im Winkel von 45° und senkrecht zur optischen Achse einer Linse oder eines Linsen-

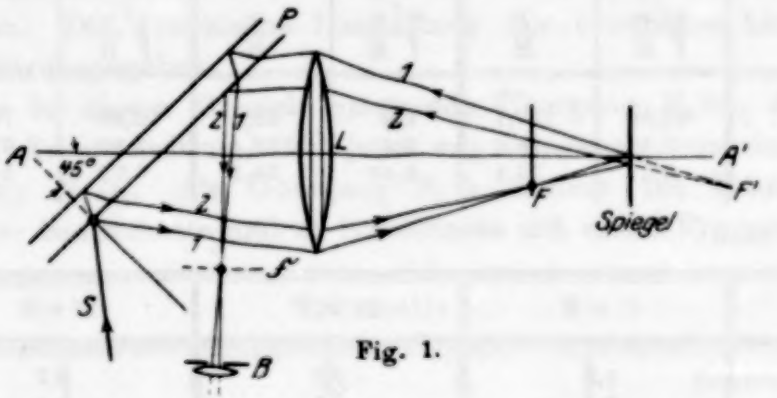


Fig. 1.

systems L steht, fallen Strahlen, die von der Vorder- und Hinterseite der Platte reflektiert werden, durch L gehen und auf einen senkrecht zur optischen Achse von L angeordneten Spiegel auftreffen, von dem sie durch L auf P zurückgelangen, hier abermals an der Vorder- und Rückseite reflektiert werden, um dann ins Auge des Beobachters B zu gelangen. Etwa in der Brennebene $\mathfrak{F}$ der Linse kommt eine Interferenzerscheinung zustande, die bei ideal abbildenden Linsen aus senkrechten, äquidistanten, mit der Entfernung des Spiegels von der Linse sich in ihrer Breite verändernden Streifen bestehen. Bei Vorhandensein von Abbildungsfehlern in L treten komplizierte, aber im gesetzmäßigen Zusammenhange mit diesen Fehlern stehende Kurvenformen der Interferenzen auf.

Die Erscheinung ist für ideal abbildende Linsen von Mascart[1]), Lummer[2]) und Hurion[3]), sowie in Strenge von Bratke und Waetz-

[1]) Mascart, Ann. chim. phys. **23**, 149, 1871.
[2]) Lummer, Wied. Ann. **23**, 513, 1884.
[3]) Hurion, Journ. d. phys. (3) **1**, 414, 1892.

mann[1]) behandelt worden. Waetzmann[2]) fand außerdem die Abweichungen der geradlinigen Form der Interferenzbilder und gründete darauf seine Methode zur Bestimmung der Abbildungsfehler optischer Systeme, die zunächst für eine qualitative Beurteilung des Korrektionszustandes von Linsen geeignet war, von mir[3]) aber auch zur Benutzung zu quantitativen Messungen weiter ausgebaut wurde.

Bei diesen letzteren Untersuchungen fand ich, daß die Interferenzerscheinung sich auch zur Bestimmung von Brennweiten benutzen läßt.

Die Anordnung, die ich bei meinen Untersuchungen benutzte, war etwa folgende:

Von der Quecksilberbogenlampe (Fig. 2) wird durch die Kondensorlinse K Licht über die einfache, durchsichtige Glasplatte G auf die planparallele Platte P geleitet. Von hier, an Vor- und Rückseite reflektiert, gelangt es durch die in etwa Brennweitenentfernung f von dem zu untersuchenden optischen System L stehende Blende J auf den in der Richtung der optischen Achse von L verschiebbaren Spiegel, von dem es zurückgeworfen seinen Weg durch L und J auf P nimmt, um von dort abermals reflektiert durch G hindurch in die Öffnung B des Beobachtungsapparates zu gelangen. Man kann die in der Brennebene von L, also etwa am Ort der Blende J auftretende Interferenzerscheinung mit bloßem Auge oder objektiv mit einem kleinen Fernrohr beobachten. Zur photographischen Aufnahme wurde eine kleine selbstgefertigte Fernrohrkamera benutzt.

Bei einer Verfolgung des Strahlenganges überzeugt man sich leicht, daß das schließlich in den Beobachtungsapparat gelangende Licht nur aus Strahlen bestehen kann, die zwischen der planparallelen Platte P und dem optischen System L nahezu parallel der optischen Achse verlaufen. Verkleinert man die Öffnung der Blende J so weit, daß von ihr nur Strahlen hindurchgelassen werden, die nahe der optischen Achse verlaufen, daß also nur die Mittelzonen des optischen Systems L durchsetzt werden, dann kann man, da die sphärischen Abweichungen solcher Strahlen zu vernachlässigen sind, den ausgeblendeten Teil des optischen Systems als ideal abbildend ansehen und auf die Interferenzerscheinung die Gleichungen anwenden, wie sie die obengenannte strenge Theorie[4]) ergibt.

---

[1]) Bratke und Waetzmann, Ann. de Phys. **72**, 501, 1923.
[2]) Waetzmann, Ann. d. Phys. **39**, 1042, 1912.
[3]) Bratke, Dissertation Breslau, 1922.
[4]) Bratke und Waetzmann, a. a. O.

Es wurde dort in § 3 für den Gangunterschied $\triangle$ der interferierenden Strahlen die Gleichung abgeleitet:

$$\triangle = a_0 (2\mathfrak{h}'' + a_0) \frac{e}{f^2}.$$

In dieser Gleichung bedeutet f die Brennweite des optischen Systems L, e die Entfernung des Spiegels aus der hinteren Brennebene des optischen Systems, $\mathfrak{h}''$ — weiterhin kurz als „Höhe" bezeichnet — den Abstand des Schnittpunktes zweier interferierender

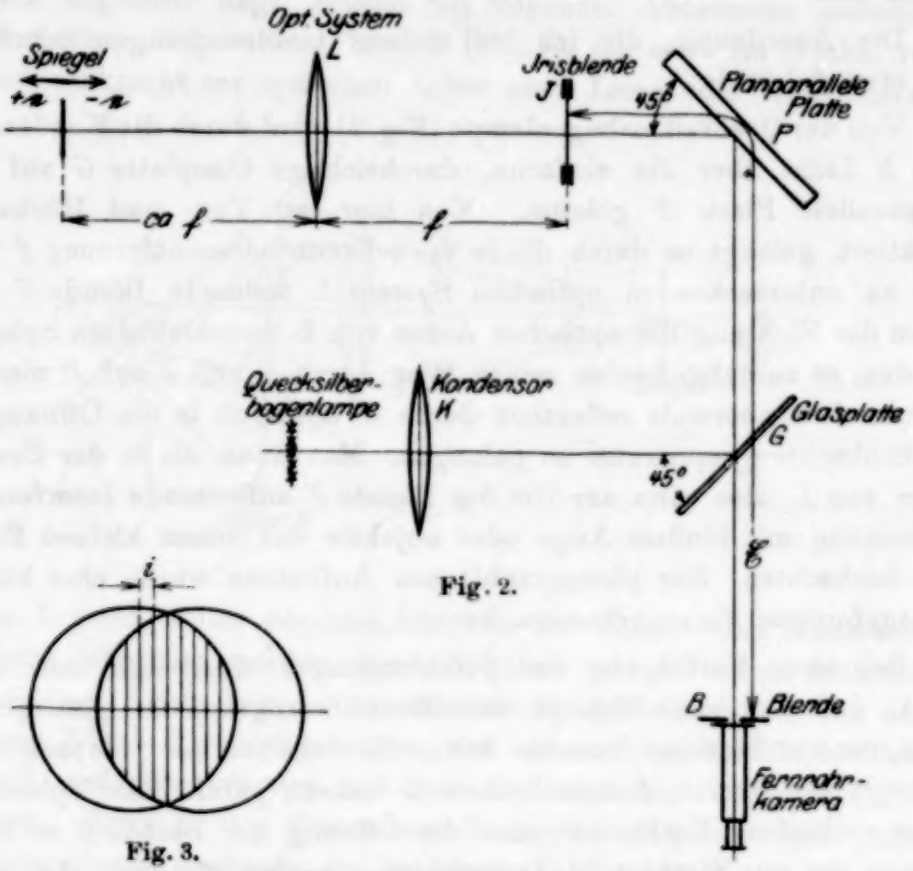


Fig. 2.

Fig. 3.

Strahlen, für die der Gangunterschied $\triangle$ gilt, von der optischen Achse ab und gemessen am Orte der Erscheinung. Schließlich ist

$$a_0 = \frac{d \cdot \sin 2\varphi}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}}$$

für eine bestimmte planparallele Platte von der Dicke d und dem Brechungsquotienten n bei einer Neigung φ gegen die optische Achse eine Konstante.

Man ersieht aus der Gleichung für $\triangle$, daß die Erscheinung wegen der linearen Abhängigkeit des $\triangle$ von $\mathfrak{h}''$ bei jeder Spiegelentfernung e

symmetrisch zu einem Streifen mit dem stets gleich Null bleibenden Gangunterschied, dem sogenannten „Nullstreifen", sein muß, der stets um $\mathfrak{h}'' = -\frac{a_0}{2}$ seitlich der optischen Achse liegt.

Für eine weitere Diskussion der Erscheinung verweise ich auf den § 5 der Arbeit Bratke-Waetzmann[1]).

Es kommt schließlich eine Interferenzerscheinung zustande, wie sie durch Fig. 3 dargestellt wird, wobei die „Breite", d. h. der Abstand i der äquidistanten Streifen voneinander eine lineare Funktion der Entfernung ϵ des Spiegels aus der Brennebene ist, und zwar so, daß beim Nähern des Spiegels an die Brennebene die Breite der Streifen zunimmt, bis schließlich die Streifen vollständig verschwunden sind, sobald der Spiegel in der Brennebene steht, umgekehrt, beim Entfernen des Spiegels aus der Brennebene die Streifen immer enger werden.

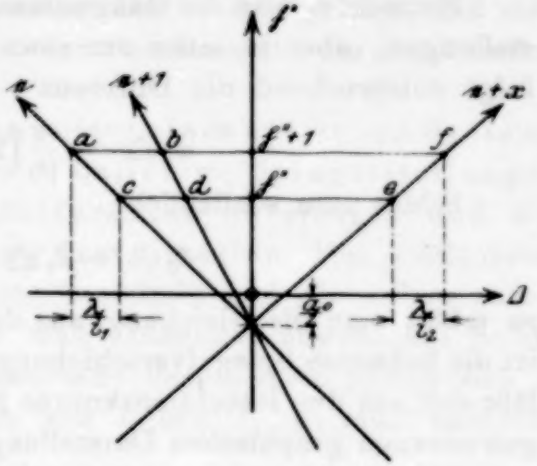


Fig. 4.

Man kann die Gleichung 6 auch graphisch darstellen, wie dies ebenfalls in dem obengenannten § 5 der Arbeit Bratke-Waetzmann näher ausgeführt ist. Trägt man für ein bestimmtes a_0 und f den Gangunterschied $\triangle$ in seiner Abhängigkeit von der Höhe $\mathfrak{h}''$ in einem rechtwinkligen Koordinatensystem mit $\triangle$ als Abszisse und $\mathfrak{h}''$ als Ordinate, sowie ϵ als Parameter auf, dann erhält man gerade Linien, die sich sämtlich in dem Punkte $\mathfrak{h}'' = -\frac{a_0}{2}$ der Ordinatenachse schneiden, wie dies in Fig. 4 dargestellt ist. Will man nun z. B. den Abstand i der Streifen untereinander für eine bestimmte Spiegelstellung ϵ haben, so kann man ihn sofort aus der Figur entnehmen, wenn man für zwei Abszissenpunkte, etwa 1λ und 2λ, die dazu gehörenden Ordinaten feststellt. Die Differenz der letzteren ergibt unmittelbar den Streifenabstand.

Die Grundlage für die Anwendung dieser Interferenzerscheinung zur Bestimmung von Brennweiten wird nun durch folgende Überlegung gegeben:

[1]) Bratke und Waetzmann, a. a. O.

Es sei etwa der Gangunterschied für eine bestimmte Spiegelstellung e für die Höhe $\mathfrak{h}''$:

$$\triangle_1 = \frac{a_0}{f^2}(2\mathfrak{h}'' + a_0)\,e$$

und für die gleiche Höhe $\mathfrak{h}''$ bei einer um x mm verschobenen Stellung des Spiegels

$$\triangle_2 = \frac{a_0}{f^2}(2\mathfrak{h}'' + a_0)(e + x).$$

Bildet man die Differenz $d_1\triangle = \triangle_2 - \triangle_1$, so ergibt sich

$$d_1\triangle = \frac{a_0}{f^2}(2\mathfrak{h}'' + a_0)\,x.$$

Betrachtet man die Gangunterschiede für dieselben beiden Spiegelstellungen, aber in einer um etwa 1 mm größeren Höhe $(\mathfrak{h}'' + 1)$, so folgt entsprechend die Differenz

$$d_2\triangle = \frac{a_0}{f^2}[2(\mathfrak{h}'' + 1) + a_0]\,x.$$

Bildet man schließlich:

$$d_2\triangle - d_1\triangle = \frac{2a_0}{f^2}x, \tag{1}$$

so erhält man die Gleichung, aus der f berechnet werden kann, denn x ist die bekannte Spiegelverschiebung, e eine Konstante und $d_2\triangle - d_1\triangle$ läßt sich aus den Interferenzkurven bzw. aus der mit Hilfe der letzteren gewonnenen graphischen Darstellung der Gangunterschiede entnehmen.

Die Bedeutung von $d_2\triangle - d_1\triangle$ erkennt man am besten aus Fig. 4. Die Differenz ist gegeben durch den Unterschied der Strecken $af - ce$. Sie steht auch im einfachen Zusammenhange mit den Abständen i der Interferenzstreifen. Bezeichnet man mit i_1 den Abstand in Millimetern zweier Interferenzstreifen bei der Spiegelstellung e, dann heißt das: Der Gangunterschied hat bei einer um i_1 mm vermehrten Höhe $\mathfrak{h}''$ um $1\,\lambda$ zugenommen. Mithin wächst er bei Höhensteigerung von 1 mm um λ/i_1 mm. Bei einer zweiten Spiegelstellung $(e + x)$ möge er entsprechend um λ/i_2 mm zunehmen. (In der Fig. 4 sind diese Größen eingetragen.) Es gilt dann:

$$af - ce = \frac{\lambda}{i_1} + \frac{\lambda}{i^2},$$

womit für die Brennweite f aus Gleichung (1) folgt:

$$f = \sqrt{\frac{2a_0}{\lambda} \cdot \frac{x}{\frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_2}}}. \tag{2}$$

In dieser Gleichung sind a_0 und λ — die Wellenlänge des angewandten Lichtes — genau bekannt und x, die Spiegelverschiebung, läßt sich mit beliebiger Genauigkeit messen. Der Fehler, der bei der

Berechnung in f eingeht, hängt somit in der Hauptsache nur von der Genauigkeit ab, mit der die Streifenabstände i_1 und i_2 bestimmt werden können. Auf eine besondere Fehlerrechnung sei hier nicht eingegangen, da es in der vorliegenden Arbeit nur darauf ankommt, die Methode prinzipiell darzulegen und eine derartige Rechnung erst am Platze sein dürfte, wenn zu den Untersuchungen die verbesserte Anordnung verwandt wird, wie sie bereits früher [1]) bei der Anwendung der Interferenzerscheinung zur Prüfung optischer Systeme vorgeschlagen wurde.

Bei den mit der vorliegenden Methode an den verschiedensten Linsen und Linsensystemen vorgenommenen Messungen, von denen unten zwei Beispiele mitgeteilt werden, hat es sich gezeigt, daß man bereits jetzt mit einer Genauigkeit der Resultate für die Brennweiten von 1 bis 2 Prom. rechnen kann.

Zur Bestimmung der Brennweite f eines optischen Systems hat man also nur nötig, für zwei beliebige Spiegelstellungen die Streifenabstände der Interferenzen zu messen und die Größe der Spiegelverschiebung festzustellen. Man wählt dabei zweckmäßig die eine Spiegelstellung innerhalb und die andere außerhalb der Brennweite. Verwendet man Spiegelstellungen, die beide entweder vor oder hinter der Brennebene liegen, dann ändert sich in Gleichung (2) nur das Vorzeichen von i_1 bzw. i_2, es muß entweder $\frac{1}{i_1} - \frac{1}{i_2}$ oder $\frac{1}{i_2} - \frac{1}{i_1}$ gesetzt werden, wovon man sich an Hand der Fig. 4 leicht überzeugt. Zur Kontrolle der Messungen und zur Erhöhung der Genauigkeit wird man Messung und Rechnung für mehrere Doppelstellungen durchführen.

Ob die Öffnung der Blende klein genug ist, damit die ausgeblendeten Linsenzonen praktisch als aberrationslos angesehen werden können, läßt sich leicht aus dem Verlauf der Interferenzkurven feststellen. So erkennt man an der exakten Geradlinigkeit der Interferenzstreifen in dem unten angegebenen Beispiel der Fernrohrlinse $f = 485$ mm (Fig. 5a), daß diese Forderung vollkommen erfüllt ist, während die leichte Krümmung der Streifen im zweiten Beispiel (Fig. 5b), für das eine Einzellinse mit außerordentlich großer sphärischer Unterkorrektion genommen wurde, anzeigt, daß dies nur angenähert der Fall ist.

Die Methode gibt die Brennweite von den Hauptpunkten des optischen Systems aus gerechnet. Da zur Bildung des Interferenzbildes nur Strahlen beitragen, die die Mittel-

[1]) Bratke und Waetzmann, ZS. f. Phys. **12**, 253, 1922.

zonen des optischen Systems durchsetzen, so liefert sie direkt die Brennweite der sogenannten Achsenstrahlen. Soweit bekannt, wird diese Größe von keiner der bisherigen Methoden zur Brennweitenbestimmung unmittelbar gegeben, und es dürfte daher die Interferenzmethode bestimmt sein, diese Lücke in der optischen Meßtechnik auszufüllen, sobald die Versuchanordnung so durchgebildet

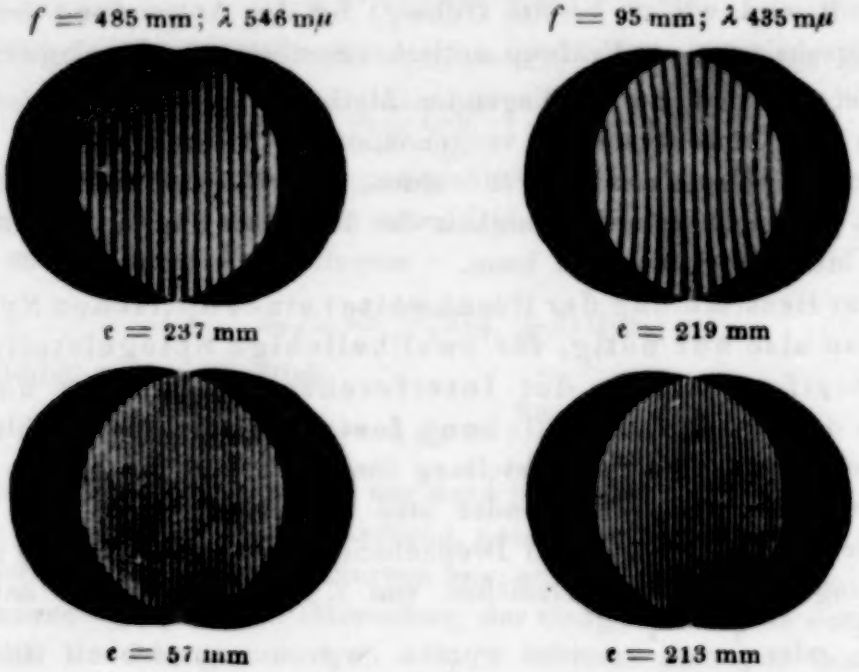


Fig. 5a. Fig. 5b.

ist, daß sie die notwendige, unschwer zu erreichende Genauigkeit der Resultate verbürgt.

Beispiele. Aus den zahlreichen Messungen, die zur Prüfung der Methode vorgenommen wurden, seien hier nur zwei willkürlich herausgenommene Beispiele mitgeteilt.

Gemessen wurde bei der oben angegebenen Versuchsanordnung mit den Wellenlängen λ 578 mμ, 546 mμ und 435 mμ, die mit geeigneten, z. T. selbst hergestellten, spektrographisch genau untersuchten Platten- bzw. Flüssigkeitsfiltern von einer Quarz-Quecksilberbogenlampe erhalten wurden. Die planparallele Platte stammte aus einem Lummerschen Interferenzspektroskop und hatte eine Dicke von 3,16 mm. Die Größe a_0 war für dieselbe aus vielen direkten Messungen zu 2,33 mm genau bestimmt worden. Die unten angegebenen Spiegelentfernungen ε sind von einem genügend weit außerhalb der Brennweite des untersuchten optischen Systems liegenden Mittelpunkte einer Skale gerechnet, über der sich der Spiegel verschieben ließ. Für die Rechnung interessiert nur die Größe x der Spiegelverschiebung, d. h. die Differenz

der ε Werte. Die Interferenzbilder wurden mittels einer am Beobachtungsfernrohr angebrachten kleinen photographischen Kamera aufgenommen. Für λ 435 mμ und 405 mμ fanden Hauff-Ultrarapidplatten, für λ 578 mμ orthochromatische Flavinplatten Verwendung. Unten wiedergegeben sind nur die Interferenzbilder für λ 546 mμ bzw. λ 435 mμ. Die Bilder für die anderen Wellenlängen unterscheiden sich nur in der etwas abweichenden Breite der Interferenzstreifen. Die Abstände der Streifen wurden direkt im Negativ auf einer Teilmaschine mikrometrisch ausgemessen, die $^1/_{300}$ mm ohne Nonius abzulesen gestattete.

1. Fernrohrlinse, chromatisch unkorrigiert, mit der mittleren Brennweite von 485 mm (Fig. 5a).

a) λ 578 mμ. Bei $\varepsilon = 57$ mm: Streifenabstand $i_1 = 0{,}273$ mm,
„ $\varepsilon = 237$ „ : „ $i_2 = 0{,}408$ „
$x = 180$ „ ; $a_0 = 2{,}33$ mm; $f_0 = 487$ „

b) λ 546 mμ. Bei $\varepsilon = 57$ mm: Streifenabstand $i_1 = 0{,}251$ mm,
„ $\varepsilon = 237$ „ : „ $i_2 = 0{,}395$ „
$x = 180$ „ ; $a_0 = 2{,}33$ mm; $f_0 = 485{,}5$ „

c) λ 435 mμ. Bei $\varepsilon = 70$ mm: Streifenabstand $i_1 = 0{,}199$ mm,
„ $\varepsilon = 237$ „ : „ $i_2 = 0{,}342$ „
$x = 167$ „ ; $a_0 = 2{,}33$ mm, $f_0 = 475$ „

2. Einzellinse, sphärisch sehr stark unterkorrigiert, mit einer mittleren Brennweite von 95 mm (Fig. 5b).

a) λ 578 mμ. Bei $\varepsilon = 219$ mm: Streifenabstand $i_1 = 0{,}282$ mm,
„ $\varepsilon = 211$ „ : „ $i_2 = 0{,}285$ „
$x = 8$ „ ; $a_0 = 2{,}33$ mm $f_0 = 95{,}8$ „

b) λ 546 mμ. Bei $\varepsilon = 219$ mm: Streifenabstand $i_1 = 0{,}291$ mm,
„ $\varepsilon = 211$ „ : „ $i_2 = 0{,}248$ „
$x = 8$ „ ; $a_0 = 2{,}33$ mm; $f_0 = 95{,}5$ „

c) λ 435 mμ. Bei $\varepsilon = 219$ mm: Streifenabstand $i_1 = 0{,}406$ mm,
„ $\varepsilon = 213$ „ : „ $i_2 = 0{,}209$ „
$x = 6$ „ ; $a_0 = 2{,}33$ mm; $f_0 = 94{,}2$ „

In den beiden Beispielen sind die zusammengehörenden ε-Werte so gewählt, daß sich die eine Spiegelstellung außerhalb, die andere innerhalb der betreffenden Brennweite befindet. Kontrollmessungen, auch bei anderen Spiegelstellungen, ergaben dieselben Resultate für f_0.

Zusammenfassung. Es wird eine Methode entwickelt und mit Beispielen belegt, welche die Brennweite der Achsenstrahlen eines optischen Systems aus den äquidistanten Streifenabständen zweier mittels einer bekannten Interferenzanordnung gewonnenen Interferenzbilder mit hoher Genauigkeit zu bestimmen gestattet.

Die Veränderlichkeit des Stickstoffbandenspektrums durch Edelgase.

Von **Walter Steubing** und **Mia Toussaint** in Aachen.

Mit acht Abbildungen. (Eingegangen am 3. Dezember 1923.)

In einer kürzlich an dieser Stelle veröffentlichten Arbeit hat der eine von uns [1]) gezeigt, daß bei Erzeugung des Stickstoffbandenspektrums in der positiven Säule durch Gleichstrom unter sonst ganz gleichartigen Verhältnissen dieses Spektrum erhebliche Änderungen erfährt, wenn dem Stickstoff größere Mengen Argon zugefügt werden.

Wie aus den beigegebenen Registrierkurven der erhaltenen Aufnahmen ersichtlich ist, ist diese Argon-Einwirkung keine regellose, die dort erwähnten Intensitätsänderungen zeigen ein so gesetzmäßiges Aussehen, daß trotz ungenügender Auflösung namentlich im Kopf der einzelnen Banden vollkommen deutlich drei verschiedene Serien erkenntlich sind, auf die sich die Intensität jetzt ganz anders verteilt, wie in den von Argon nicht beeinflußten Stickstoffbanden. Während nämlich in letzteren die Intensitätsverteilung in den einzelnen Gliedern vom Kopf der Bande aus nach höheren Quantenzahlen einen gleichmäßigen Abfall zeigt und erst bei reichlicher Exposition, so daß der Bandenkopf stark überbelichtet erscheint, der Auslauf der Bande bis zur nächsten Kante (Häufungsstelle) zu verfolgen ist, verlaufen in den Argon–Stickstoffbanden die Serien viel stärker zu höheren Quantenzahlen hinauf und überwiegen so sehr, daß die weiteren Banden zum Teil ganz zurücktreten. Man kann solche Intensitätsvergleiche natürlich nur vornehmen, indem man die Intensitäten auf relativ gleiche Schwärzung des eigentlichen Bandenkopfes bezieht.

Nun hat sich schon früher gezeigt, daß die Stickstoffbanden ihre Intensitätsverteilung, d. h. den relativen Schwärzungsabfall von der Kante nach kurzen Wellen zu ändern, wenn die Temperatur des emittierenden Stickstoffs variiert wird und das Spektrum einmal in flüssiger Luft, das andere Mal bei normaler Temperatur oder im elektrischen Ofen bei hohen Temperaturen erzeugt wird, und so schien es zunächst erforderlich, zu prüfen, ob die Wirkung des Argons auf die Intensitätsänderung in den Banden, für die das Wesentliche die verschiedenartige Intensitätsverteilung auf die einzelnen Serienglieder ist, in gleicher Weise sich äußert wie die Temperaturänderung oder nicht. Die bisher vorliegenden Untersuchungen haben keinerlei An-

[1]) Mia Toussaint, Auszug aus der Dissertation. ZS. f. Phys. **19**, 271—300, 1923.

deutungen davon gebracht, daß eine relative Änderung für die einzelnen Serienglieder bei Temperaturänderung eintritt und das mitgeteilte Material gestattet keine genaue Entscheidung, weil die Dispersion ungenügend war, die einzelnen Banden aufzulösen. In der Arbeit von Angerer[1]), die in dieser Hinsicht die günstigsten Bedingungen aufweist, findet sich eine Reproduktion der Banden bei λ 4000 bis 3900 Å.-E., in der die einzelnen Glieder erkennbar sind, doch ist die Wiedergabe nicht zuverlässig genug, um über ihre Intensitätsverteilung Aussagen machen zu können. Jedenfalls sind in der Arbeit selbst und in den Tabellen keine Angaben enthalten, daß eine so augenfällige Änderung, wie sie im Argon–Stickstoffgemisch auftritt, bemerkt worden ist.

Nächst dem Vergleich der Argon–Stickstoffaufnahmen mit den temperaturbeeinflußten Stickstoffbanden war eine Untersuchung erforderlich, ob und welchen Einfluß das Atomgewicht und der chemische Charakter des Zusatzgases auf die Änderungen im Spektrum haben. Es ist von vornherein unwahrscheinlich, daß diese Änderung in den Banden eine spezifisch dem Argon zugehörige Wirkung ist, da es als einatomiges Edelgas weder besondere molekulare Felder besitzen kann, noch sonst in seinem Verhalten eine Ausnahmestellung unter den Elementen einnimmt. Zwar ist in der eingangs zitierten Arbeit schon die Wirkung des Jods als Zusatzgas auf die Stickstoffbanden eingehend geprüft worden, dabei hat sich aber gezeigt, daß die Änderung im Charakter des Bandenspektrums eine ganz andersartige ist, die zur Erklärung hier nicht herangezogen werden kann.

Als letzter Punkt ist die Untersuchung mit anderen Edelgasen zu nennen, die dann von Bedeutung ist, wenn man die Veränderung der Stickstoffbanden als eine spezifische Argoneigenschaft erklären will. Leider war unser Versuchsmaterial hierzu sehr beschränkt, es stand uns nur ein Gemisch von Helium-Neon zur Verfügung, das uns die Lindewerke in Höllriegelskreuth in einer kleinen Bombe freundlichst zur Verfügung gestellt hatten.

Über die Einzelheiten der Versuchsanordnung: Stromquellen, Gitter, Registrierphotometer usw., möge man die zitierte Arbeit einsehen[2]). Wir benutzten auch zunächst dieselbe Entladungsröhre aus Glas.

Die Temperatureinwirkung wurde auf folgende Weise untersucht. Die übliche Entladungsröhre, wie sie bei den früheren Versuchen

[1]) Ann. d. Phys. **32**, 549, 1910.

[2]) Um ein Versehen auf S. 280, loc. cit., klarzustellen, sei bemerkt, daß der Assistent am hiesigen Institut Herr Dr. Anton Weber den Bau des Photometers übernommen hatte.

Verwendung fand, wurde an ihrem horizontalen Teil mit einer Heizspirale umwickelt, innerhalb deren ein verschiebbares Thermoelement aus Kupfer-Konstantan die im Rohr herrschende Temperatur zu messen und zu kontrollieren erlaubte. Es wurden so Temperaturen bis etwa 400° C erzielt. Ein Vergleich der N-Aufnahmen bei gewöhnlicher Temperatur mit denen bei geheizter positiver Säule ergab nun in der Tat den unter anderen von E. v. Angerer (l. c.) beobachteten verlängerten Intensitätsauslauf bei wachsender Temperatur, aber ohne jede auffällige Änderung in dem Intensitätsverhältnis der einzelnen Serien unter sich. Daraus ergibt sich mit voller Sicherheit, daß keinerlei Analogie zwischen der Veränderung der Stickstoffbanden durch Temperaturvariation mit jener bei Argonzusatz besteht.

Hinsichtlich der chemischen Beeinflussung der Stickstoffbanden durch das Zusatzgas liegen bereits die Beobachtungen des einen von uns über Jodbeimischung vor. Die dort ausführlich angegebenen Resultate lassen erkennen, daß das elektronegative Jod die Bandenstruktur in ganz anderer Weise verändert als es beim Argon der Fall ist. Augenscheinlich hat weder das Molekularfeld des Jods noch sein hohes Atomgewicht eine Wirkung in der Richtung geübt, wie wir es beim Argon sehen.

Immerhin schien es uns wünschenswert, noch mit anderen Elementen nachzuprüfen, ob und wie beide Faktoren zur Erklärung des am Argon gefundenen Effektes heranzuziehen wären.

Diese Versuche sind völlig negativ ausgefallen. Wenn man elektropositive Elemente verschiedenster Masse zusetzt, findet man keine Beeinflussung, ebensowenig bei Elementen, die in chemische Bindung mit dem Stickstoff treten (CN, NH_3 usw.). Unter anderem versuchten wir auch durch zugesetzten Quecksilberdampf eine Einwirkung festzustellen. Der nötige Dampfdruck, um das Mischungsverhältnis entsprechend dem Argon herzustellen, wurde durch Heizen der Röhre auf etwa 140° erhalten, nachdem die erst erwähnten Versuche bewiesen hatten, daß die Temperaturänderung keine Fehlerquelle sein würde. Es ging somit aus allen Versuchen hervor, daß unter sonst gleichen Bedingungen, was Entladungsart, Druck usw. angeht, die am Argon beobachtete Wirkung auf dieses Element beschränkt blieb, und wir hätten es demnach wider Erwarten mit einer spezifischen Eigenschaft des Argon zu tun.

Einzig der Vergleich mit anderen Edelgasen konnte lehren, wieweit dies Ergebnis zutreffend ist. Reine Edelgase standen uns leider nicht weiter zur Verfügung als eine Mischung von Helium–Neon, die nach

Analyse der Lindewerke aus 74 Proz. Ne und 24 Proz. He bestand, deren Trennung mit unseren Hilfsmitteln nicht möglich war. Man kann aber bei den folgenden Versuchen ohne weiteres annehmen, daß die vorhandene Wirkung allein auf Rechnung des Neons zu setzen ist.

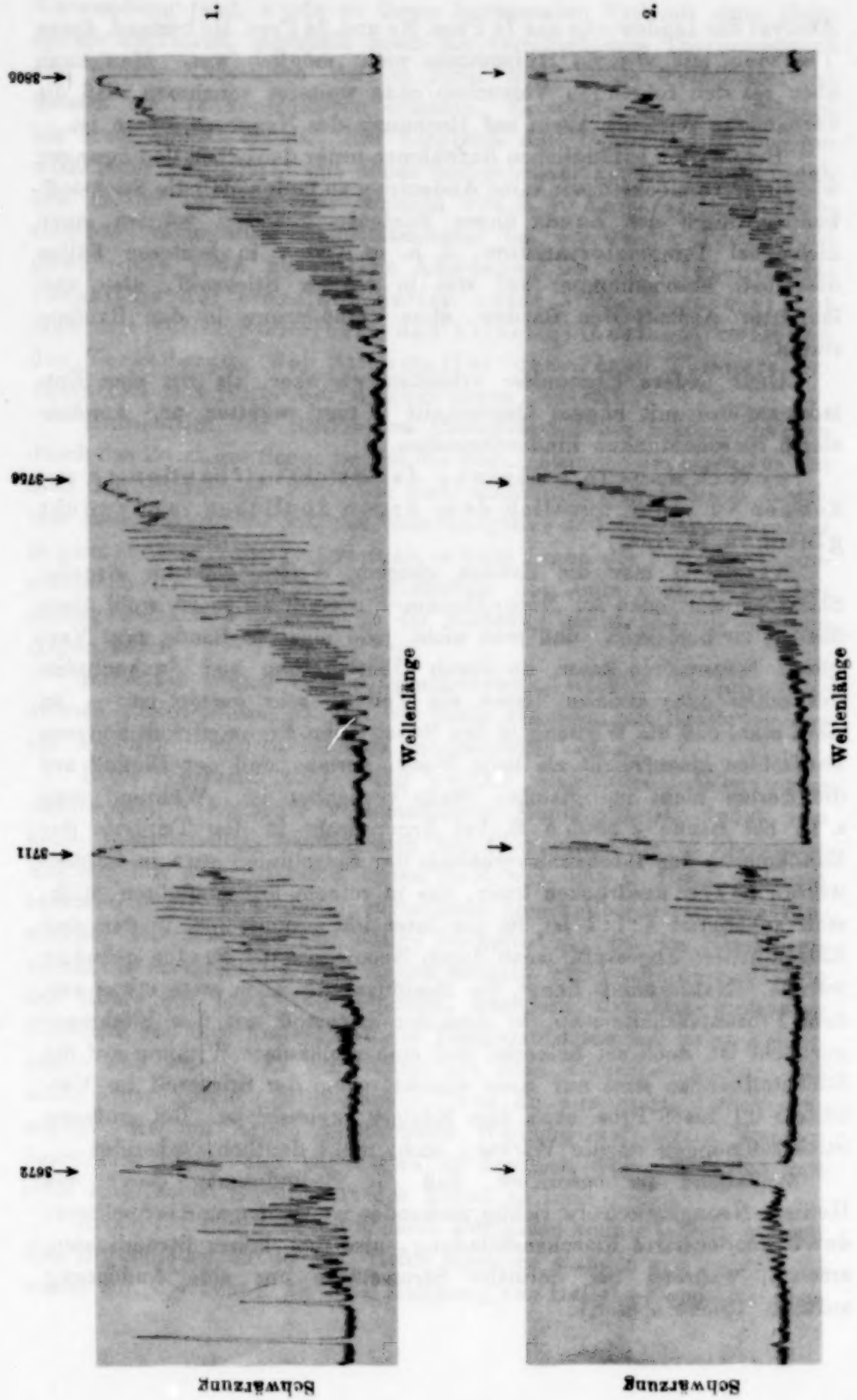
Bei unseren anfänglichen Aufnahmen unter denselben Bedingungen wie zuvor vermochten wir keine Andeutung zu finden, daß die Stickstoffbanden durch den Zusatz dieser Edelgase geändert würden, auch nicht bei Temperaturvariation, d. h. es traten in letzteren Fällen dieselben Erscheinungen auf wie in reinem Stickstoff, also verlängerter Auslauf der Banden, ohne Veränderung in den Bandenserien.

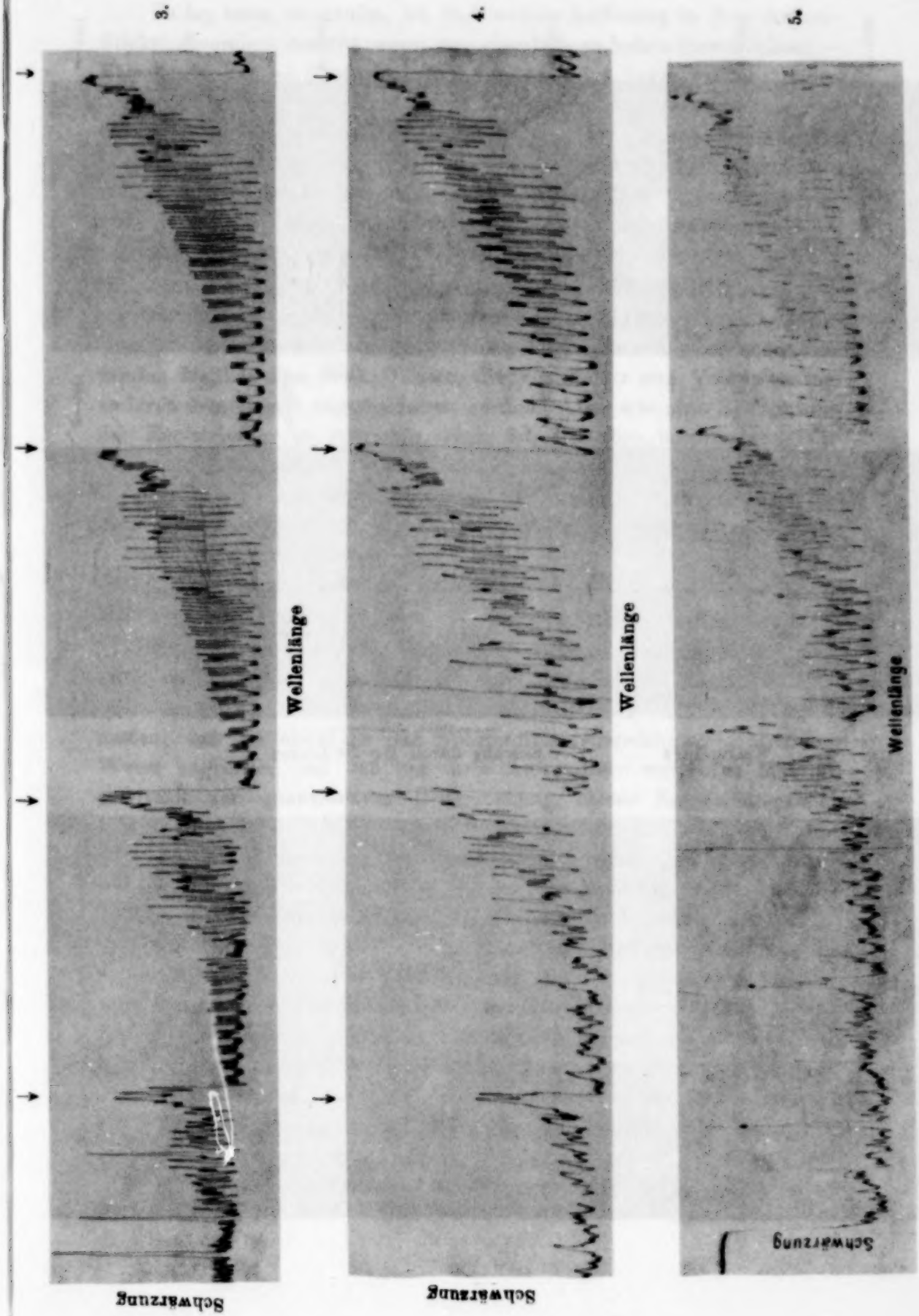
Ganz andere Ergebnisse erhielten wir aber, als wir eine Entladungsröhre mit engem Querschnitt (1 mm) wählten und kondensierte Flaschenfunken hindurchsandten.

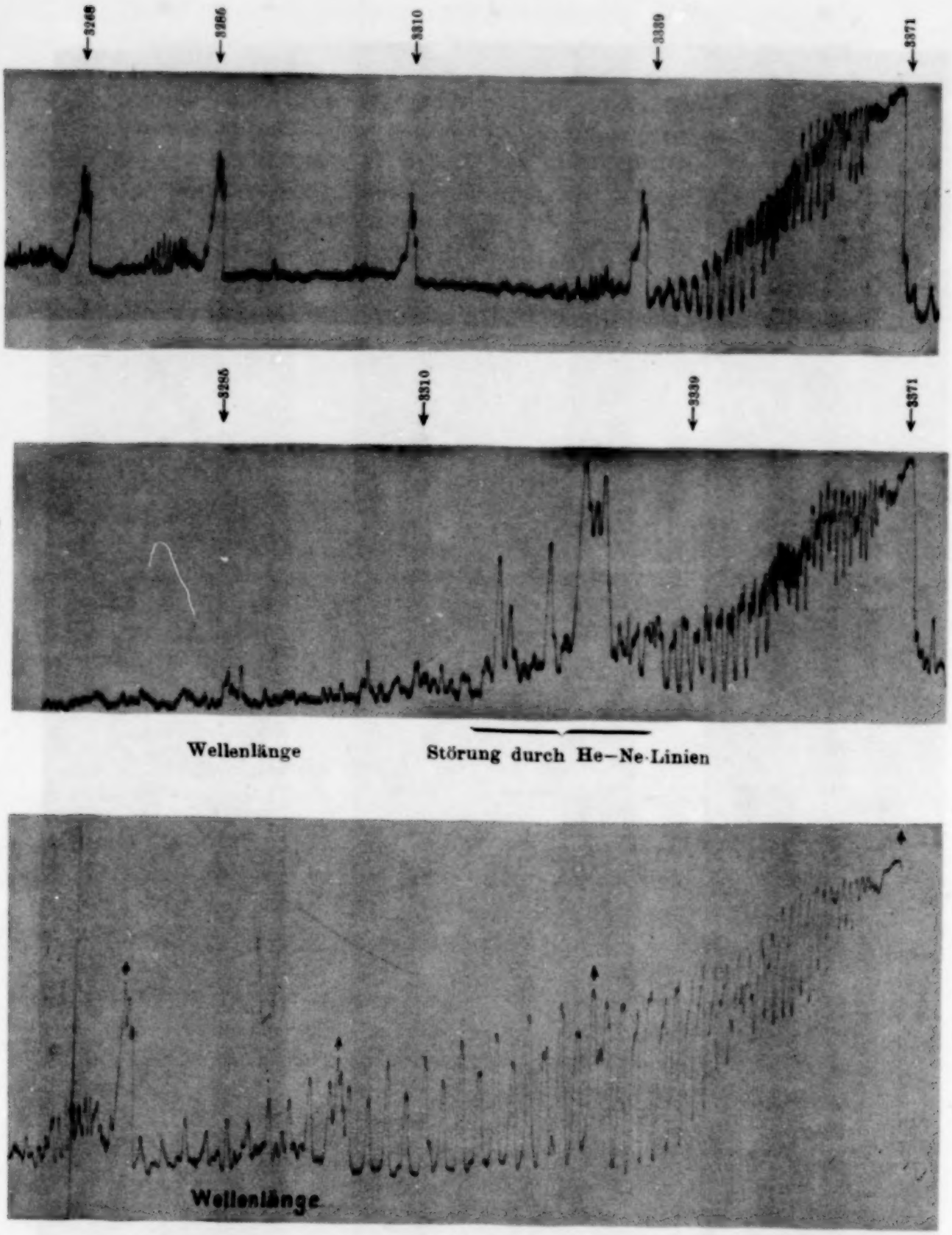
Sofort war die Änderung der Stickstoffbanden zu erkennen in einer deutlich dem Argon ähnlichen, aber nicht gleichen Weise.

Vergleicht man die Banden gleicher Wellenlänge im Argon–Stickstoff mit jenen im Neon–Helium–Stickstoff — es ist wohl überflüssig, zu bemerken, daß man nicht jede einzelne Bande zum Vergleich heranziehen kann, da durch Überlagerung von Funkenlinien des einen oder anderen Gases ein Teil zu sehr gestört ist —, so sieht man, daß die Wirkung in den Serien beim Argon zu weit höheren Laufzahlen hinaufreicht als beim Neon, ferner, daß der Einfluß auf die Serien nicht im gleichen Maße vorhanden ist. Während man z. B. bei Bande λ 3805 Å.-E. bei Argonzusatz in den Tripletts der Bandenmitte das Intensitätsverhältnis der Einzellinien etwa in Zahlenwerten 5 : 7 : 8 ausdrücken kann, das in reinem unbeeinflußten Stickstoff annähernd 1 : 1 : 1 ist, ist die Intensität proportional in den drei Einzelgliedern abgestuft, wenn durch Neonzusatz die Banden geändert werden. Naturgemäß hängt die Beeinflussung auch stets etwas von dem Prozentverhältnis ab, in dem der Stickstoff mit den Edelgasen gemischt ist, doch sei bemerkt, daß eine molekulare Wirkung auf die Stickstoffbanden stets nur dann eintritt, wenn der Stickstoff im Verhältnis 0,1 bis 8 Proz. etwa dem Edelgas zugesetzt ist. Bei größeren Stickstoffmengen ist die Wirkung nicht mehr deutlich vorhanden.

Auffallend ist besonders, daß die Beeinflussung durch das Helium–Neongemisch erst richtig vorhanden ist, wenn man das Spektrum durch kondensierte Flaschenentladung, also bei hohen Stromlichten, erzeugt, während bei normaler Stromstärke nur eine Andeutung auftritt. (Siehe später.)


i
ci
8606
8766
8711
8672
Wellenlänge
Wellenlänge
Schwärzung
Schwärzung


3.
4.
5.
Wellenlänge
Wellenlänge
Wellenlänge
Schwärzung
Schwärzung
Schwärzung


3265
3285
3310
3339
3371
3285
3310
3339
3371
Schwärzung
Wellenlänge
Störung durch He–Ne-Linien
Schwärzung
Wellenlänge

Es lag nahe, zu prüfen, ob und welche Änderung in dem Argon–Stickstoffgemisch eintritt, wenn man ebenfalls zu hohen Stromdichten — Flaschenfunken — übergeht. Wir fanden indes keine größere Beeinflussung als unter normalen Strombedingungen, nur wurden die Verhältnisse insofern wesentlich ungünstiger, als bei Funkenentladung der Linienreichtum von Argonlinien das Bandenspektrum stark überlagerte und überhaupt dessen Intensität recht ungünstig beeinflußte. — Freilich wird auch im Helium–Neon–Stickstoffgemisch das Bandenspektrum bei nicht kondensierter Entladung viel rascher und kräftiger erzeugt.

Daß etwa im Helium–Neongemisch vorhandene Spuren Argon an der Einwirkung schuld sein könnten, erscheint ausgeschlossen (nach der Analyse der Lindewerke sollte kein Argon in ihm enthalten sein); wir fanden freilich eine Reihe Linien, die von Eder und Valenta und anderen dem Argon zugeschrieben werden. Aber wie eine Betrachtung der Registrierkurven späterhin zeigt, ist die oben besprochene Wirkung im Argon allein nicht zu erzielen.

Endlich untersuchten wir noch, welche Änderungen sowohl im Argon–Stickstoffgemisch wie im Helium–Neon–Stickstoffgemisch bei Temperaturvariation durch Heizung der positiven Säule zu erzielen sind, ohne jedoch Resultate zu bekommen, die über die im reinen Stickstoff erhaltenen, die oben erwähnt wurden, hinausgingen.

Zu unserem Bedauern sind wir nicht in der Lage, mit den seltenen Edelgasen Xenon und Krypton, zu arbeiten, da wir sie unter den heutigen Verhältnissen nicht beschaffen konnten. Es ist zu vermuten, daß sie ebenfalls das Stickstoffbandenspektrum in ähnlicher Weise angreifen und daß bei ihrer Anwendung wertvolles Material eventuell zur quantitativen Untersuchung dieser Erscheinung sich gewinnen ließ.

Die vorliegenden Ergebnisse mögen durch beifolgende Registrierkurven erläutert werden. Wir haben die Aufnahmen so gewählt, daß die Bandenkanten (Köpfe, Häufungsstellen) annähernd gleiche Intensität (Schwärzung) besitzen, damit die relativen Änderungen möglichst unter gleichen Verhältnissen augenfällig würden. Ferner haben wir solche Bandengruppen zur Registrierung verwendet, bei denen möglichst wenig fremde Linien (der Zusatzgase) das Bandenbild stören. Wo solche dennoch sich nicht vermeiden ließen, sind sie in der Reproduktion durch eine Klammer als solche gekennzeichnet.

Zu den einzelnen Kurven sei folgendes bemerkt[1]):

---

[1]) Auf Wunsch von Verlag und Redaktion haben wir zur Kostenersparnis auf die Wiedergabe eines Teils unserer Aufnahmen und Registrierkurven verzichtet,

Kurve 1 zeigt die Bande λ 3805 Å.-E. von reinem unbeeinflußten Stickstoff bei Gleichstromerregung unter normaler Temperatur. Die Bandenköpfe sind jeweils durch Pfeile gekennzeichnet. Der Intensitäts(Schwärzungs)abfall erfolgt von der Häufungsstelle zur Abszissenachse in parabolisch gekrümmter Kurve.

Kurve 2 ist an Stickstoff im Helium–Neongemisch unter sonst gleichen Bedingungen wie 1 aufgenommen. Man kann beim Betrachten der Platten keine Unterschiede gegenüber 1 erkennen, obschon in der Registrierkurve, wenn auch nur sehr schwach und bei sorgfältigem Vergleich erkennbar, die Wirkung des Edelgases sich bemerkbar macht.

Kurve 3 bei gleicher Gasfüllung, aber auf 400° C gesteigerter Temperatur läßt erkennen, daß die Temperatur nicht von Bedeutung ist; der vollkommen gleichmäßige Verlauf der Bande in den einzelnen Serien unterscheidet sich nicht mehr von Kurve 2 als dies bei reinem Stickstoff der Fall ist. Der Intensitätsabfall erfolgt mehr geradlinig, die Intensitätsverteilung der Serienglieder, z. B. in den Tripletts, erscheint aber ungeändert. Gasdruck und Strom wie zuvor.

Man wird bemerken, daß der Auslauf der Bande etwas weiter zu verfolgen ist, dafür aber die Kantenschwärzung geringer ist, wie bei den analogen Kurven. Die Ursache ist nach beendeter Aufnahme erfolgter Plattenschleier: Die Arbeit mußte bei der Schließung der Hochschule durch die Besatzungsbehörden anläßlich der Separatistenunruhen abgebrochen werden und wegen Demontierung der ganzen Apparatur war die Aufnahme nicht mehr zu wiederholen.

Kurve 4. Gasfüllung die gleiche wie bei 2 und 3, aber statt Hochspannungsgleichstrom Flaschenfunkenentladung durch die Kapillare. Man sieht deutlich die verschieden beeinflußten Serienglieder und die verstärkte Energieübertragung zu höheren Laufzahlen, wie früher bei Argonzusatz.

Kurve 5. Gasfüllung Argon und Stickstoff, aber wieder Hochspannungsgleichstrom und keine kondensierte Funkenentladung. Die Wirkung ist hier noch wesentlich augenfälliger als bei 4, auch zeigt ein genauer Vergleich, daß im Argongemisch in den Tripletts je zwei Glieder ungleich stärker in der Intensität gehoben werden, als das dritte, während im Neon–Helium–Stickstoff (4) die Wirkung sich ziemlich gleichmäßig auf die drei Glieder abstuft.

---

so 1. die Temperaturkurven in reinem Stickstoff; 2. die entsprechenden Kurven an der Bande λ 3371 Å.-E. bis auf zwei. 3. Leider ist bei der Reproduktion der Originalkurven nicht bei allen der gleiche Maßstab zur Verkleinerung benutzt worden, und daher sind Kurven 5 und 7 besonders in der Abszissenachse mehr verkürzt als die übrigen Kurven.

Die folgenden Kurven 6, 7 und 8 zeigen die Bande λ 3371 Å.-E. Kurve 6 ist an Helium–Neongemisch mit Stickstoff ohne kondensierte Entladung aufgenommen. Man wird hier beim Vergleich mit der Kurve 7, die mit Flaschenentladung erhalten wurde, schon die beginnende Wirkung deutlicher sehen als bei Kurve 2 der Bande λ 3805 Å.-E. Bei Kurve 7 ist ein größeres Stück der Bande durch überlagerte Funkenlinien von Helium–Neon gestört. Die betreffende Stelle ist durch eine Klammer bezeichnet. Kurve 8 zeigt wieder die starke Argonwirkung.

Fassen wir die Ergebnisse im folgenden kurz zusammen, so können wir sagen:

1. Das Stickstoffbandenspektrum erfährt in der ganzen Energieverteilung in den einzelnen Bandengruppen starke Veränderungen, die sich durch Intensitätsunterschiede der einzelnen Bandenserien bemerkbar machen, wenn der Stickstoff mit großen Mengen ionisierten Argons gemischt wird.

2. Eine ähnliche Wirkung, aber quantitativ und qualitativ geringer, erhält man, wenn man den Stickstoff mit stark ionisierten Mengen Neon mischt.

3. Diese Veränderungen lassen sich mit anderen Elementen, gleichgültig ob mit hohem oder niedrigem Atomgewicht, elektropositiven oder elektronegativen Eigenschaften unter denselben Bedingungen nicht erzielen.

4. Diese Veränderungen haben nichts mit der Temperatur des leuchtenden Gases zu tun; die Temperaturvariation ergibt eine Intensitätsverschiebung von anderer Art und ist unabhängig von obigem Effekt.

5. Wir müssen bei den Edelgasen eine mit Änderung der Elektronenkonfiguration bei starker Ionisierung auftretende Änderung ihrer Eigenschaften annehmen, auf die die Beeinflussung des Stickstoffmoleküls bei seiner Bandenemission zurückzuführen ist, und zwar ist nach den Versuchsbedingungen anzunehmen, daß die Wirkung beim Argon bei einfacher, dagegen beim Neon erst bei mehrfacher Ionisierung eintritt.

Der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft sind wir zu Dank verpflichtet, durch Gewährung von Mitteln für die photographischen Aufnahmen und Registrierkurven.

Aachen, Phys. Inst. d. Techn. Hochschule, 19. November 1923.

Zur Axiomatik der Physik.

Von **Ernst Wasa Bräuer** in Voigtsdorf im Riesengebirge.

(Eingegangen am 5. Dezember 1923.)

Die Forschungsarbeit der theoretischen Physik baut sich im wesentlichen auf zwei Axiomen auf. Das erste dieser Axiome ist das der Anschaulichkeit. In sein Gebiet gehören Begriffe wie Kraft, Quellpunkt usw. Es besagt, daß alle Erscheinungen sich letzten Endes zurückführen lassen auf Bewegung von Körpern. Das andere Axiom ist ausgedrückt in der mathematischen Form der physikalischen Erkenntnisse. Es besagt, daß die Naturgesetze absolute Gültigkeit haben über die Grenze der Möglichkeit einer Beobachtung hinaus, unabhängig davon, ob man den Wortlaut der Naturgesetze bereits wirklich richtig erfaßt hat oder auch je erfassen wird.

Es war von vornherein anzunehmen, daß diese beiden Axiome einmal miteinander in Widerstreit geraten würden und jetzt ist dieser Streit offenbar an drei Punkten der Physik ausgebrochen, und zwar 1. bei der Abschaffung des Äthers und Einführung des Kraftfeldes oder Maßstabfeldes, 2. durch die imaginäre Zeitachse der Relativitätstheorie und 3. durch die ganze Atomphysik, durch das absolut unvorstellbare Energiequantum, durch das im Atom umlaufende und doch nicht strahlende Elektron und durch die Anziehung des Atomkernes, durch die doch noch kein Elektron in den Kern hineingestürzt ist.

Um über die offenbar nicht restlos miteinander verträglichen Axiome eine Entscheidung zu fällen, betrachten wir die Arbeitsart der theoretischen Physik an einem beliebigen Beispiel, z. B. den sphärischen Klein-Massen-Pendel. Zu der Behandlung dieses Problems setzen wir an zunächst die Kugelgleichung als eine Koordinatenbedingung, welche der Pendelpunkt erfüllen muß und dann irgend ein physikalisches Gleichungssystem, z. B. das Prinzip der kleinsten Wirkung. Diese beiden Gleichungsarten werden als miteinander verknüpfbar betrachtet und die Existenz einer theoretischen Physik beweist auch das Recht hierzu. Aber man darf nicht übersehen, daß dieses eine neue, tatsächliche Erkenntnis darstellt, und zwar eine Erkenntnis von großer Tragweite. An und für sich besteht ja keineswegs allgemein die Möglichkeit, Gleichungen miteinander zu verknüpfen, selbst wenn die Größen in ihnen zum Teil übereinstimmen. Gerade in unserem Falle sind die beiden Gleichungen vollkommen wesensverschieden. Die Kugelgleichung ist eine leere, durchaus unphysikalische, mathematische

Aussage. Sie erhält erst Sinn dadurch, daß ein Punkt vorhanden ist und wenn ein Punkt vorhanden ist, welchem sie Bahnbedingung sein kann, oder, müssen wir verallgemeinernd sagen, wenn überhaupt etwas raumzeitlich Lokalisierbares vorhanden ist, für das sie als Gesetz eines zeitlichen Ablaufes dienen kann. Die anderen physikalischen Gleichungen sind Aussagen ganz anderer Natur über Größen, die in den Gleichungen selbst enthalten sind. Es gibt nur zwei solcher physikalischen Größen, nämlich die elektrische Ladung e und die Masse m. Von diesen sagt die Gleichung selbst eine Koordinatenbeziehung aus.

Was ist denn aber nun eine Masse, wenn wir das Wort „ist" im strengsten Sinne nehmen? Wir wissen von der Masse nichts anderes auszusagen, als daß andere Massen bestimmte Bewegungen ausführen, für deren Beschreibung der Ort der ersten Masse eine ausgezeichnete Koordinate ist, daß diese anderen Massen eine Beschleunigung auf die erste Masse hin erfahren, und daß die Masse selbst durch ihre Trägheit mit den raumzeitlichen Veränderungen der Umgebung durch bestimmte Beziehungen verknüpft ist. Eine einzelne Masse in der Welt wäre ebenso gut wie gar keine Masse, sie wäre schlechthin unerkennbar. Das, was wir zu erkennen glauben, beruht ausschließlich auf der Wechselseitigkeit mehrerer Massen. Die Masse ist nichts anderes als eine Fiktion zur Vereinfachung der Beschreibung von Bewegungsvorgängen und läßt sich vollständig wieder durch die Bewegungsvorgänge ersetzen. Wir haben also den Fall, daß eine Masse nichts anderes ist als die Tatsache bestimmter Bewegung anderer Massen, und jede dieser anderen Massen ist auch nichts anderes als die Tatsache der Bewegung der übrigen Massen. Die Gleichungen, welche den Massenbegriff enthalten, sind in Wahrheit nur Beziehungen zwischen Koordinaten im allgemeinsten Sinne, wozu die Zeit gehört. Dasselbe gilt entsprechend für die elektrischen Ladungen.

Eine solche physikalische Gleichung, etwa das Prinzip der kleinsten Wirkung, erhält dadurch denselben Charakter, wie ihn die Kugelgleichung hat. Man sieht, daß sie ebenso wie die Kugelgleichung nur dadurch eine Bedeutung im Weltbilde hat, daß sie Bahn und Bewegungsvorschrift für etwas anderes ist. So hat diese physikalische Gleichung nur durch Beziehung auf ein Anderes, nicht in den Gleichungen Enthaltenes, eine Wirklichkeitsbedeutung erlangt. Da nun aber die mathematische Physik mit Recht den Anspruch erheben kann, die Welt vollständig zu beschreiben durch ihre Gleichungssysteme, so müssen wir folgern, daß die physikalische Welt gar nichts in sich geschlossenes ist, sondern ausschließlich Wirklich-

keit erst damit erlangt, daß sie Bahnvorschrift wird für etwas, was im Reiche der Physik nicht existiert, sondern außerhalb dieses Reiches liegt.

Zur Erläuterung dieses Gedankens sei noch eine andere Ableitung herangezogen. Man ist bekanntlich in der Lage, die Masse als Dimension zu eliminieren, wenn man nur träge und schwere Massen als einander proportional setzt. Man hat

$$[\text{Kraft}] = \frac{m_1 m_2}{r^2} = [m^2 l^{-2}] = [m l t^{-2}]$$
$$[m] = [l^3 t^{-2}]$$

und das gleiche gilt für die elektrische Ladung. Durch Einsetzung der gefundenen Masse in das Coulombsche Gesetz erhält man auch für die Dimension

$$[m l t^{-2}] = \frac{e_1 e_2}{r^2} = [e^2 l^{-2}] = [l^3 t^{-2} . l t^{-2}]$$
$$[e] = [l^3 t^{-2}]$$

Welcher Art ist nun dieses Etwas, welches außerhalb der Physik liegend, diese erst zur Wirklichkeit erhebt? — Nun, es bietet sich uns dafür nur ein einziges Ding an, dieses allerdings mit einer überraschend vollkommenen Eignung für diesen ihm angewiesenen Platz, nämlich das menschliche Denken. Unser Denken besitzt die Eigenschaft raumzeitlicher Lokalisierbarkeit. Es muß notgedrungen Rücksicht nehmen auf das Vorhandensein der physikalischen Welt, jedes Atom und weiter natürlich jeder Körper, jede Lichtwelle und jede Energieäußerung ist etwas, was als Bedingung unseres Denkstromes auftritt. Und zwar erschöpft sich offenbar ein Atom und jeder andere physikalische Vorgang darin, Denkbedingung zu sein. In keiner anderen Weise, als indem er den Strom unseres Denkens beeinflußt, wird er wirklich.

Unser Denken unterliegt bekanntlich noch ganz anderen Gesetzen und Verlaufsbedingungen. Z. B. müssen wir Rücksicht darauf nehmen, daß, wenn zwei Größen einer dritten gleich sind, diese einander gleich sind; und ebenso gelten alle mathematischen und logischen Sätze als Bedingungen unseres Denkens. Wir können nicht anders als auf sie Rücksicht nehmen. Dieses Nichtanderskönnen muß ich noch etwas erläutern. Es gilt offenbar für das Denken ein ähnliches Minimumprinzip wie für die Physik. Man darf sogar vermuten, es gilt dasselbe Prinzip. So wie in der Physik das Hamiltonsche Gesetz den einen einzig wahren Ablauf heraushebt aus allen virtuell möglichen, als den, welcher tatsächlich ist, welcher für alle Zeiten ausgezeichnet ist, genau

so hebt sich auch für unser Denken der eine Ablauf hervor, der stets mit der Wirklichkeit konform bleibt, nämlich der, welcher in der Anerkennung dieser mathematisch-logischen Beziehungen besteht. Jede einzelne Leugnung eines solchen Prinzips führt rettungslos für alle Zeiten auf einen Abweg und gestattet keine Rückkehr zu dem einen ausgezeichneten Wege, den wir in der Physik als den wirklichen und in der Mathematik als den richtigen bezeichnen.

Die logisch-mathematischen Beziehungen fassen wir zusammen als Welt der Mengenbeziehungen und Einheiten. Mengenbeziehungen als solche sind leer und sinnlos, solange nicht Einheiten existieren, welche sich nach ihnen richten, und diese Einheiten finden wir in Gestalt der physikalischen Welt. So schließt sich der Ring der Erkenntnis.

Wir wollen ihn nochmals in entgegengesetzter Richtung durchlaufen. Das, was als unbezweifelbare Wirklichkeit existiert, ist der Strom des menschlichen Denkens. Alles, was im Begriffe des Denkens drinsteckt und analytisch aus dem Begriffe herausgelöst werden kann, ist ebenso wirklich wie das Denken selbst. In diesem Sinne wirklich ist die Existenz einer Welt von Bedingungen für das Denken. Denn ein Denken im Leeren ist kein Denken, es ist ein Widerspruch an sich. Ebenso denknotwendig erscheint die Unterteilung des Bedingungssystems in Mengenbeziehungen und Einheiten und tatsächlich lehrt unsere Erfahrung, daß die Welt in dieser Weise aufgebaut und verknüpft ist.

Die weittragenden Folgerungen, die sich aus der Erkenntnis dieser Einheit ergeben, gehören nicht hierher. Ich gehe nur auf die unmittelbaren physikalischen Folgerungen ein. Wir erkennen, daß die Anschauung zu einem untergeordneten Begriffe, zu einer Art Rechengröße wird. Anschauung ist das erste Stadium der Erkenntnis. Der Satz, daß Denken ohne Anschauung unmöglich ist, verändert sich dahin, daß Denken ohne Berührung mit den Denkbedingungen, mit seinen eigenen inneren Gesetzen unmöglich ist, während uns seine Umkehrung „keine Anschauung ohne Denken“ bestätigt, daß in Wahrheit der Denkstrom unmittelbar mit den Bedingungen verknüpft ist, also nicht etwa die Anschauung. Die axiomatische Forderung der Anschaulichkeit kann darum nicht richtig sein. Wenn die physikalische Welt ausschließlich Bedingung des Denkens ist, so liegt gar kein Grund dazu vor, die Möglichkeit von grobmateriellen Bildern für physikalische Vorgänge zu fordern. Dagegen wird die Überzeugung von der mathematischen Gültigkeit der physikalischen Gesetze zur Gewißheit erhoben und der mathematischen Gleichungsform der volle Rang der Tatsache eingeräumt. Das Kraftfeld wird in seiner un-

anschaulichen Form als gesetzmäßige Beziehung zwischen den Koordinaten, als die wahrhafte letzte Lösung des physikalischen Problems erkannt. Die imaginäre Zeitkoordinate der Relativitätstheorie wird zu dem natürlichsten Dinge der Welt. Die Forderung eines anschaulichen Bildes für das Energiequantum erkennen wir als unberechtigt. Das Elektron wird zu einer den unendlichen Raum füllenden Gleichung, die seine statischen und Strahlungswirkungen umfaßt und sich dabei vollständig von dem Bilde der „Bewegung" des Elektrons frei macht. Diese Erkenntnis ist geeignet, vieler Arbeit und manchem Vorurteil vorzubeugen. Insbesondere erscheint es mir als fruchtbare Auffassung, von der Anziehungskraft, die unsere Vorstellung vom Atominnern doch entscheidend beherrscht, vollständig abzusehen und sich mit der räumlichen und zeitlichen Verknüpfung der außerhalb des Atoms bemerkbaren Vorgänge zu begnügen. Man darf nicht vergessen, daß das kreisende Elektron ein grobmaterielles Bild ist und daß auch der anziehende Atomkern nichts ist als eine Analogie, oder sagen wir vereinfachende, wenn auch leider offenbar unrichtige Darstellung der Tatsache, daß ähnliche Gesetze wie für umlaufende Planeten für die räumliche Verteilung der Elektronenenergie gelten.

Ich fasse zusammen: Es erscheint möglich, unter einem gemeinsamen Gesichtspunkte die gesamte durch Gleichungen dargestellte physikalische Welt und die Welt der Mathematik und Logik zusammenzufassen. Es erscheint unnötig, die Forschungsarbeit bis zur Anschaulichmachung der physikalischen Vorgänge durchzuführen.

Postulat der absoluten und relativen Welt.

Von **J. Petzoldt** in Spandau.

(Eingegangen am 11. Dezember 1923.)

Die ost-westliche Drehung des Fixsternhimmels um die Erde in 24 Stunden ist auch die tägliche west-östliche Drehung der Erde um ihre Achse. Jede der beiden Behauptungen enthält implizite die andere, man müßte denn das „Begriffsungetüm“ [1]) des absoluten Raumes aufrecht erhalten wollen. Es liegt eine einzige, vom Standpunkte der Feststellung unabhängige, also von jedem Standpunkt aus feststellbare „invariante“, „absolute“ Tatsache vor: die Drehung der beiden Systeme „gegeneinander“, was nicht nur heißt: „jedes gegen das andere“. Zugleich aber zwei untereinander gleichberechtigte, relative Tatsachen: von der Erde aus nehmen wir die Drehung des Fixsternhimmels wahr, und von einem Orte des Fixsternhimmels aus würden wir die Achsendrehung der Erde beobachten. Beides nicht als „Erscheinung“, „Schein“, „optische Täuschung“, sondern als volle sinnenfällige Wirklichkeit. Jene invariante absolute Tatsache ist nur begrifflicher Natur, nicht anschaulich und unmittelbar erfahrbar, doch „unbezweifelbar“ und „wahr“, wie man eben einem Begriffssystem, das sich voll auf Erfahrung stützt, diese Prädikate zubilligt. Jene andersartigen, relativen Tatsachen dagegen sind nicht nur von begrifflicher, sondern auch von unmittelbar anschaulicher, sinnlicher Natur — oder würden es doch sein, wenn wir die Erde verlassen könnten — und sind insofern ebenfalls unbezweifelbar, „objektiv wirkliche“ Erlebnisse und also absolut.

Wer behaupten würde, alles Wirkliche ist nur relativ, der würde denselben logischen Fehler machen wie der, der die Welt für absolut erklärte und alles Relative leugnete. Die ganze, alles Wirkliche umfassende Welt kann nicht wieder in Relation zu etwas Weiterem, außer ihr Gelegenem stehen, da sie sonst eben nicht die ganze wäre. Insofern existiert sie absolut. Relativ ist sie als ganze gegenüber ihren Teilen. Als Teile des absoluten Ganzen existieren die Teile absolut. Gegenüber anderen Teilen sind sie relativ.

Zuletzt kann jeder Begriff seine Abgrenzung, seine „Definition“ nur im Gegensatz zu einem anderen Begriff erhalten. Zuletzt steht

---

[1]) „Bezüglich der Begriffsungetüme des absoluten Raumes und der absoluten Zeit konnte ich nichts zurücknehmen“. Diese Worte Machs vom 5. Febr. 1912 (Vorwort zur 7. Aufl. der „Mechanik“) dürfen gegenüber den Äußerungen vom Juli 1913 in der nachgelassenen „Optik“, die der „heutigen“ Relativitätslehre nicht günstig sind, nicht vergessen werden.

jeder in Korrelation zu mindestens einem anderen Begriff und hat nur in diesem Zusammenhang eine Bedeutung. So auch die Begriffe „absolut“ und „relativ“. Und so muß jede vollständige Relativitätstheorie zugleich eine Absolutitätstheorie sein und umgekehrt. Und beides in engster Korrelation.

Das Absolute darf also nicht an falscher Stelle gesucht werden, sondern nur im Gegensatz zu seinem korrelativen Relativen. Es kann daher niemand der Relativitätstheorie der Physik gerecht werden, der ihre Relationen anderen Absolutheiten gegenüberstellt als den ihnen zugehörigen. Das gerade tun aber die Gegner der Relativitätstheorie. Obwohl an der Spitze der letzteren als Voraussetzung ein ganz anderes Raum-Zeit-System steht als das Newtonsche, wenn vielleicht auch nur durch „implizite Definition“, so liegt doch immer wieder ihrer Kritik dieses verlassene Absolute zugrunde. Kein Wunder, daß sich dann die „Probleme“ häufen.

Probleme auf solcher Grundlage sind für die Wissenschaft selbst, die schon vor der Aufstellung und mit dem Ausbau der Relativitätstheorie diese psychologischen Hemmungen überwunden hat, nur Scheinprobleme, so ernst sie für den Forscher sind, der über seine unerkannten Voraussetzungen nicht hinwegkommt. Gleichwohl kann ihre Diskussion aufklärend wirken. Allerdings weniger hinsichtlich der eigentlichen physikalischen Probleme, wie Aloys Müller in seinem vor kurzem in dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz[1]) möchte, sondern hinsichtlich der philosophischen, erkenntnistheoretischen.

Der genannte Verfasser glaubt (S. 420), daß seine Überlegungen das Gebiet der Physik nicht verlassen haben, und (S. 409), daß es sich dabei nicht um philosophische Dinge handele. In Wahrheit sind aber seine Ausführungen fast ganz und gar von Philosophie durchtränkt und die Schwierigkeiten, die er findet, fast sämtlich darin begründet. Die implizite durch seine Darlegungen definierte Naturanschauung ist die der Newtonschen Physik: es gibt einen — und nur den einen — absoluten Raum mit der Eigenschaft der Isotropie, es gibt eine — und nur eine — absolute Zeit mit der Eigenschaft des immer gleichen Fließens, es gibt absolut starre Bezugssysteme und es gibt absolute Bewegung. Im folgenden will ich zunächst alle diese Komponenten in den Erörterungen des Verfassers aufweisen.

Er sagt (S. 410): Wenn man das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit „auf den Michelsonversuch gründet, so setzt das not-

[1]) Aloys Müller, Probleme der speziellen Relativitätstheorie. ZS. f. Phys. 17, 409 ff., 1923.

wendig voraus, daß der Michelsonversuch ein Versuch in zwei Systemen ist. Nun will man aus dem Michelsonversuch aber auch schließen, daß es keinen Äther (im alten Sinne) gibt. Läßt man indes den Äther fallen, so ist der Versuch ersichtlich ein solcher in einem System". Das ist doch nur verständlich, wenn mit dem einen System der absolute leere euklidische Raum, und mit den zwei Systemen der mit Äther erfüllte absolute Raum und das darin bewegte Erdsystem gemeint sind. Einstein hat aber in der speziellen Theorie den Äther gerade darum aufgegeben, weil dieser als das eine absolute und ausgezeichnete System in der Vielheit gleichberechtigter Systeme keinen Platz mehr hatte. Also nicht Aufgeben des Äthers und ein System, sondern sein Aufgeben und eine Vielheit gleichberechtigter Raum-Zeit-Systeme ist der Sinn der speziellen Relativitätstheorie, den Aloys Müller durch sein erkenntnistheoretisches Vorurteil verfehlt. Er läßt die zwei Systeme sich in einem übergeordneten Raum bewegen, eben dem absoluten euklidischen. Dieser gilt ihm ohne weiteres als isotrop, denn in ihm ist das Resultat des Michelsonschen Versuches eine „Selbstverständlichkeit". „Es ist dann gar kein Grund vorhanden, warum das Licht sich in dem einen System der Erde nach einer Richtung schneller als nach der anderen fortpflanzen soll" (S. 410). So verfügt das reine Denken von vornherein über die Natur. Daß die relative Geschwindigkeit bestimmend sein könnte, daran denkt infolge seiner rationalistischen Einstellung Aloys Müller so wenig wie Hugo Dingler: „daß das Sytem sich bewegt" — heißt es (S. 410f.) im unmittelbaren Anschluß an die eben angeführte Stelle — „gibt keinen Grund dafür an die Hand, denn ich kann es ja mit gleichem Rechte als ruhend ansehen".

In diesem Zusammenhange erscheint es nun dem Verfasser als eine Entdeckung, daß das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit eine „willkürliche Festsetzung" sei (S. 411) und vom Relativitätsprinzip ebensowenig gefordert werde wie es ihm widerspreche (S. 413). Das hat aber gewiß kein Kenner der speziellen Relativitätstheorie jemals anders angenommen. Gewiß ist aber auch keiner zu der Meinung gekommen, daß das „Konstanzprinzip von jeder Erfahrung losgelöst" sei (S. 411). Es ist vielmehr ein ganz natürlicher, wenn auch keineswegs unvermeidlicher Ausdruck für die beiden Tatsachengruppen, die in den auf dem Boden der alten physikalischen Theorie miteinander unverträglichen Versuchen von Fizeau und Michelson ihre Kulminationspunkte erreichten [1]).

[1]) Petzoldt, Die Relativitätstheorie der Physik. ZS. f. positivist. Philos. 2, 1914, § 21.

Merkwürdigerweise — wahrscheinlich aber auch eine psychologische Wirkung seiner philosophischen Einstellung — übergeht der Verfasser ganz den Versuch von Fizeau. Auch in seinem Buche[1]) erwähnt er ihn nicht. Hier heißt es (S. 61) vom Michelsonschen Versuch geradezu: „man kann, ohne zu übertreiben, ruhig sagen: er ist historisch die experimentelle Grundlage der speziellen Relativitätstheorie". Aber ohne die Tatsachen, deren stärkster Ausdruck der Fizeausche Strömungsversuch ist, hätte der Michelsonsche Versuch niemals seine große Bedeutung erlangt.

Mit dem Ansatz, daß die Lichtgeschwindigkeit in relativ zueinander ohne Beschleunigung bewegten Systemen bei fehlender Gravitation konstant ist, zusammen mit dem anderen, daß es kein ausgezeichnetes System gibt, will die Relativitätstheorie die für die mechanistische Naturauffassung gänzlich unvereinbaren Tatsachengruppen logisch widerspruchsfrei und in möglichst einfacher Weise beschreiben. Aber das volle Verständnis für das Prinzip der Beschreibung gegenüber der alten mechanistischen Erklärung kann niemand gewinnen, der noch Anhänger dieser unzulänglich gewordenen Auffassungen ist, und damit auch nicht für die obersten Ansätze der Relativitätstheorie, die ganz und gar den Charakter einer Beschreibung haben.

Einen unauflösbaren Widerspruch — „so bestimmt und klar, daß es eine solche Aufklärung nicht geben kann" (S. 414) — findet der Verfasser „zwischen dem Konstanzprinzip und dem Bewegungsbegriff". Beziehen wir einen Bewegungsvorgang von einem System auf ein dagegen bewegtes, so bedeutet das für den bewegten Körper nach Ansicht des Verfassers stets eine Beschleunigung (S. 413), gleichviel, ob es sich um die Bewegung eines Körpers oder einer Strahlung handelt. Hier setzt er wieder stillschweigend ein Absolutes voraus: einen absolut starren, von der relativen Bewegung unabhängigen Bezugskörper für die Lichtausbreitung. Der longitudinale Schenkel des Michelsonschen Apparates unterliegt aber eben der Lorentzkontraktion, und doch schon in der Lorentzschen Theorie!

Mit dem folgenden „Widerspruch", den der Verfasser für einen inneren der Theorie erklärt (S. 415), der also für sie tödlich sein müßte, gelangen wir an ihren erkenntnistheoretischen Kernpunkt, den Punkt, von dem ich seit 1912 behauptet habe, daß er nur in einer sinnesphysiologisch und biologisch-psychologisch begründeten Erkenntnis-

[1]) Aloys Müller, Die philosophischen Probleme der Einsteinschen Relativitätstheorie. Zweite, umgearbeitete und erweiterte Auflage des Buches: Das Problem des absoluten Raumes. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn A.-G., 1922.

theorie befriedigend aufgeklärt werden könne, und der, weil alle sonstigen Erkenntnistheorien, die sich mit der Relativitätstheorie gründlicher befaßt haben, im wesentlichen nur die physikalische, nicht aber die biologische Hälfte der Naturwissenschaft berücksichtigen, ganz übersehen oder doch beiseite geschoben wird.

Auch Aloys Müller kennt diesen Punkt nicht genügend: er hat sich um die vorliegenden, sich weit über ein Jahrzehnt erstreckenden Untersuchungen nicht bemüht und ist daher (S. 409) der Meinung, daß die Voraussetzungen und Grundbegriffe der Relativitätstheorie ohne hinreichende kritische Bearbeitung geblieben seien [1]). Immerhin sieht er (S. 415), daß ein und dieselbe Uhr verschieden bewegten Beobachtern zugleich verschiedene Zeit, also verschiedene Zeigerstellungen zeigen muß, wie ein und derselbe Körper für verschieden bewegte Beobachter verschiedene Gestalt hat. Dieser Punkt ist erkenntnistheoretisch vollständig aufgeklärt und führt allerdings zur Einsicht in die Unmöglichkeit der Vereinbarung der Relativitätstheorie mit der materialistischen Naturauffassung [2]). Er zeigt, daß die Einsteinsche Relativitätstheorie sich einer Vielzahl getrennter, in ihren Maßstäben und Uhren einander eindeutig zugeordneter physikalischer Raum-Zeit-Systeme bedient, die auf keinen Fall als Teile eines übergeordneten physikalischen Raum-Zeit-Systems angesehen werden dürfen, d. h. eines übergeordneten dreidimensionalen Raumes in einer übergeordneten Zeit. Erst die mathematische Theorie faßt sie symbolisch als „Schnitte" eines vierdimensionalen „Raumes", allgemeiner einer vierdimensionalen Zahlenmannigfaltigkeit auf. Erkenntnistheoretisch sind diese Raum-Zeit-Systeme als begriffliche Abbildungen der physikalischen Vorgänge und Zusammenhänge zu denken, derart, daß ein jedes im allgemeinen von jedem anderen aus in einer anderen „perspektivischen" räumlichen Gestalt und in einem anderen „Tempo" und mit einer anderen Chronologie des zeitlichen Ablaufs der Ereignisse „erscheint". Ihre Getrenntheit denkt man am leichtesten ähnlich der Getrenntheit der Leibnizschen Monaden, was natürlich in keiner Weise zur Leibnizschen Metaphysik verpflichtet, sondern nur eine Erleichterung der „Anschauung" durch Benutzung einer bekannten philosophischen

[1]) Vgl. Petzoldt, Die Stellung der Relativitätstheorie in der geistigen Entwicklung der Menschheit. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig, Joh. Ambr. Barth, 1923. Darin (S. 97) ein Verzeichnis meiner Schriften zum Relativitätsprinzip. Siehe auch das Relativitätsheft der Enzykl. d. math. Wiss. von W. Pauli jun., Bd. 5_2, Heft 4, 1921, S. 560.

[2]) Siehe besonders Petzoldt, a. a. O., 1922, §§ 31 und 39. — Derselbe, Die Relativitätstheorie der Physik, 1914, a. a. O., §§ 25, 28, 29, 30. — Aber auch die anderen Schriften desselben Verfassers.

Theorie bedeutet. Widersprüche und Rätsel gibt es da nicht mehr: alles ist klar, so wie man erkenntnistheoretisch die „perspektivischen Verschiebungen" nicht durch Beziehung auf ein einziges absolutes raumzeitlich „Verschobenes", sondern nur durch begriffliche Zusammenfassung verbunden denkt: „dieselbe" Uhr, an der verschieden bewegte Beobachter zugleich verschiedene Zeigerstellungen wahrnehmen, ist nicht in transzendenter Realität „eine und dieselbe", sondern nur in dem Begriffssystem, dessen sich sämtliche verschieden bewegte Beobachter übereinstimmend bedienen.

Die Vielzahl der monadologisch getrennten Systeme, die die Relativitätstheorie im Gegensatz zu dem einen Raum-Zeit-System der alten Physik verwendet, ist schließlich eine — wenn auch nur prinzipielle — Annäherung an die letzte physikalische Wirklichkeit: an die Vielzahl der Sehräume der einzelnen Beobachter.

Daß Aloys Müller bei seiner hier gekennzeichneten philosophischen Stellung zu einer absoluten Zeit gelangt oder besser; von der absoluten Zeit sich nicht freimachen kann, ist nicht verwunderlich. Er behauptet (S. 417) mit seinen Aufstellungen implizite eine absolute Gleichzeitigkeit und ihre Feststellbarkeit. Es ist ihm „selbstverständliche Voraussetzung, daß Zeit und Gleichzeitigkeit objektive Gegenstände sind, die der Physiker nicht schafft, sondern auf ihre Struktur hin untersucht". Im Zusammenhang des Ganzen ist damit gemeint, daß die Feststellung der Gleichzeitigkeit und der Zeit überhaupt von dem Standpunkt, dem Koordinatensystem unabhängig ist, von dem aus sie gemacht wird. Immer wieder versteht eben der Verfasser gar nicht, was Einstein will. Ähnlich wie die Gegner Humes „den Punkt seiner Aufgaben verfehlten und, indem sie immer das als zugestanden annahmen, was er eben bezweifelte..., seinen Wink zur Verbesserung so verkannten, daß alles in dem alten Zustande blieb, als ob nichts geschehen wäre" [1]).

So glaubt er schließlich (S. 419) auch, es sei eine Grundannahme der Relativitätstheorie, daß es Inertialsysteme gibt, und gelangt so zu dem Schluß: „In den Grundvoraussetzungen der Relativitätstheorie steckt demnach eine für alle Systeme gültige, d. h. absolute Zeit."

Von der allgemeinen Relativitätstheorie zu schweigen, ist es auch schon durchaus gegen den Geist der speziellen, Inertialsysteme anzunehmen. Die geradlinige, gleichförmige Bewegung des gestrichenen Systems — genauer: eines Bildes des gestrichenen Systems — findet immer nur in Beziehung auf die Maßstäbe und Uhren des ungestrichenen

[1]) Kant in der Vorrede zu den Prolegomena.

statt und umgekehrt, niemals in Beziehung auf ein absolutes System im absoluten Raume. Und so unterliegt eben jedes für das andere der Lorentzkontraktion. Der Einwand Bucherers, den Aloys Müller (S. 419) anführt, ist ganz richtig: die x und x', die Aloys Müller wie Strecken eines einzigen Systems behandelt — er denkt die beiden Systeme sich im absoluten, ihnen übergeordneten, sie enthaltenden Raume bewegend —, sind „heterogen." Damit ist derselbe Umstand bezeichnet, den ich als „monadologische Trennung" charakterisiert habe. Von den Gestalten und Uhren des gestrichenen Systems gelangen nach dem ungestrichenen nur „Bilder", „Projektionen" und umgekehrt[1]).

Bei seinen Betrachtungen über die Inertialzeit beruft sich der Verfasser auch auf Ludwig Langes Inertialtheorie, die er außerdem in seinem Buche — und dort recht eingehend —, ja (S. 116) als die Brücke zwischen Newton und Einstein behandelt. Ich glaube, ich habe das Recht, hierüber meine Verwunderung auszusprechen. Bereits vor 15 Jahren habe ich in eingehender Kritik nachgewiesen, daß L. Langes Theorie unhaltbar ist[2]). Sie beruht in ihrer rein geometrischen wie in ihrer analytischen Begründung auf unmöglichen Voraussetzungen und enthält außerdem einen elementaren stereometrischen Fehler hinsichtlich der Geometrie der dreiseitigen Ecke. Herr Lange hat mir, ohne Aufforderung oder Anregung meinerseits, wiederholt gesagt, daß er auf meine Einwände erwidern wolle. Bis heute ist aber nichts erfolgt. Es läßt sich eben nichts zur Aufrechterhaltung der Theorie vorbringen. Soll nun aber etwa „alles in dem alten Zustande bleiben, als ob nichts geschehen wäre"?

Auch die realistische Philosophie, die wir in den Darlegungen Aloys Müllers eine so ungewollte und doch so beherrschende Rolle spielen sehen, ist ein Anachronismus. Es ist die Philosophie Lockes und Newtons, die Philosophie des Aufklärungszeitalters, die Philosophie der Enzyklopädisten. Ist denn aber durch Denker wie Leibniz und Berkeley, die so große Schritte über Locke hinaus taten, und zwar unabhängig voneinander und doch im wesentlichsten zusammentreffend, „nichts geschehen"? Sind nicht schon damals der absolute Raum und die mechanistische Naturauffassung aufs schwerste erschüttert worden?

Die Realisten fühlen mit ihrem alten Absoluten, ihrer „Außenwelt", dem „Ding an sich", den Boden unter den Füßen schwinden. Sie glauben, ohne jene substanziellen Kernstücke ihrer Weltanschauung

[1]) Vgl. Minkowski, Raum und Zeit, S. 7. Leipzig und Berlin 1909.

[2]) Petzoldt, Die Gebiete der absoluten und der relativen Bewegung. Ostwalds Annalen der Naturphilosophie 7, 1908, §§ 12 bis 25.

seien Raum und Zeit nur noch „subjektiv", keine Wirklichkeiten mehr, es gebe dann nur noch intermittierende „Innenwelten" mit leeren Intermezzi, die Welt existiere immer nur so lange, wie sie vorgestellt werde, sei nur „Bewußtseinserscheinung" usw., und so beweisen sie als Gegner des Positivismus wie jene Gegner Humes, „indem sie immer das als zugestanden annehmen, was er eben bezweifelt, ... mit Heftigkeit dasjenige..., was ihm niemals zu bezweifeln in den Sinn gekommen ist" [1]). Auf solche Weise fördert man die Wissenschaft nicht. Diese kann in dem in Rede stehenden Hauptpunkte nur dann vorwärts kommen, wenn man die Gründe für die Unüberwindlichkeit der Einwürfe gegen jene absolute Welt und die neue Gedankenlage, die der Positivismus geschaffen hat, gründlich durchdenkt. Daß das letztere bisher nicht der Fall ist, zeigt sich schon darin, daß die realistischen Gegner gar nicht das Absolute beachten, das der „relativistische" Positivismus stets gelehrt hat, das aber eben an ganz anderer Stelle liegt als das Absolute des Lockeschen Realismus: in der Korrelativität zu dem Relativen [2]).

[1]) So z. B. auch J. Volkelt, Gewißheit und Wahrheit, 1918, und E. Study, Die realistische Weltansicht und die Lehre vom Raume, 2. Aufl., 1923.

[2]) Vgl. u. a. die Auseinandersetzung mit M. Schlick bei Petzoldt, Das Weltproblem vom Standpunkt des relativistischen Positivismus aus. 3. Aufl., 1921, S. 188 ff.

Über das Wärmegleichgewicht zwischen Hohlraumstrahlung und Quantenatomen.

Von **Otto Halpern** in Wien.

(Eingegangen am 4. Dezember 1923.)

Die bekannten Überlegungen Einsteins[1]) über das Gleichgewicht der inneren und Translationsenergie von gequantelten Atomen mit der Hohlraumstrahlung haben zu einem mit der klassischen Wellenoptik nur schwer verträglichen Resultate geführt: Die Existenz eines derartigen Gleichgewichtes scheint an die Bedingung geknüpft zu sein, daß der Elementarprozeß der spontanen oder erzwungenen Emission (Absorption) nicht in einer Kugelwelle, sondern streng einseitig gerichtet erfolgt. Experimente über den Elementarprozeß der Lichterzeugung zur Bestätigung dieses auffallenden Ergebnisses der Theorie haben sich bisher nicht finden lassen, doch erhielt in jüngster Zeit die „Nadelstrahlhypothese" von einer scheinbar fernliegenden Seite eine starke Stütze. Die theoretische Auswertung von Versuchen über Röntgenstrahlstreuung an leichten Elementen durch Compton[2]) und Debye[3]) hat unter Voraussetzung gerichteter Emission (Absorption) bei der Wechselwirkung von Strahlung mit freien Elektronen gewisse Erfahrungstatsachen, die sich bisher im Rahmen der klassischen Theorie auch nicht qualitativ deuten ließen, in ausgezeichneter Übereinstimmung mit der Quantentheorie wiedergegeben. Wir wollen diesmal auf die Fragen, die mit der Wechselwirkung von Strahlung und freien Elektronen zusammenhängen, nicht eingehen, sondern dies einer bald erscheinenden weiteren Publikation vorbehalten. Wir hoffen dann zeigen zu können, daß man bei konsequenter Anwendung der klassischen Theorie eine Reihe bisher ungedeuteter Effekte (Frequenzänderung und Intensitätsdisymmetrie) wenigstens qualitativ wiederzugeben in der Lage ist. In der vorliegenden Untersuchung wollen wir uns nur mit einer Analyse der Einsteinschen Ansätze beschäftigen und anschließend eine neue Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen für Energie und Impuls geben, von der wir hoffen, daß sie einige Schwierigkeiten der ursprünglichen Einsteinschen Theorie zu überwinden vermag.

---

[1]) Phys. ZS. **18**, 121, 1917.
[2]) Phys. Rev. **21**, 483, 1923.
[3]) Phys. ZS. **24**, 161, 1923.

Bei seiner Ableitung des Strahlungsgesetzes geht Einstein in folgender Weise vor, die wir des Zusammenhanges halber hier nochmals wiedergeben wollen: Es wird vorausgesetzt, daß sich die Atome in der von der Statistik geforderten kanonischen Verteilung über die einzelnen Quantenzustände befinden. Die Allgemeinheit der Betrachtung wird dadurch nicht verringert, wenn man ihrer nur zwei annimmt, von denen der mit dem Index 1 die größere Energie besitzen soll. Den Mechanismus der Wechselwirkung zwischen Strahlung und Atomen bestimmt Einstein unter korrespondenzmäßiger Übertragung der klassischen Gesetze folgendermaßen: Der Übergang von einem Quantenzustand zum anderen soll sowohl unter Einwirkung des Strahlungsfeldes als auch, wenn der Anfangszustand der energiereichere ist, spontan, einem radioaktiven Zerfall vergleichbar, vor sich gehen können. Was die Einwirkung des Strahlungsfeldes anbelangt, so wird vorausgesetzt, daß lediglich Strahlung einer ganz bestimmten, vorläufig unbestimmt gelassenen Frequenz wirksam sein soll. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein bestimmtes im Zustand 1 befindliches Atom in der Zeiteinheit in den Zustand 2 übergeht, beträgt dann

$$A_1^2 + B_1^2 \varrho(\nu, T). \tag{1}$$

Im Gleichgewicht muß die Anzahl der Atome, die von 1 nach 2 in der Zeiteinheit übergeht, gleich derjenigen sein, die in derselben Zeit von 2 nach 1 geht:

$$p_1 e^{-\frac{\varepsilon_1}{kT}} (A_1^2 + B_1^2 \varrho) = p_2 e^{-\frac{\varepsilon_2}{kT}} B_2^1 \varrho. \tag{2}$$

Einstein nimmt nun an (wobei A und B temperaturunabhängig vorausgesetzt sind), daß ϱ mit T nach Unendlich wächst, und erhält daraus eine Beziehung zwischen B_1^2 und B_2^1

$$p_1 B_1^2 = p_2 B_2^1. \tag{3}$$

Durch Anwendung des Wienschen Verschiebungsgesetzes ergeben sich die beiden Relationen

$$\frac{A_1^2}{B_1^2} = \alpha \nu^3, \tag{4}$$

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = h\nu. \tag{5}$$

Die zweite, welche die bisher unbestimmt gelassene Frequenz der wirksamen Strahlungsdichte bestimmt, bezeichnet Einstein als die Bohrsche Frequenzbedingung.

Um nun auch die Sicherheit zu erhalten, daß ein Atom im Strahlungsfeld die von der Statistik vorgeschriebene mittlere Energie $\frac{kT}{2}$ pro Translationsfreiheitsgrad besitzt, macht Einstein die Annahme,

daß Strahlungsemission und Absorption vollkommen gerichtet und demgemäß mit dem Impuls $\frac{h\nu}{c}$ verknüpft auftreten. Dabei soll im Fall erzwungener Ausstrahlung der emittierte Lichtstrahl in der Richtung des auffallenden Strahlenbündels liegen. Dieser zweite Teil der Annahmen, welcher tatsächlich die richtige mittlere Translationsenergie liefert, stellt das überraschend neue und mit der bisherigen Wellenoptik unvereinbare der Einsteinschen Theorie dar. Wie Einstein ausdrücklich hervorhebt[1]), beweist er lediglich, daß auf Grund seiner Annahmen die richtige mittlere Energie herauskommt, ohne jedoch über das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz eine Aussage zu treffen. Es läßt sich jedoch mit Hilfe der Fokker-Planckschen[2]) Differentialgleichung durch einen ganz analogen Rechengang zeigen, daß das herrschende Geschwindigkeitsverteilungsgesetz tatsächlich das Maxwellsche ist.

Die Einsteinschen Überlegungen sind besonders von Seiten Bohrs[3]) Gegenstand eingehender Würdigung und Kritik gewesen. Auf den ersten Bohrschen Einwand, daß bei der Ableitung die endliche Übergangszeit von einem Quantenzustand nicht berücksichtigt erscheint, wollen wir hier nicht eingehen, da wir zu diesem Punkte nichts Neues vorzubringen wissen. Wichtiger scheint uns der zweite Bohrsche Einwand[4]) zu sein. Bohr weist nämlich darauf hin, daß auf Grund des Korrespondenzprinzips auch die A_i^k durch das Strahlungsfeld beeinflußt werden und somit die Einsteinsche Ableitung nur bei solcher Strahlungsintensität Gültigkeit beanspruchen kann, bei der die Kräfte des Feldes gegenüber den inneren Kräften des Atoms zu vernachlässigen sind. Auf Grund dieser Einwände betont Bohr[5]) den formalen Charakter der Einsteinschen Überlegungen, der es nicht gestatte, zwingende Schlüsse über die Natur der Vorgänge zu ziehen.

Wir wollen nun an diesen zweiten Bohrschen Einwand anknüpfen und zeigen, daß er bei konsequentem Zuendedenken die Einsteinsche Ableitung selbst in dem von Bohr zugestandenen Gültigkeitsbereich in Frage stellt. Dies hängt mit Folgendem zusammen: Aus der Gleichgewichtsbedingung (2) allein kann man noch keine Schlüsse über die Form des Strahlungsgesetzes ziehen. Selbst

[1]) l. c., S. 124.
[2]) Vgl. M. Planck, Berl. Ber. 1917, S. 324.
[3]) ZS. f. Phys. **18**, 117, 1923.
[4]) l. c., S. 142.
[5]) l. c., S. 164.

wenn man die Betrachtung auf so tiefe Temperaturen beschränkt, daß die Strahlungskräfte klein gegenüber den Atomkräften sind, so muß man doch den Grenzübergang zu sehr hohen Temperaturen machen, um die auftretenden Konstanten bestimmen zu können [vgl. (3)]. Für diese sehr hohen Temperaturen aber sind die Strahlungskräfte nicht sehr klein, sondern sogar groß gegenüber den inneren Atomkräften und der Ansatz (2) verliert seine Gültigkeit. Ja noch mehr: Es ist von vornherein gar nicht sicher, daß bei hohen Temperaturen A_1^2 gegen $B_1^2\varrho$ zu vernachlässigen ist, und weiter, selbst wenn dies für hohe Temperaturen gestattet sein sollte, so folgt aus der Gültigkeit von Relation (3) für hohe Temperaturen noch nicht, daß sie auch für tiefe Temperaturen Richtigkeit beanspruchen können, da jetzt prinzipiell alle Koeffizienten als temperaturabhängig zu betrachten sind. Auch kann man bei Verwendung des Wienschen Verschiebungsgesetzes nun nicht mehr ohne weiteres schließen, daß $\frac{A_1^2}{B_1^2}$ nur eine Funktion der Schwingungszahl ist, sondern es tritt noch eine ganz willkürliche Funktion $f\left(\frac{\nu}{T}\right)$ hinzu. Diese Weiterführung des Bohrschen Einwandes dokumentiert, wie wir glauben, noch viel stärker die formale Natur der Betrachtungen. Wir werden übrigens auf die Frage der Temperaturabhängigkeit der Übergangskoeffizienten noch weiter unten in anderem Zusammenhange zurückkommen.

Es ist vielleicht von Interesse, an dieser Stelle auf den wesentlichen Unterschied in der Behandlung des Problems der Wechselwirkung zwischen Strahlung und Atomen einerseits und Strahlung und freien Elektronen anderseits hinzuweisen. Bei der Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen für den zweiten Fall, wie sie kürzlich auf quantentheoretischer Grundlage von Pauli[1]) gegeben wurde, treten alle diese Schwierigkeiten deswegen nicht auf, weil dort der Vorgang der Strahlungsemission dank der Abwesenheit von innerer Energie durch eine Lorentztransformation „rückgängig" gemacht werden kann. Pauli braucht deswegen keine Aussagen über das Verhalten bei hohen Temperaturen und auch nicht das Wiensche Verschiebungsgesetz heranzuziehen, sondern kann sich mit relativitätstheoretischen Invarianzforderungen behelfen.

Wir wollen uns nun mit der Gleichung (5) beschäftigen, die von Einstein als Bohrsche Frequenzbedingung bezeichnet wird. Da

---

[1]) ZS. f. Phys. 18, 272, 1923.

kommt es nun darauf an, was man unter Bohrscher Frequenzbedingung zu verstehen hat. Formuliert man die Bohrsche Frequenzbedingung folgendermaßen: I. „Bei einer Änderung des Quantenzustandes wird monochromatische Strahlung der Frequenz $\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{h}$ emittiert", so stimmen die beiden Gleichungen miteinander überein. Formuliert man jedoch: II. „Bei einer Änderung des Quantenzustandes $(1 \to 2)$ findet sich die gesamte Energiedifferenz in Form monochromatischer Strahlung der Frequenz $\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{h}$ wieder", so stimmen die Gleichungen nur dann überein, wenn es sich um Kugelwellen, emittiert von ruhenden Atomen, nicht aber, wenn es sich um Nadelstrahlung handelt. Denn in diesem zweiten Fall erleidet das ursprünglich ruhende Atom einen Rückstoß, erhält also kinetische Energie, welche der ausgestrahlten Energie zum vollen Quantum $h\nu$ fehlt. Eine analoge Betrachtung gilt natürlich auch für die Absorption. Hier wird dem Strahlungsfeld ein größerer Energiebetrag als $h\nu$ entzogen, um das ursprünglich ruhende Atom von 2 nach 1 zu bringen, und zwar ist hier der Überschuß ebenso groß wie früher der Fehlbetrag. Zwar ist diese Differenz[1]) sehr klein wegen der großen Masse des Atoms (verglichen mit der „Masse" des ausgesandten Lichtstrahles), aber doch aus folgendem Grunde von prinzipieller Bedeutung[2]). Trifft nämlich eine emittierte Nadel auf ein zweites Atom im Quantenzustand 2, so kann sie nicht absorbiert werden, da ihr der doppelte Fehlbetrag abgeht, d. h. aber, der Elementarprozeß der Lichtemission ist in dieser Fassung der Einsteinschen Theorie in Strenge irreversibel[3]).

Diese Energiedifferenz bei Emission und Absorption hat natürlich eine proportionale Impulsdifferenz zur Folge, und es schien nun von erheblichem Interesse, diese Konsequenz der Nadelstrahlhypothese in folgender Richtung weiter zu analysieren. Man überzeugt sich leicht durch eine einfache Größenabschätzung, daß diese Impulsdifferenz, die etwa von der Größenordnung 10^{-9} des gesamten Impulses ist, in

---

[1]) In erster Näherung $\frac{h^2\nu^2}{2mc^2}$.

[2]) Bei der Wechselwirkung von Röntgenstrahlen mit freien Elektronen ist es das Analogon zu diesem Fehlbetrage, welches die Frequenzänderung liefern soll. Der Effekt ist hier wegen des großen ν und der kleinen Elektronenmasse bereits innerhalb der Beobachtungsgrenze.

[3]) Über diese von der klassischen Theorie (Kugelwelle) nicht erfüllte Forderung der Reversibilität des Elementarprozesses der Lichtemission vgl. Einstein, Phys. ZS. **10**, 821, 1909.

den Genauigkeitsbereich der Einsteinschen Rechnungen über das Impulsgleichgewicht nicht mehr hineinfällt[1]). Um zu prüfen, ob dieser Fehlbetrag mit dem Geschwindigkeitsverteilungsgesetz vereinbar ist oder nicht, hat man also die übertragenen Impulse bis auf höhere Potenzen in v/c auszurechnen, und daraus mit Hilfe der Fokker-Planckschen Differentialgleichung das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz zu bestimmen. Dieses müßte dann mit dem durch die Relativitätstheorie modifizierten Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilungsgesetz übereinstimmen. Diese immerhin einige Rechenarbeit erfordernde Untersuchung wurde jedoch in der Mitte abgebrochen, da man ganz allgemein zu zeigen vermag, daß der Einsteinsche Ansatz nur in erster Näherung das Impulsgleichgewicht liefert.

Um dies einzusehen, gehen wir wieder auf die Gleichgewichtsbedingung (2) zurück. Diese ist hier lediglich für ruhende Atome formuliert und versagt bei Berücksichtigung höherer Potenzen in v/c. Es stellen nämlich die auf den beiden Seiten der Gleichung (2) abgezählten Vorgänge nicht ihre gegenseitige Umkehrung dar, es wird vielmehr die Anzahl der Emissionsprozesse ruhender Atome gleichgesetzt der Anzahl der Absorptionsprozesse ruhender Atome, während in Strenge gelten müßte: Die Anzahl der Emissionsprozesse ruhender Atome, die durch die Emission einen Impuls G gewinnen, ist gleich der Anzahl der Absorptionsprozesse der den Impuls G besitzenden Atome, welche durch die Absorption zur Ruhe kommen. Bei dieser Formulierung sieht man sofort, daß zur strengen Gleichgewichtsbedingung die Translationsenergie mit in Rechnung zu ziehen ist. Für den Fall der Emission einer Kugelwelle übrigens, die von einem ruhenden Atom ausgeht, ist die Einsteinsche Gleichgewichtsbedingung (2) exakt richtig.

Um nun diese geschilderte Schwierigkeit zu überwinden und vor allem auch eine exakte Formulierung desjenigen zu erhalten, was als Bohrsche Frequenzbedingung zu bezeichnen ist, schlagen wir folgenden Weg ein: Wir betrachten die Gesamtheit aller jener Atome, deren innere Energie sich im Quantenzustand 1 befindet und deren Impulskomponenten im Elementargebiet $d\tau_1$ des Impulsraumes liegen. Diese Atome sollen auf Grund einer gewissen Wahrscheinlichkeitsfunktion übergehen in den Quantenzustand 2 und in das Impulsgebiet $d\tau_2$. Die Wahrscheinlichkeit für den Übergang eines im Zustand 1 befindlichen Atoms schreiben wir $\varphi_1^2 d\tau_2$ und verlangen zur Erhaltung des

[1]) Einstein vernachlässigt alle höheren Potenzen in v/c von der 2. angefangen.

statistischen Gleichgewichtes, daß die Anzahl einander inverser Elementarprozesse gleich groß ist.

$$N_1 \varphi_1^2 d\tau_2 = N_2 \varphi_2^1 d\tau_1. \tag{6}$$

Durch diese Bedingung haben wir das Gleichgewicht sowohl der inneren als auch der Translationsenergie gesichert. Wir setzen nun für die Anzahl der Atome in den geschilderten Zuständen die Werte aus der Statistik ein, wobei wir der Vollständigkeit halber gleich das relativistische Energieverteilungsgesetz[1]) in Anwendung bringen. Dieses unterscheidet sich von dem der klassischen Statistik lediglich durch den Wert der Konstanten, die hier eine komplizierte Funktion der Ruhmasse (des Quantenzustandes) und der Temperatur darstellt. Als Übergangswahrscheinlichkeiten wählen wir wieder Koeffizienten analog zum Einsteinschen Ansatz, die jedoch hier auch von den Impulsen der Translation abhängig sein müssen, und unterscheiden wieder „radioaktive" und Strahlungsübergänge. Die Gleichgewichtsbedingung lautet dann:

$$C_1 e^{-\frac{E_1}{k\tau}} (R_1^2 + S_1^2 \varrho) = C_2 e^{-\frac{E_2}{k\tau}} S_2^1 \varrho. \tag{7}$$

Sie ist formal mit der Einsteinschen (2) identisch. Behandeln wir nun (7) so wie (2), wobei natürlich alle früher vorgebrachten Einwände über den Grenzübergang zu hohen Temperaturen und die Vieldeutigkeit bei der Anwendung des Wienschen Verschiebungsgesetzes auch hier zu erheben sind, so erhalten wir die Plancksche Strahlungsformel und wieder ein Analogon zur Bohrschen Frequenzbedingung

$$E_1 - E_2 = h\nu, \tag{8}$$

wobei als Energiedifferenz die Differenz der Gesamtenergie und nicht nur der inneren Energie einzusetzen ist.

Daß die Koeffizienten S_1^2 und S_2^1 in Strenge temperaturabhängig sein müssen, erkennt man hier besonders deutlich auch ohne Anwendung des Korrespondenzprinzipes: Der Quotient $\frac{C_1}{C_2}$ ist nämlich beim relativistischen Verteilungsgesetz nur in erster Näherung temperaturunabhängig[2]). Dasselbe muß gemäß (3) auch für $\frac{S_2^1}{S_1^2}$, d. h. für S_1^2 und S_2^1 einzeln gelten.

Durch unsere neue Formulierung ist auch eine spezielle Annahme der Einsteinschen Theorie überflüssig geworden, die bei einer eventuellen Entwicklung der Dispersionstheorie hinderlich sein könnte: wir meinen nämlich die Forderung, daß bei der erzwungenen Emission

---

[1]) Vgl. F. Jüttner, Ann. d. Phys. **34**, 856, 1911.
[2]) Jüttner, l. c., S. 870.

der emittierte Lichtstrahl immer in der Richtung des beeinflussenden Strahlenbündels liegen muß.

Als wesentlichen Punkt dieser Ableitung wollen wir aber hervorheben, daß nirgends von einer Hypothese der Nadelstrahlemission oder der Kugelwelle Gebrauch gemacht werden mußte. Wir erhalten das Gleichgewicht von Energie und Impuls, ohne über die Natur des Elementarprozesses eine Aussage machen zu müssen. Wir wollen dies als stärkste Stütze für die im Sinne Bohrs formale Natur der gegebenen Überlegungen anführen.

Zum Schlusse noch einige Bemerkungen über das hier auftretende Analogon zur Bohrschen Frequenzbedingung. Formuliert man diese nämlich (wie oben II), wobei nur zu bemerken ist, daß die Energie des Anfangs- und Endzustandes in ein und demselben beliebigen Bezugssystem gemessen werden muß, so erhält man nur dann den richtigen Dopplereffekt[1]), wenn man Nadelemission annimmt. Es hätte ja auch bei bewegter Lichtquelle gar keinen Sinn, von einer Frequenz des emittierten Lichtstrahles zu sprechen, wenn die Emission in einer Kugelwelle erfolgt und demgemäß die Frequenz winkelabhängig wird.

Andererseits kann man aber auch die Gleichung (8) lediglich als Definition der für das Atom wirksamen Strahlungsfrequenz auffassen und Emission in Kugelwellen als Elementarprozeß annehmen. Wir haben dann nicht mehr das Recht, in Strenge von einer Frequenz des emittierten Lichtes zu sprechen, da diese (wenn auch unbeobachtbar wenig) von der Richtung abhängig wäre. Die Bohrsche Frequenzbedingung würde in dieser Auffassung, wenn man sie von einem beliebigen Bezugssystem anwendet, lediglich eine, die Beobachtungsgenauigkeit weit übertreffende, aber nicht exakt gültige Regel zur Berechnung der emittierten Frequenz darstellen; exakte Gültigkeit hat sie lediglich in jenem System, in dem das Atom vor und nach dem Prozeß ruht[2]).

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Wien.

---

[1]) Schrödinger, Phys. ZS. **23**, 301, 1922.

[2]) Anmerkung bei der Korrektur: In einer während der Drucklegung der vorliegenden Untersuchung erschienenen Arbeit von Einstein und Ehrenfest (diese ZS. **19**, 301, 1923) findet sich eine ähnliche Erweiterung der Gleichgewichtsbedingung, wie sie hier in (7) gegeben ist, aber ohne Eingehen auf das Nadelstrahlenproblem, sondern zum Zwecke einer gemeinsamen Behandlung von Atomen und freien Elektronen. Wir möchten nur kurz darauf hinweisen, daß bei dieser Vereinheitlichung der Nachteil in Kauf genommen werden muß, daß die Übergangskoeffizienten, wie oben dargelegt, zwar für freie Elektronen, nicht aber für Atome als temperaturunabhängig angesehen werden können; damit hängt auch zusammen, daß die dortige Gleichung (13) strenge Gültigkeit für Atome nur unter Vernachlässigung der von der Relativitätstheorie geforderten Abweichungen beanspruchen kann.

Zur Gravitationsverschiebung im Sonnenspektrum.

Von **Charles E. St. John** in Pasadena.

(Eingegangen am 6. Dezember 1923.)

Die Menge des jetzt am Mount Wilson-Observatorium zur Verfügung stehenden Beobachtungsmateriales über die Frage der Gravitationsverschiebung der Fraunhoferschen Linien scheint eine neue Diskussion zu rechtfertigen. Die Unterschiede der Wellenlängen im Sonnenspektrum und in irdischen Spektren sind von verwickelten Bedingungen abhängig, und es ist das Bestreben gewesen, Material in genügender Menge und in genügender Mannigfaltigkeit anzusammeln, um eine Entwirrung der verschiedenen Ursachen der Rotverschiebung zu ermöglichen. Als solche Ursachen sind in Betracht gezogen worden: Druck, anomale Dispersion, Bewegung in der Gesichtslinie, Gravitationsverschiebung und differentielle Streuung.

Dividiert man die Differenzen der Verschiebungen Sonne—Vakuum für die Linien zweier verschiedener Druckgruppen, die aber dieselbe mittlere Wellenlänge haben, durch die Differenzen der Druckkoeffizienten pro Atmosphäre, so erhält man den Druck in der umkehrenden Schicht der Sonne. Aus etwa 200 bis 300 Linien, für welche die Daten jetzt zur Verfügung stehen, ergeben sich folgende Resultate:

Gruppen	Mittlere Wellenlänge	Anzahl der Linien	Druck in der umkehrenden Schicht
a—b	3800	41	— 1,0 Atm.
a—b	5050	92	+ 0,9 „
b—d	4100	62	+ 0,5 „
b—d	4550	37	— 0,2 „

Die Differenz in den Druckkoeffizienten für die Gruppen a und b ist klein im Vergleich zur Differenz für die Gruppen b und d; jedoch ohne dementsprechende Gewichtsverteilung und ohne Rücksicht auf die Anzahl der Linien mag man das einfache Gesamtmittel + 0,05 Atm. annehmen. Für C_4-, C_5- und Ti-Linien ergibt sich der Wert + 0,02 Atm. Jedenfalls erscheint es gerechtfertigt, anzunehmen, daß der Druck in der umkehrenden Schicht nur ein kleiner Bruchteil einer irdischen Atmosphäre beträgt.

Dieses erste Resultat schließt aus dem Problem die Betrachtungen über den Druck aus und gestattet, die Linien aller Elemente für die Untersuchung zu verwenden. Von den Linien der Cyanbanden, die

ursprünglich ausgewählt waren, weil sie keine Druckverschiebung zeigen, hat King gezeigt, daß ihre relative Intensität mit wachsender Temperatur sich ändert, eine Eigenschaft, die zur Temperaturabschätzung der umkehrenden Schicht, wie es Birge getan hat, nützlich ist, die jedoch die Linien ungeeignet macht für eine genaue Vergleichung von Bogen- und Sonnenwellenlängen, besonders der Dublett- und Triplettgruppen.

Anomale Refraktion erfordert starke Dichtegradienten. In einer Atmosphäre, Tausende von Kilometern hoch, in welcher der Druck in der photosphärischen Schicht nur ein kleiner Bruchteil einer Atmosphäre ist, sind günstige Bedingungen für die notwendigen starken Dichtegradienten nicht vorhanden.

Das gegenwärtig zur Verfügung stehende Beobachtungsmaterial besteht aus 300 bis 400 Eisenlinien, für welche die Wellenlängen im Vakuum, im Bogen bei einer Atmosphäre Druck und im Sonnenspektrum mit großer Genauigkeit bekannt sind, und die Vergleichungen können mit homogenem Material ausgeführt werden, da die Einordnung der einzelnen Linien in die betreffenden Gruppen der Druckklassifikation von Gale und Adams bekannt ist. Eine Vergleichung der Sonnenwellenlängen mit den Laboratoriumswellenlängen im Vakuum zeigt, daß die Sonnenwellenlängen stets größer sind als die Laboratoriumswellenlängen. Wird der berechnete Einsteineffekt von den Differenzen Sonne—Vakuum abgezogen, so bleiben systematische Abweichungen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten übrig, die in vielen Fällen die Beobachtungsfehler übersteigen. Die Resultate sind folgende:

Linienverschiebung Sonne—Vakuum.

Beobachtete und nach der Relativitätstheorie berechnete Werte.

Gruppe	Anzahl der Linien	Intensität in der Sonne	Mittlere Wellenlänge	Berechnet	Beobachtet	Beobachtung — Rechnung		
a	17	12	3826	0,008	0,012	+ 0,004	0,3 km	abwärts
b	24	14	3821	0,008	0,0112	+ 0,0032	0,25 „	„
b	10	10,4	4308	0,0091	0,0113	+ 0,0022	0,16 „	„
a a	10	6	5419	0,0115	0,0112	− 0,0003		
b	95	4,6	4166	0,0088	0,0072	− 0,0016	0,1 „	aufwärts
b	36	5,2	6294	0,0133	0,0115	− 0,0018	0,1 „	„
d d	106	4,5	4763	0,0100	0,0069	− 0,0031	0,2 „	„
a	33	3,3	4957	0,0105	0,0074	− 0,0031	0,2 „	„

Die Höhenlagen, in denen die Linien in der Sonnenatmosphäre entstehen, nehmen in der Tabelle von oben nach unten ab.

Die Abweichungen Beobachtung—Rechnung sind groß und positiv für Linien hoher Schichten, und andererseits groß und negativ für Linien niederer Schichten, dagegen klein für Linien mittlerer Schichten. In der letzten Spalte sind die abwärts und aufwärts gerichteten Geschwindigkeiten angegeben, welche Beobachtung und Rechnung in Übereinstimmung bringen würden; besonders beachtenswert sind die Resultate der Linien der Gruppe a, welche die zuverlässigsten Linien im Eisenspektrum sind. Die gesamte Rotverschiebung kann abwärts gerichteten Geschwindigkeiten nicht zugeschrieben werden, weil dann die Wellenlängen am Rand der Sonnenscheibe kürzer sein müßten als in der Mitte, während sie tatsächlich im Durchschnitt am Rande länger sind als in der Mitte.

Wenn man den halben Effekt nach Larmor in Rechnung setzt, sind die sich ergebenden Geschwindigkeiten selbst für die niedrigsten Schichtenlagen abwärts gerichtet. Anomale Refraktion erfordert nach Julius, daß die Verschiebungen für starke Linien am geringsten sind, während sie tatsächlich für starke Linien am größten sind.

Es kann demnach die Lage des Problems der Rotverschiebung, so wie ich sie jetzt beurteile, folgendermaßen zusammengefaßt werden: Linienverschiebungen, wie sie von der allgemeinen Relativitätstheorie vorausgesagt werden, vereinigt mit geringen Dopplerverschiebungen, bieten die wahrscheinlichste Erklärung für die Unterschiede zwischen den Wellenlängen in der Mitte der Sonnenscheibe und den Wellenlängen des Bogens im Vakuum.

Das dauernde Bestehen von Strömungen, die nötig sind, um die beobachteten und berechneten Verschiebungen der Linien sehr hoher und sehr niedriger Schichten in Übereinstimmung zu bringen, führt auf Fragen, die in den Mitteilungen vom Mount Wilson-Observatorium erörtert werden sollen, wo ausführlichere Angaben erscheinen werden.

Es sind noch die weiteren Rotverschiebungen am Rande der Sonnenscheibe zu betrachten. Die längere Weglänge am Sonnenrande durch Schichten unter vermutlich großem Druck war von Halm, Fabry und Buisson und Adams als vorherrschender Grund für die Rand-Zentrumverschiebung vermutet worden; aber eine Erklärung durch Druck ist nicht mehr haltbar, nachdem man weiß, daß es sich um Drucke von der Größe eines kleinen Bruchteiles einer Atmosphäre handelt.

Prof. Julius hat darauf aufmerksam gemacht, daß die brechende Kraft an der roten Seite einer Absorptionslinie um das Doppelte der brechenden Kraft der Sonnenatmosphäre größer ist als an der violetten Seite der Linie. Er schreibt die Verschiebung zwischen Sonnen-

rand und Mitte der Sonnenscheibe einer Unsymmetrie zu, welche von anomaler Dispersion und Streuung in unregelmäßigen Dichtegradienten abhängen soll. Abgesehen davon, daß beständig unregelmäßige Dichtegradienten unwahrscheinlich sind, läßt der sehr geringe Druck schwerlich so starke Dichtegradienten zu, als für die anomale Dispersion nötig sind.

Schließlich bleibt noch die Wirkung der selektiven molekularen Streuung nach den Rayleigh-Schusterschen Formeln zu betrachten. Der Streuungskoeffizient wächst mit dem Quadrat der brechenden Kraft, es besteht also, da die brechende Kraft an der roten Seite einer Linie etwas größer ist als an der blauen, ein differentieller Effekt, der die Linie am roten Rande erweitert. Wegen der kurzen Weglänge in Schichten von geringer Dichte in der Mitte der Sonnenscheibe wird diese differentielle Erweiterung hier nicht in Frage kommen, aber die sehr viel längere Weglänge am Rande der Sonnenscheibe durch die unteren Schichten wird Bedingungen schaffen, die für diesen differentiellen Effekt günstig sind.

Die hiermit vorgeschlagene Deutung der Verschiebung zwischen Sonnenrand und Sonnenmitte schließt sich den Überlegungen von Halm, Fabry und Buisson und Adams an, setzt aber an Stelle des Druckes die differentielle Streuung in längeren Weglängen; sie erfordert weder große Dichten, noch starke Dichtegradienten.

Man kommt demnach zu der Schlußfolgerung, daß drei Hauptursachen die regelmäßigen Unterschiede zwischen den Sonnenwellenlängen und irdischen Wellenlängen hervorrufen, und daß es möglich ist, ihre Wirkungen zu trennen. Diese Ursachen sind erstens die Verlangsamung des „atomistischen Uhrwerkes“ in der Sonne um den von der allgemeinen Relativitätstheorie vorausgesagten Betrag, zweitens Radialgeschwindigkeiten von geringer kosmischer Größe und in wahrscheinlichen Richtungen, und drittens differentielle Streuung in den längeren Weglängen, die das vom Rande der Sonnenscheibe kommende Licht in der Sonnenatmosphäre zurücklegt. Die erste Ursache besteht für alle Linien in allen Teilen der Sonne, die zweite erscheint regelmäßig und beständig, und zwar abwärts gerichtet in sehr hohen und aufwärts gerichtet in sehr niedrigen Höhenschichten, während die dritte Ursache in dem sogenannten Randeffekt in Erscheinung tritt.

Pasadena, 2. November 1923.

Über die Veränderung des Temperaturkoeffizienten von reinem Platin bei mechanischer Beanspruchung.

Von **Otto Feussner** in Hanau.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 11. Dezember 1923.)

1. Zusammenhang des Temperaturkoeffizienten mit dem mechanischen Zustand. Der Temperaturkoeffizient der elektrischen Leitfähigkeit reiner Metalle ist oft Gegenstand der Untersuchung gewesen [1]); auch seine Änderung mit der Temperatur ist durch zahlreiche Messungen sichergestellt [2]). Alle Messungen ergeben ausnahmslos, daß der Temperaturkoeffizient um so höher ist, je reiner das Metall ist. Ebenso, daß zur Erreichung der größten Höhe eine sorgfältige mechanische Behandlung notwendig ist. Nach Untersuchung Credners [3]) ergibt ein Draht den größten Temperaturkoeffizienten, wenn er bei 5 bis 600° 10 Minuten lang oder bei höheren Temperaturen entsprechend kürzer geglüht wurde. Über diese Zeit hinaus geglüht, nimmt der Temperaturkoeffizient wieder ab. Ob allerdings in dieser Allgemeinheit der Satz aufrecht zu erhalten ist, kann bezweifelt werden. Holborn gibt an (a. a. O.), daß Platinwiderstandsthermometer über 1100° nicht benutzt werden können, da der Temperaturkoeffizient des Platins infolge „grober Rekristallisation" stark fiele.

Die Abnahme des Temperaturkoeffizienten infolge mechanischer Beanspruchung ist ebenfalls seit langem bekannt; Versuche, sie mit der Stärke der vorhergehenden mechanischen Beanspruchung in Verbindung zu setzen, ergeben sehr schwankende Zusammenhänge. Es erschien möglich, daß die Verhältnisse übersichtlicher würden, wenn auf den Draht nur eine einfache Beanspruchung ausgeübt wurde, beispielsweise ein Zug, wobei durch Bestimmung der Längenzunahme und Größe des Zuges die äußeren Daten leicht gegeben waren. Allerdings ist dabei Voraussetzung, daß der Draht über seine ganze Länge gleichmäßig verändert wird und nicht etwa nur an einzelnen Stellen der Beanspruchung nachgibt. Ein gewisses Kriterium hierfür kann das Verhältnis: Widerstandszunahme zu Längenzunahme bilden. Denn ist der Widerstand vor der Dehnung

$$W = \frac{s \cdot h}{q},$$

---

[1]) Vgl. z. B. L. Holborn, Ann. d. Phys. (4) **59**, 145—169, 1919.
[2]) Vgl. z. B. A. A. Somerville, Phys. Rev. **31**, 261—277, 1910.
[3]) Fritz Credner, ZS. f. phys. Chem. **82**, 457—503, 1913.

wo h = Länge, s = spez. Widerstand, q = Querschnitt bedeutet, so würde der Widerstand betragen, wenn ε die Verlängerung des Drahtes ist und gleichmäßige Verlängerung des Drahtes vorausgesetzt wird:

$$W' = \frac{s \cdot h'}{q'}, \qquad \begin{matrix} h' = h + \varepsilon, \\ q \cdot h = q' \cdot h' = q'(h + \varepsilon). \end{matrix}$$

$$q' = \frac{q \cdot h}{h + \varepsilon},$$

$$W' = \frac{s(h + \varepsilon)}{\frac{q \cdot h}{(h + \varepsilon)}},$$

$$W' = \frac{s(h + \varepsilon)^2}{q \cdot h} = \frac{s \cdot h}{q} + \frac{2\varepsilon s}{q} + \frac{\varepsilon^2}{q \cdot h},$$

$$W' = \frac{s}{q}\left(h + 2\varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{h}\right). \qquad (1)$$

Da ε im allgemeinen bei den gewöhnlichen Drähten nur Bruchteile der gesamten Länge beträgt, so ist das Glied $\frac{\varepsilon^2}{h}$ ziemlich klein; der Widerstand würde also fast linear mit der Verlängerung wachsen.

Dehnt sich der Draht dagegen nur an einer Stelle, so ergibt sich, wenn wir mit v den Teil des Drahtes bezeichnen, der sich dehnt,

$$W = \frac{s(h - v)}{q} + \frac{s \cdot \varepsilon}{q'} + \frac{s \cdot v}{q'},$$

$$v \cdot q = \varepsilon q', \quad q' = \frac{v \cdot q}{\varepsilon},$$

$$W = \frac{s(h - v)}{q} + \frac{s \cdot \varepsilon}{\frac{v \cdot q}{\varepsilon}} + \frac{s \cdot v}{\frac{v \cdot q}{\varepsilon}},$$

$$W = \frac{s(h - v)}{q} + \frac{s \cdot \varepsilon^2}{v \cdot q} + \frac{s \cdot \varepsilon}{q},$$

$$W = \frac{s}{q}\left(h - v + \frac{\varepsilon^2}{v} + \varepsilon\right). \qquad (2)$$

Das Glied $\frac{\varepsilon^2}{v}$ ist hier wesentlich größer als in (1), weil v eine kleine Größe ist, kleiner als ε; ein solcher Draht müßte also einen Widerstandsverlauf in Abhängigkeit von der Dehnung zeigen, der quadratisch ist.

Leider war bei mehreren der untersuchten Drähte die Längen- und Widerstandszunahme infolge der Dehnung zu gering, als daß sie mit großer Sicherheit gemessen werden konnte. Doch ergab sich

im großen ganzen etwa eine gerade Linie, so daß im wesentlichen gleichmäßige Dehnung angenommen werden kann, ein Ergebnis, das auch der äußere Augenschein bestätigte. Ehe nun zu dem Meßergebnis übergegangen wird, sei kurz eine Beschreibung der benutzten Meßanordnung gegeben.

2. Die Versuchsanordnung. Die Versuche wurden so angestellt, daß ein Platindraht von 0,1 mm Durchmesser, wie er zu Platinwiderstandsnormalthermometern verwandt wird, und etwa 1 m Länge in einen eigens dazu erbauten Röhrenofen gehängt wurde (Fig. 1). Der Ofen stand senkrecht, in seiner Mitte war ein unten geschlossenes Rohr, das mit Öl gefüllt und durch welches der Platindraht hindurchgespannt wurde. Sein unteres Ende war fest, oben endigte er an einem Arm, der durch einen Quecksilbernapf den Kontakt mit der Meßbrücke herstellte; der Arm seinerseits wurde von einer Glasöse getragen, an der ein dünner Stahldraht an der anderen Seite befestigt war, der über ein Rad lief und ein kleines Gewichtsschälchen trug. Das Rad hatte einen Zeiger zur Messung der Dehnung, das Gewichtsschälchen wurde entsprechend belastet. Um das mit Öl gefüllte Rohr war ein zweites Rohr, das mit Eis gefüllt und dann durch den Ofen erhitzt wurde und so die Messung bei beiläufig 100° ermöglichte.

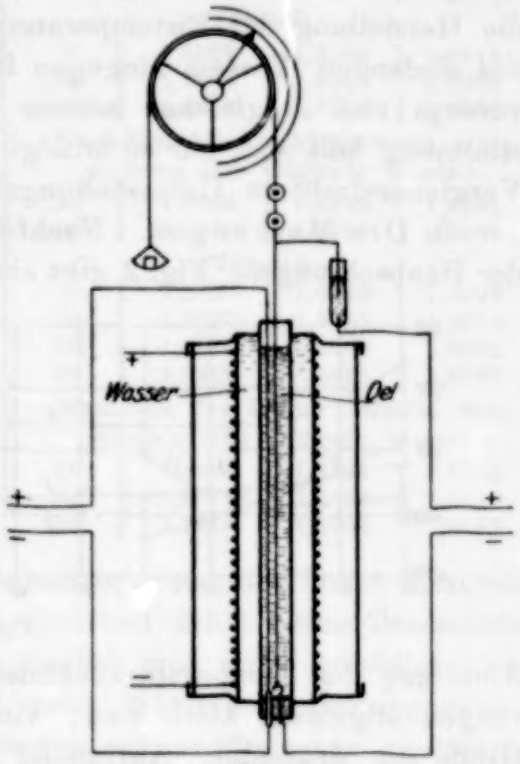


Fig. 1.

Der Einfachheit halber wurde anfänglich die Temperatur nur so bestimmt, daß in das Ölgefäß ein Platinwiderstandsthermometer, wie sie von der Firma W. C. Heraeus fabrikationsmäßig hergestellt werden, getaucht und dann gemessen wurde. Da jedoch die Möglichkeit einer nicht ganz gleichmäßigen Temperaturverteilung vorlag — trotzdem der zu untersuchende Draht nur etwa $^2/_3$ der ganzen Ofenlänge in der Mitte spannte —, so wurde nachher neben dem Meßdraht zur Temperaturbestimmung noch ein zweiter Draht aus ebenfalls reinstem Platin gespannt. Es erschien auch so nicht nötig, den absoluten

Temperaturkoeffizienten zu bestimmen, sondern es wurde nur das Verhältnis der Widerstände des Untersuchungsdrahtes und des Vergleichsdrahtes bestimmt. Da der Vergleichsdraht keinen Einwirkungen außer der Erwärmung ausgesetzt war, so konnte er als genügend konstant betrachtet werden und hat auch tatsächlich seinen Widerstand fast beibehalten; eine kleine Änderung trat infolge eines Umbaues und Neueinspannens ein, die aber sicher nur durch die eingetretene Längenänderung bedingt ist. Die Festlegung des absoluten Temperaturkoeffizienten ist vor allem deshalb erschwert, weil zwar die Herstellung der Eistemperatur leicht möglich ist, die Temperatur des siedenden Wassers hingegen infolge Luftdruckänderungen, Siedeverzugs und dergleichen schwer genau festzulegen ist. Seine Bestimmung läßt sich nur so ermöglichen, daß man über das Verhältnis Vergleichsdraht zu Untersuchungsdraht seine Größe berechnet.

3. Die Messungen. Nachfolgende Tabelle gibt einen Auszug der Beobachtungen. Fig. 2 gibt ein graphisches Bild der eingetretenen

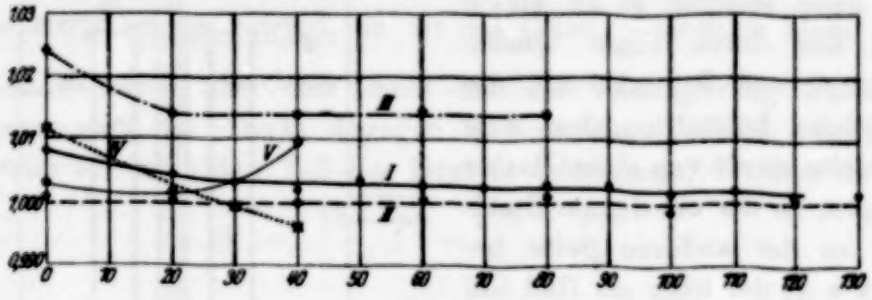


Fig. 2.

Änderung des Temperaturkoeffizienten. Man erkennt, daß die Änderungen allgemein klein sind, vielfach überschreiten sie kaum die Größe der Meßfehler. Auffallend ist vor allem, daß in der Mehrzahl der Messungen, besonders im Anfang, der Temperaturkoeffizient gestiegen ist. Später fällt er wieder, besonders bei den Drähten, die geringe Festigkeit hatten.

Ein Anhalt für die Behauptung, daß der Temperaturkoeffizient schon durch bloße Belastung durch Zug sich ändere, läßt sich demnach nicht erbringen, im Gegenteil kann man schließen, daß in dieser Hinsicht der Draht seine Eigenschaften auffallend wenig ändert.

Dies überraschende Verhalten konnte übrigens von anderer Seite im gewissen Umfange bei anderen Metallen bestätigt werden.

Die praktische Bedeutung der vorstehend mitgeteilten Untersuchungen liegt besonders darin, daß hiermit der Beweis erbracht ist, daß mechanische Beanspruchung, soweit sie in einfachem Zuge besteht, den Temperaturkoeffizienten kaum verändert.

Belastung g	Vergleichsdraht $R_{100} : R_0$	Untersuchungsdraht $R_{100} : R_0$	Vergl.-Dr. / Untersdr.
	Versuch 1.		
0	1,3895	1,3851	1,0082
20	1,3880	1,3817	1,0046
30	1,3873	1,3825	1,0034
30	1,3900	1,3864	1,0026
40	1,3909	1,3880	1,0021
50	1,3911	1,3859	1,0037
60	1,3885	1,3845	1,0029
70	1,3923	1,3885	1,0027
80	1,3894	1,3854	1,0029
90	1,3874	1,3837	1,0027
100	1,3913	1,3890	1,0017
100	1,3913	1,3884	1,0021
110	1,3923	1,3890	1,0024
120	1,3908	1,3895	1,0009
	Versuch 2.		
0	1,3793	1,3784	1,0007
20	1,3881	1,3876	1,0003
40	1,3859	1,3858	1,00006
60	1,3837	1,3832	1,0003
80	1,3846	1,3832	1,0010
100	1,3851	1,3870	0,9987
110	1,3881	1,3853	1,0020
130	1,3902	1,3884	1,0013

Belastung g	Vergleichsdraht $R_{100} : R_0$	Untersuchungsdraht $R_{100} : R_0$	Vergl.-Dr. / Untersdr.
	Versuch 3.		
0	1,4056	1,4880	1,0240
20	1,3930	1,3731	1,0144
40	1,3988	1,3792	1,0142
60	1,3894	1,3694	1,0146
80	1,2714	1,2538	1,0140
	Versuch 4.		
0	1,3868	1,3706	1,0118
30	1,3898	1,3903	0,9996
40	1,3848	1,3901	0,9962
	Nachdem der Draht entlastet war, ergaben sich folgende Werte:		
30	1,3898	1,3896	1,0001
40	1,3853	1,3900	0,9968
	Versuch 5.		
0	1,3883	1,3843	1,0029
20	1,3927	1,3905	1,0016
30	1,3876	1,3829	1,0034
40	1,3969	1,3835	1,0097
	Nachdem der Draht entlastet war, ergaben sich folgende Werte:		
20	1,3926	1,4530	0,9584
30	1,3898	1,3883	1,0010
40	1,3970	1,3902	1,0049

Ganz anders ist aber das Verhalten, wenn der Draht beispielsweise durch eine Ziehdüse gezogen wird und dabei seinen Querschnitt verringert. Im allgemeinen findet hierbei eine recht erhebliche Abnahme des Temperaturkoeffizienten statt. Wie schon oben angegeben, ist es aber bisher nicht möglich gewesen, einwandfreie und eindeutige Zusammenhänge zu der Querschnittsabnahme oder Stärke der Bearbeitung und zwischen der Änderung des Temperaturkoeffizienten aufzustellen. Es kann ohne Schwierigkeiten beobachtet werden, daß bei einem Draht nach der ersten Bearbeitung eine starke Abnahme des Temperaturkoeffizienten sich zeigt, dann aber bei fortgesetzter Behandlung ein nicht unerhebliches Steigen.

Der Firma W. C. Heraeus bin ich für Überlassung der notwendigen Apparatur und mancherlei Unterstützung zu Dank verpflichtet.

Zusammenfassung. Der Temperaturkoeffizient von reinem Platin bleibt bei mechanischen Beanspruchungen, die im wesentlichen in einer Gleitung bestehen, merklich konstant.

Hanau a. M., Wissenschaftl. Laboratorium d. Firma W. C. Heraeus.

Die Kristallstruktur des Chlorwasserstoffs [1]).

Von **Franz Simon** und **Clara v. Simson** in Berlin.

Mit drei Abbildungen. (Eingegangen am 15. Dezember 1923)

Die Untersuchung der Kristallstruktur der aus den einfachsten Atomen aufgebauten Substanzen ist deswegen von besonderem Interesse, weil man bei ihnen am ersten hoffen kann, die Zusammenhänge zwischen dem Atom- bzw. Molekülmodell und dem Gitteraufbau kennenzulernen. Diese Substanzen sind nun aber, soweit sie nicht in Ionengittern kristallisieren, bei Zimmertemperatur meist gasförmig. Wir haben deshalb eine Methode ausgearbeitet, um bei tiefen Temperaturen die Kristallstruktur kondensierter Gase röntgenographisch zu ermitteln. Da es sehr schwer ist, von ihnen größere Kristalle herzustellen und auch deren Handhabung (Zentrierung bzw. Bewegung) bei diesen Temperaturen mit Schwierigkeiten verknüpft ist, schien uns die einzig mögliche Untersuchungsmethode die nach Debye-Scherrer zu sein.

Es kommt nun darauf an, das kondensierte Gas auf möglichst einfache Weise in die Achse einer Debye-Kamera zu bringen. Wir haben dies folgendermaßen erreicht: Durch die Mitte einer vakuumdichten Kamera ist ein dünnes Metallrohr geführt, durch das ein Gas gedrückt wird, das vorher durch Leiten durch eine Kühlflüssigkeit deren Temperatur angenommen hat. Das zu untersuchende Gas wird in die Kamera geleitet und kondensiert sich außen rund um das kalte Metallrohr herum, so daß man einen Hohlzylinder der betreffenden Kristalle in wirrer Lagerung in der Achse der Kamera hat. Man kommt so um die Notwendigkeit, die ganze Kamera auf die tiefe Temperatur zu bringen, herum, wodurch die Ausführung der Messung sehr erleichtert wird. Vorbedingung ist lediglich, daß die zu untersuchende Substanz bei der Temperatur der Kühlflüssigkeit einen kleinen Dampfdruck hat, da sonst infolge der Wärmeleitfähigkeit des Gases so große Wärmemengen zugeführt werden würden, daß keine Kondensation eintreten könnte. Diese Bedingung kann man durch Verwendung von flüssiger Luft und flüssigem Wasserstoff bei den allermeisten Gasen erfüllen.

---

[1]) Vorgetragen am 7. Dezember 1923 in der Physikalischen Gesellschaft in Berlin.

Man hätte auch daran denken können, die Kristalle in ein dünnwandiges Rohr eingeschlossen in die Kamera zu bringen. In diesem Falle müßten jedoch die abgebeugten Röntgenstrahlen noch das Rohr durchsetzen und würden dabei einen sehr großen Teil ihrer sowieso geringen Intensität verlieren. Wie groß dieser Verlust wäre, kann man daran sehen, daß in unserem Falle die von dem Metallrohr abgebeugten Strahlen von der außen angelagerten etwa 0,5 mm dicken Schicht kondensierten Gases so stark absorbiert wurden, daß sie nach einer für die Strukturbestimmung des letzteren genügenden Expositionszeit auf dem Film überhaupt nicht zu sehen waren.

Beschreibung der Apparatur.

Die Röhre. Es wurde eine Gasröhre verwendet, die in Anschluß an die von Hadding[1]) beschriebene gebaut ist. Um während des Betriebes die Entladungsform beobachten zu können, wurde der Porzellanisolator durch die Glasglocke *G* (Fig. 1) ersetzt, die mittels eines Schliffes *Sch* auf den Metallkörper aufgesetzt ist. Die Kathode ist zur Isolation mit einem Porzellanrohr *P* umgeben, welches an der Durchführungsstelle durch die Glasglocke mit Picein abgedichtet ist. Zur Feinregulierung der Richtung der Kathode ist folgende Einrichtung getroffen: Auf dem Porzellanrohr sitzt mittels eines Schliffes der durch eine Membran *N* verschlossene Messingteil *F*. Diese trägt in der Mitte das mit einem Verstärkungsring versehene Rohr *R*, durch welches die aus Aluminium gefertigte Kathode geschoben wird. Um letztere mit dem Rohr bequem verlöten zu können, war sie nach dem Meurerschen Spritzverfahren mit einem Zinküberzug versehen worden. Durch Drehen von drei Schrauben kann man nun die Kathode innerhalb des Porzellanrohres auf jede Richtung leicht festlegen.

Der geerdete Röhrenkörper und die Antikathode werden durch Anschluß an die Wasserleitung gekühlt, zur Kühlung der Kathode wird Öl[2]) verwendet, um die umständlichen Isolationseinrichtungen ersparen zu können. Das Öl wird durch eine kleine Automobilpumpe durch die Kathode und einen wasserumflossenen Kühler getrieben.

Das nötige Vakuum wird dadurch erzeugt, daß auf der einen Seite eine Quecksilberdampfstrahlpumpe dauernd saugt, auf der anderen durch die Kapillare *K* aus dem Ballon B_1 Luft einströmt. Die Härte wird durch Einstellung des an einem Manometer ablesbaren Luft-

[1]) ZS. f. Phys. 8, 869, 1920.

[2]) Das verwendete Transformatorenöl wurde freundlicherweise durch die Stern-Sonneborn-A.-G. in Hamburg zur Verfügung gestellt, wofür wir auch an dieser Stelle bestens danken.

druckes in B_1 reguliert. Der Druck wird erniedrigt durch Verbindung mit dem ausgepumpten Ballon B_2 und erhöht durch Verbindung mit der Atmosphäre[1]). Da die Luftmenge, mit der die Röhre während des Betriebes läuft, zum Anlaufenlassen nicht ausreicht, wurde zwischen Kapillare und Röhre seitlich ein mit zwei Hähnen versehenes Rohr angebracht, dessen Luftinhalt bei Betriebsbeginn in die Röhre gegeben wird.

Wir verwendeten eine Hochspannungsgleichrichteranlage von Siemens & Halske, die bei Dauerbelastung Ströme von 5 mA zu entnehmen gestattet. Die Spannung wurde nicht genau gemessen, wir stellten nur durch Schlagweitebestimmungen fest, daß sie ungefähr bei 50000 Volt lag.

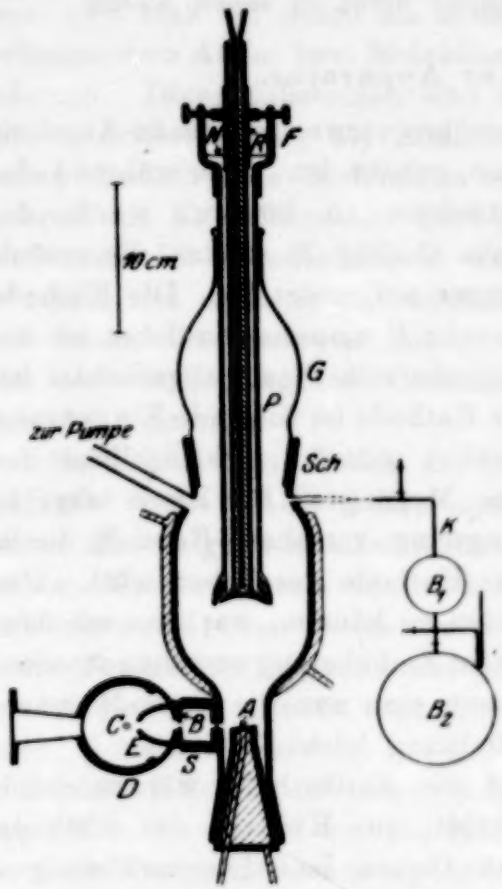


Fig. 1.

Die Kamera D (Fig. 1 und 2) besteht aus einem Messingrohr von 61,1 mm lichter Weite, 3 mm Wandstärke und 60 mm Länge. Sie ist mit Hilfe eines Schliffes S unmittelbar gegenüber dem Austrittsspalt der Röntgenstrahlen vakuumdicht angebracht. Diese gehen von der etwa 3° zur Horizontalen geneigten Antikathode A aus, treffen nach Passierung der schlitzförmigen Bleiblende B die Kupferkapillare C (Durchmesser etwa 1 mm) und treten durch das mit Aluminiumblech verschlossene Ansatzrohr aus. Letzteres ist so gebaut, daß keine Streustrahlung den Film treffen kann, die Blenden E dienen dem gleichen Zweck[2]). Die eine Seite der Kamera ist mit einem ringförmigen ungefähr zwei Drittel des Kreisumfanges geöffneten Schlitz versehen, durch den der Film eingeführt wird. Der Schlitz wird durch einen eingeschliffenen Ring verschlossen, zur vollkommenen Dichtung wird er mit einem heißen Gemenge von Wachs und Kolophonium überstrichen.

[1]) Eine ähnliche Einrichtung hat inzwischen Westgren beschrieben (ZS. f. phys. Chem. **102**, 1, 1922).

[2]) Siehe dazu Küstner, Phys. ZS. **23**, 257, 1922.

Der zur Kühlung der Kapillare dienende Wasserstoff wird unter geringem Überdruck einer Bombe entnommen, passiert nach Durchlaufen eines Gegenströmers G das mit flüssiger Luft gefüllte Dewargefäß W, strömt durch die Röhre O zur Kapillare und dann durch den Gegenströmer zurück über einen Strömungsmesser in die Atmosphäre. Der Gegenströmer hat den Zweck, den Wasserstoff, der in der Kapillare nur wenig Wärme aufnimmt, zur Vorkühlung des warm eintretenden zu benutzen. Zur Wärmeisolation sind die Röhren O von zwei weiteren T umgeben, die locker aufgeschobenen Glimmerscheibchen verhindern ihre Berührung; der Zwischenraum wird ausgepumpt. Zu diesem Zwecke konnte er jedoch nicht direkt mit dem

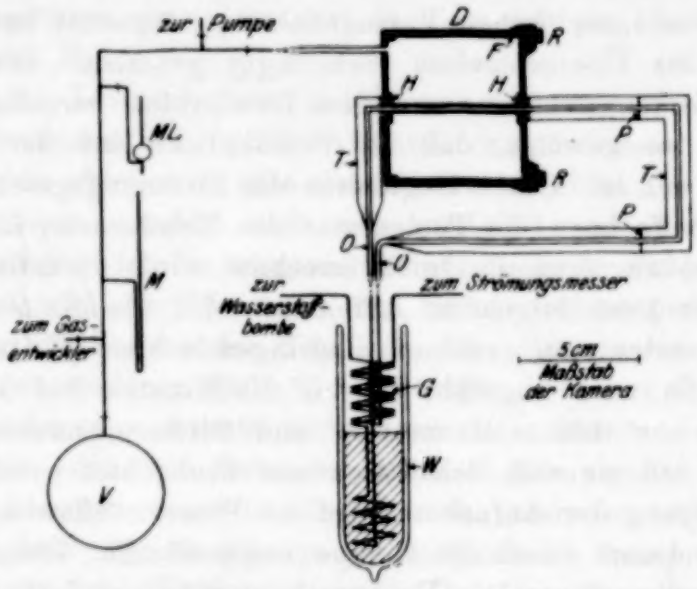


Fig. 2. Längsschnitt durch die Kamera.
Die Röntgenstrahlen treffen senkrecht zur Bildebene auf.

Vakuum der Kamera in Verbindung gesetzt werden, da sich dann das Gas an der Eintrittsstelle des gekühlten Wasserstoffgases in O, als der kältesten Stelle, kondensiert hätte. Die Verbindung wurde deshalb durch zwei stramm eingepaßte Hartgummihülsen H, die zugleich zur Zentrierung der Kapillare dienen, unterbrochen. Diese Hülsen bieten einem Gase einen so großen Widerstand, daß in der kurzen Zeit, die die Kondensation des Gases dauert, nichts hindurchgelangen kann, in längerer Zeit (etwa 5 bis 10 Minuten) die Ansatzstücke jedoch auf Hochvakuum gepumpt werden können. Die Kamera steht durch eine Rohrleitung mit dem Manometer M, dem Mac Leod-Manometer ML, dem Gasvorratsballon V, dem Gasentwicklungsapparat und einer Quecksilberdampfstrahlpumpe in Verbindung.

Der Gang der Messung ist folgender: Zuerst wird das Gas entwickelt, gereinigt und im Vorratsballon gesammelt. Dann wird der Film *F* eingelegt, die Kamera gedichtet und auf ungefähr $^1/_{1000}$ mm Quecksilber ausgepumpt. Nach Untersetzen des Dewargefäßes wird der Wasserstoffstrom angestellt, und die Kondensation kann beginnen. Dazu wird der zur Kamera führende Hahn so wenig geöffnet, daß in der Kamera immer ein kleinerer Druck, als der Tripelpunktsdruck herrscht, da das flüssige Kondensat von der Kapillare abtropfen würde. Erst am Ende der Kondensation wird einmal eine sehr kurze Zeit hindurch ein höherer Druck hineingelassen. Dies bewirkt, daß das Kondensat kurz überschmilzt und dadurch eine glatte Oberfläche erhält. Außerdem wird für den Fall, daß die Kriställchen sich in einer kristallographischen Vorzugsrichtung angesetzt haben sollten, dies durch das Überschmelzen rückgängig gemacht. Die aus dem Volumen des Vorratsballons und dem Druckabfall berechenbare Gasmenge wird so gewählt, daß die Schichtdicke auf der Kapillaren ungefähr 0,5 mm ist. Durch Regulieren der Strömungsgeschwindigkeit des Wasserstoffs kann die Temperatur des Kondensats, die aus dem am Mac Leod abgelesenen Druck errechnet wird, verändert werden. Während der jetzt folgenden Aufnahme wird die Kamera mit der Pumpe verbunden, um eventuell eindringende kleine Luftmengen zu entfernen. Es wird ungefähr 20 bis 30 Minuten bei 3 bis 5 mA Röhrenstrom belichtet. Manometer und Strömungsmesser sind so angebracht, daß sie vom Schalttisch aus beobachtet werden können. Nach Beendigung der Aufnahme wird der Wasserstoffstrom abgestellt und das Kondensat durch die Pumpe weggeschafft. Dann wird der Film herausgenommen. Der Verbrauch an flüssiger Luft ist infolge der Verwendung des Gegenströmers sehr gering, ungefähr $^1/_4$ Liter für jede Aufnahme.

Das photographische Material wurde uns von der Aktien-Gesellschaft für Anilinfabrikation in Berlin in dankenswertester Weise zur Verfügung gestellt. Wir benutzten den doppelseitig gegossenen Agfafilm, der sehr empfindlich ist und klar arbeitet.

Beim Aufstellen der Apparatur wurden wir durch Herrn cand. phil. H. König unterstützt.

Die Kristallstruktur des Chlorwasserstoffs.

Chlorwasserstoff siedet bei -83° C $= 190^\circ$ abs. und erstarrt bei -111° C $= 162^\circ$ abs. Außerdem war uns durch eine persönliche Mit-

teilung von Herrn Eucken[1]) bekannt, daß in seinem Institut bei der Messung der spezifischen Wärmen eine Umwandlung bei ungefähr 98° abs. gefunden worden war, die mit einer ziemlich beträchtlichen Wärmetönung verknüpft ist. Kristallographische Daten sind unseres Wissens nicht bekannt.

Wir stellten den Chlorwasserstoff her, indem wir konzentrierte Schwefelsäure auf Natriumchlorid tropfen ließen; beides waren Kahlbaumsche Präparate „zur Analyse". Das noch vorhandene Wasser wurde durch feste Kohlensäure ausgefroren; ferner wurde das Kondensat mehrfach destilliert.

Zur Ermittlung der Kristallstruktur der oberhalb 98° stabilen Modifikation machten wir drei Aufnahmen bei ungefähr 105° abs. Dieser Temperatur entspricht nach Henglein[2]) ein Dampfdruck von etwa 0,04 mm Hg.

Sämtliche Linien ordnen sich einem kubisch flächenzentrierten Gitter vollkommen ein. Der Abstand entsprechender Linien (am äußeren Rande abgelesen) gibt nicht direkt den Winkel φ der Braggschen Beziehung, sondern muß noch korrigiert werden. Die wesentlichste Korrektion ist die wegen der Substanzdicke, außerdem kommt noch in Betracht die Divergenz des Primärstrahlenbündels und die nicht ideale Zentrierung der Kapillare. Die Berechnung der Korrektionen ist an anderer Stelle[3]) ausführlich diskutiert worden. Der Substanzdurchmesser konnte nicht sehr genau bestimmt werden, da der Schatten, den die Substanz auf den Film wirft, wegen der schlechten Absorption am Rande einerseits und der nicht absoluten Strichförmigkeit der Strahlenquelle andererseits keine scharfe Begrenzung aufweist. Deswegen wurde bei der Berechnung so vorgegangen, daß zunächst mit der geschätzten Dicke korrigiert und nachträglich diese Korrektion auf Gangfreiheit der Gitterkonstantenwerte verändert wurde. Sie ist übrigens so klein, daß sie nur bei den kleinsten Beugungswinkeln in Betracht kommt.

Tabelle 1 bringt in der ersten Reihe die so korrigierten Linienabstände, in der zweiten sind die ihnen zugeordneten Ebenen angegeben, in der dritten die daraus berechneten Gitterkonstanten. Die vierte Reihe gibt die geschätzten Intensitäten[4]) und zum Vergleich die Zahl

---

[1]) Bisher nicht veröffentlicht.

[2]) ZS. f. Phys. 18, 64, 1923.

[3]) Clara v. Simson, Röntgenuntersuchungen an Amalgamen. Dissertation, Berlin 1923. Erscheint demnächst in der ZS. f. phys. Chem.

[4]) s. s. = sehr schwach, s. = schwach, m. = mittel, st. = stark, s. st. = sehr stark.

Tabelle 1.

1 (korr.)			Ebene	log a			Intensität			ber.
1	2	3		1	2	3	1	2	3	
2,70	2,67	—	(111)	—	—	—	s.	s.	—	—
2,98	2,96	2,94	111	0,7408	0,7434	0,7464	st.	st.	st.	4
3,12	—	3,09	(200)	—	—	—	s.	s. s.	—	—
3,44	3,44	3,41	200	0,7420	0,7420	0,7460	m.	m.	m.	3
4,43	4,42	4,44	(220)	—	—	—	s.	s. s.	s. s.	—
4,94	4,93	4,89	220	0,7412	0,7418	0,7453	st.	st.	st.	6
—	—	5,20	(113)	—	—	—	—	—	s. s.	—
5,87	5,85	5,79	113	0,7401	0,7412	0,7457	st.	st.	s. st.	12
6,14	—	6,07	222	0,7420½	—	0,7466	m. st.	—	s.	4
—	—	7,00	400	—	—	0,7530½	—	—	s.	3
7,96	7,92	7,89	133	0,7424½	0,7443½	0,7458	st.	st.	st.	12
8,20	8,16	8,13	240	0,7410½	0,7427½	0,7441	st.	st.	st.	12
9,16	9,12	9,06	224	0,7420½	0,7435½	0,7460½	st.	st.	st.	12
9,70	—	9,80	{115} {333}	0,7487½	—	0,7452	st.	—	st.	16
				0,7415	0,7429	0,7456				
				a = 5,51	5,53	5,57 Å				

der zur Reflexion beitragenden Ebenen. Abgesehen von dem Intensitätsabfall mit dem Winkel geben diese Zahlen ein Maß für die theoretisch zu erwartende Intensität. Die in Klammern eingeschlossenen Werte entsprechen Reflexionen der $K\beta$-Linie an der angegebenen Ebene. Die Bezeichnung $^1/_2$ bedeutet, daß die betreffende Linie nur auf einer Seite abgelesen werden konnte, da Flecken auf dem Film die Ablesung verhinderten. Diese Flecken entstehen auf folgende Weise: Beim Einschieben wird der Film an einzelnen Stellen leicht beschädigt und an diesen wird die alkalische Emulsion von der gasförmigen Salzsäure angegriffen, so daß bei der Entwicklung Flecke entstehen. Dasselbe tritt ein, wenn bei der Entfernung des Kondensats nach der Aufnahme ein Spritzer den Film trifft.

Als Mittel der Gitterkonstanten entnehmen wir den drei Filmen: $a = 5{,}54$ Å. Aus der von uns bestimmten Dichte dieser Modifikation (siehe weiter unten) folgt: $a = 5{,}47$ Å. Die Übereinstimmung von etwa 1 Proz. ist in Anbetracht der oben angeführten Schwierigkeiten befriedigend. Als wahrscheinlichen Wert nehmen wir an

$$a = 5{,}50 \pm 0{,}05 \text{ Å}.$$

Die zweite Modifikation ist unterhalb 98° abs. stabil. Diese Temperatur konnten wir auf die oben beschriebene Weise mit flüssigem Sauerstoff (Siedepunkt 90° abs.) als Kältebad nicht erreichen, da wegen der Wärmeleitung und -strahlung die Temperaturdifferenz zwischen Kältebad und Kapillare etwas größer ist. Wir nahmen daher die

Kühlspiralen ab und drückten direkt flüssigen Sauerstoff durch die Kapillare. In Fig. 3 ist eine Seite einer solchen Aufnahme wiedergegeben. Man sieht (auf dem Original sind 28 Linien zu erkennen), daß es sich hier um ein komplizierteres Gitter handelt, und es ist uns auch noch nicht gelungen, die Struktur zu ermitteln. Man kann nur mit Sicherheit sagen, daß diese Modifikation nicht regulär ist.

Es handelt sich nun um die Frage, ob die Gitterpunkte mit Ionen oder Molekülen besetzt sind. Zunächst läßt sich sagen, daß unsere Aufnahmen nur von den Schwerpunkten der Chlorelektronen herrühren, da das Chlorwasserstoffmolekül sicherlich heteropolar aufgebaut ist und daher der Wasserstoff in keinem Fall ein Elektron hat.

Mitte des Films

Fig. 3.

Ein Molekülgitter könnte man sich nun mit Born[1]) so aufgebaut denken, daß gewisse Vorzugsrichtungen der Moleküle alternierend auftreten. Die hierdurch bedingten Verrückungen der Elektronenschwerpunkte aus den Gitterpunkten sind aber wegen der kleinen Masse des Wasserstoffs im Verhältnis zum Chlor so gering, daß sie unter der Grenze experimenteller Faßbarkeit liegen.

Es scheint uns aber möglich, aus unseren Messungen einen indirekten Beweis dafür zu erbringen, daß es sich nicht um ein Ionengitter handeln kann. Betrachtet man nämlich mit Bragg die Kristalle als dichte Kugelpackungen, so lassen sich die „Raumerfüllungsradien" der Komponenten berechnen. Man erhält so für dieselbe Komponente aus verschiedenen Gittern Werte, die auf 10 bis 20 Proz. übereinstimmen. Nehmen wir nun an, daß ein Wasserstoffionengitter so in das oben gefundene hineingesetzt ist, daß ein dem Natriumchlorid analoges resultiert, so können wir aus dem bekannten Chlorionenradius (1,56 Å)[2]) den des Wasserstoffions zu 1,21 Å errechnen. Ein Vergleich mit den Radien des $Li^+ = 0{,}89$ Å[2]) und des $Na^+ = 1{,}26$ Å[2]) läßt diesen Wert und damit die Annahme eines Ionengitters unwahrscheinlich erscheinen. Für ein Molekülgitter spricht auch noch eine Reihe von Tatsachen anderer Art, wie dies schon von verschiedenen Autoren hervorgehoben worden ist[3]).

---

[1]) M. Born und H. Kornfeld, Phys. ZS. **24**, 121, 1923.

[2]) Zitiert nach Ewald, Röntgenstrahlen und Kristalle. S. 194. Berlin 1923.

[3]) Siehe z. B. die erwähnten Arbeiten von Born und Henglein.

Interessant ist, daß der Chlorwasserstoff aus einem Gitter niederer Symmetrie mit steigender Temperatur in ein solches höherer Symmetrie, nämlich eine dichteste Kugelpackung übergeht. Daraus läßt sich schließen, daß diese hohe Symmetrie nicht der des ruhenden Chlorwasserstoffmoleküls entspringt. Diese wird vielmehr erst durch die Wärmebewegung hervorgebracht, wahrscheinlich durch Rotation um eine oder zwei Achsen. Für dieses Auftreten neuer Freiheitsgrade bei der Umwandlung spricht auch der Sprung der Molwärme von 8 auf 9,5 cal/grad, den Eucken beobachtet hat.

Diese Betrachtungen zeigen, daß die Annahme eines kubischen Gitters mit ruhenden Molekeln, wie sie Born in seiner oben erwähnten Arbeit macht, nicht zulässig ist.

Dichtebestimmung. Wir bestimmten die Dichte des festen Chlorwasserstoffs in einem aus Jenenser Glas 59^{III} gefertigten Pyknometer, das aus einer etwa 6 ccm fassenden Kugel besteht. Das etwa 1 mm weite Ansatzrohr ist kurz oberhalb der Einmündung in die Kugel mit einer Reihe von Marken versehen. Die Eichung erfolgte bei Zimmertemperatur durch Auswägen mit Quecksilber, der Ausdehnungskoeffizient des Glases ist bis zu den tiefsten Temperaturen bekannt. Der Chlorwasserstoff wurde flüssig in das Pyknometer hineinkondensiert und dann, um Bildung von Hohlräumen zu vermeiden, sehr vorsichtig unter den Erstarrungspunkt abgekühlt. Darauf wurde als Sperrflüssigkeit Methan bis zu einer bestimmten Marke hinaufkondensiert. Als Kältebad nahmen wir ebenfalls flüssiges Methan, das unter einem Druck von 53 cm Hg siedete, was einer Temperatur von 107° abs. entspricht. Chlorwasserstoff und Methan wurden gesondert in Ballons verdampft und ihre Mengen aus Druck, Volumen und Temperatur der Ballons berechnet. Die Dichte des Methans wurde in einer besonderen Messung zu $d_{T=107^0} = 0{,}426_6$ ermittelt. Die Dichte des festen Chlorwasserstoffs ergab sich zu $d_{T=107^0} = 1{,}46_9$.

Für die bei tieferen Temperaturen beständige Modifikation verwendeten wir als Sperrflüssigkeit Sauerstoff, dessen Dichte genau bekannt ist, als Kältebad flüssigen Sauerstoff, der unter 25 cm Hg siedete ($T = 81^0$ abs.). Da bei der Umwandlung die kondensierte Masse im Pyknometer in viele kleine Stücke zerspringt und es nicht sicher ist, daß alle Poren von Sauerstoff ausgefüllt werden, ist der erhaltene Wert $d_{T=81^0} = 1{,}50_7$ möglicherweise nur eine untere Grenze.

Die Dichte des flüssigen Chlorwasserstoffs beträgt nach McIntosh, Steele und Archibald [1]) am Schmelzpunkt $d = 1{,}27_7$. Er kontra-

[1]) ZS. f. phys. Chem. 55, 129, 1906.

hiert also beim Erstarren um 15 Proz., bei der Umwandlung um etwa 2,5 Proz.

Wir wollen schließlich noch erwähnen, daß die beschriebene Apparatur auch bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffs noch verwendbar ist. So haben wir kürzlich die Struktur des Argons mit ihr bestimmt.

Zusammenfassung.

1. Es wird eine Apparatur zur Strukturermittlung kondensierter Gase nach der Debye-Scherrer-Methode beschrieben.

2. Der in zwei Modifikationen kristallisierende Chlorwasserstoff wird untersucht:

a) Die oberhalb 98° abs. stabile Modifikation ist kubisch-flächenzentriert mit der Gitterkonstante $5{,}50 \pm 0{,}05$ Å.

b) Die unterhalb 98° abs. stabile Modifikation ist von viel geringerer Symmetrie.

3. Es wird ein weiterer Anhaltspunkt dafür gegeben, daß das Gitter des Chlorwasserstoffs ein Molekülgitter ist.

4. Die Dichte beider Modifikationen wird im Pyknometer gemessen.

Die Anschaffung der Hochspannungsanlage wurde dem Institut durch eine Unterstützung seitens der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft ermöglicht, wofür wir auch hier unseren besten Dank aussprechen.

Berlin, Phys.-Chem. Inst. d. Univ., Dezember 1923.

Über Einstellung des Okularabstandes am binokularen Mikroskop.

(Mitteilung aus dem Institut für Mikroskopie an der Universität Jena.)

Von **H. Siedentopf** in Jena.

Mit drei Abbildungen. (Eingegangen am 26. November 1923.)

Bei Vorlesungen über Mikrostereoskopie wird in der Regel die Entstehung der orthoskopischen und der pseudoskopischen Raumanschauung genügend auseinandergesetzt und zumeist auch auf das Abbesche Experiment mit den Halbblenden über den Stereo-Okularen hingewiesen. Man erhält orthoskopische Bilder, wenn die Halbblenden so stehen, daß die äußeren Hälften der Austrittspupillen, und pseudoskopische, wenn die inneren Hälften wirken. Ich finde aber noch einen anderen Faktor, der die Raumanschauung im binokularen Instrument beeinflußt und der gelegentlich so groß werden kann, daß er die vorhandene orthoskopische Wirkung in eine pseudoskopische, und eine vorhandene pseudoskopische in eine orthoskopische umkehrt. Diese Ursache liegt in der Einstellung des Okularabstandes. Prüft man die vorliegenden Vorschriften für Einstellung des Okularabstandes am binokularen Mikroskop, so wird man finden, daß dieser Einstellung nicht mehr als die allgemein übliche Bedeutung beigemessen wird. Es wird als genügend erachtet, wenn man diesen Abstand so einstellen kann, daß die notwendige Verschmelzung des binokularen Eindrucks zu einem einheitlichen Bildeindruck zustande kommt. Demgegenüber ist es nun die Absicht der folgenden Zeilen, zu zeigen, daß diese Vorschrift nicht genügt, sondern daß sie durch eine genauere ersetzt werden kann, um richtigere Deutung des räumlich Gesehenen zu erlangen. Des weiteren wird gezeigt werden, daß der nach dieser neuen Vorschrift richtig eingestellte Okularabstand nicht genau mit dem Augenabstand übereinstimmen kann, auch wenn es sich um binokulare Mikroskope mit parallelen Okularachsen handelt.

Vorschrift: Man betrachte bei schwacher Vergrößerung (etwa 70 mal) die Farbkörner einer Agfa- oder Lumière-Farbenplatte unter dem binokularen Mikroskop. Man wird dann jedesmal die roten Körner in einem höheren Niveau als die grünen Körner, also näher, zu sehen glauben, wenn man den Abstand der Okularachsen absichtlich zu groß wählt. Bemüht man sich jedoch, diesen Abstand so klein wie möglich zu machen, dann scheinen umgekehrt die roten Körner

entfernter zu liegen, also in einem tieferen Niveau als die grünen, und bei einiger Übung ist es leicht, denjenigen richtigen Abstand der Okulartuben einzustellen, bei welchem die roten Körner mit den grünen im gleichen Niveau zu liegen scheinen. Um diese Einstellung genau durchzuführen, darf man nicht die roten Körner als Gesamtheit auffassen, sondern muß ein bestimmtes, in der Mitte des Sehfeldes liegendes einzelnes rotes Körnchen fixieren und ebenso ein benachbartes bestimmtes grünes Körnchen. Es ist ferner nur auf die so betrachteten Körner zu achten, niemals auf die Erscheinungen, welche nur im indirekten Sehen wahrgenommen werden. Es ist auffallend, wie genau man bei wiederholter Einstellung den gleichen Okularabstand nach dieser Vorschrift wiederfindet, bei welchem also die roten und grünen Körner im gleichen Niveau zu liegen scheinen. Meine eigenen Messungen ergaben lediglich Schwankungen bis zu $\pm$ 0,1 mm, und diese Schwankungen stiegen bei einer Person mit nicht voller Sehschärfe nur auf $\pm$ 0,2 mm. Es wäre gewiß vom augenärztlichen Standpunkt aus interessant, zu messen, wie weit die einzelnen Unterschiede im allgemeinen gehen. Doch bin ich selbst nicht in der Lage, derartige Messungsreihen vorzunehmen. Es genügt mir die Feststellung, die ich bei einer Anzahl Personen mit anscheinend normaler Sehschärfe machte, daß diese imstande waren, mit annähernd derselben Genauigkeit wie ich den Okularabstand nach meiner obigen Vorschrift einzustellen.

Die Erklärung für diese Empfindlichkeit der Einstellung des Okularabstandes, die die Meßgenauigkeit der bekannten Instrumente für Messung des Augenabstandes merklich übertrifft, ist zum Teil in der chromatischen Längsabweichung im Auge zu suchen. Diese Längsabweichung ist nach der Mitteilung von H. Schulz in der „Deutschen Optischen Wochenschrift“ 1923, S. 365, näher beschrieben und es sind auch die Meßresultate über die sphärische Abweichung in ihrer Abhängigkeit von der Einfallshöhe nach Beobachtungen von Ames und Proctor dort angegeben [1]).

Bekanntlich sind die Bilder naher Punkte auf den beiderseitigen Netzhäuten temporal gegenüber den entfernteren verschoben (Fig. 1). Nun werden in dem Fall, wo man am Binokularmikroskop einen zu großen Okularabstand einstellt, die temporalen Teile der Augenlinse bevorzugt (Fig. 2). Wirken aber vorwiegend die temporalen Teile der Augenlinse, so liegt der Schwerpunkt der roten Büschel temporal-

[1]) A. Ames und C. A. Proctor, Journ. Opt. Soc. Amer. 5, 22—84, 1922; A. Ames, C. A. Proctor und B. Ames, Proc. Amer. Ac. of Arts and Sciences 58, 1—47, 1923.

wärts gegen den der grünen (Fig. 3), weil die brechenden Medien im Auge alle im gleichen Sinn einer chromatischen Unterkorrektion wirken, d. h. eine kürzere Schnittweite für Blau als für Rot ergeben. Folglich erscheinen bei zu groß eingestelltem Okularabstand die Bilder roter Punkte temporalwärts verschoben und geben deshalb einen zu nahen Eindruck. Sie scheinen näher als die grünen Teilchen zu liegen, obgleich wir wissen, daß nach der Herstellung der Farbplatte alle verschiedenartigen Teilchen in einer Ebene liegen.

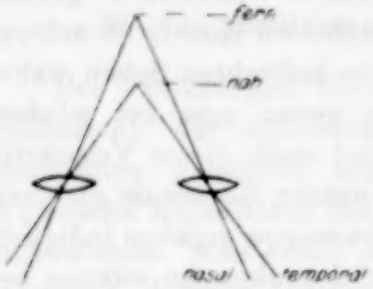


Fig. 1.

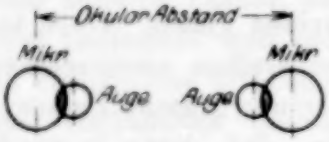


Fig. 2.

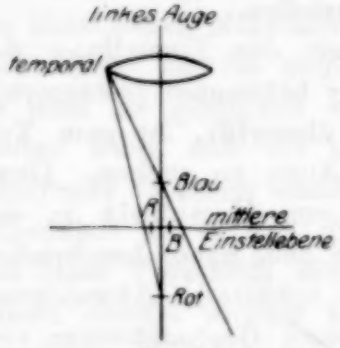


Fig. 3.

Umgekehrt bekommt man nasale Schwerpunktsverschiebungen der roten Büschel, wenn man den Okularabstand zu klein einstellt. Wir deuten entsprechend eine nasale Schwerpunktsverschiebung als größere Entfernung der roten Punkte. Die roten Punkte scheinen also ferner zu liegen, d. h. beim Hinabschauen in ein Binokularmikroskop unterhalb der grünen Körnchen. Eine nasale Schwerpunktsverschiebung muß aber eintreten bei zu kleinem Okularabstand am Apparat, da hierbei nur die nasalen Linsenteile bevorzugt werden. Die Schwerpunktsverschiebung der verschiedenfarbigen Büschel verschwindet nur bei einer ganz bestimmten mittleren Einstellung des Okulartubenabstandes.

Wir sind auf die Erscheinungen der farbigen Stereoskopie infolge der Chromasie des Auges insbesondere durch eine Arbeit von Einthoven[1]) unterrichtet. Aber eine spezielle Nutzanwendung der von diesem Autor gezogenen Schlüsse auf die richtige Einstellung des Okularabstandes im Binokularmikroskop scheint mir jedoch neu. Es ist selbstverständlich, daß bei einmal richtig gewähltem Okularabstand am Instrument die beiden Augen gemeinsam sich gegen das Instrument innerhalb eines durch die Größe der Austrittspupillen gegebenen Spielraumes bewegen können, soweit hierbei im wesentlichen

[1]) Einthoven, Stereoskopie durch Farbendifferenz. Arch. f. Ophth. 31, 3, S. 211.

für beide Augen gleiche Schwerpunktsverschiebungen eintreten und soweit die Augenpupillen größer als die meist sehr kleinen Austrittspupillen des Mikroskops sind. Das entspricht auch der Erfahrung, daß man den Kopf bei der Mikrostereoskopie mit „Bitumi“ [1]) nicht genau an derselben Stelle zu halten braucht, daß also die unvermeidlichen Schwankungen in der Kopfhaltung das Resultat nicht merklich beeinflussen. Diese Folgerung gilt aber nur für die binokularen Mikroskope mit parallelen Augenachsen.

Eine weitere Beobachtung, die sich ergibt, wenn wir nach richtiger Einstellung des Okularabstandes am Instrument die Lage der roten Teilchen nicht im direkten, sondern im indirekten Sehen festzuhalten suchen, erfordert eine besondere Erklärung, auf die ich in einer späteren Mitteilung einzugehen hoffe. Dasselbe gilt von Beobachtungen am Rande des Gesichtsfeldes. Hat man nämlich die gegebene Vorschrift für die Mitte des Gesichtsfeldes erfüllt, so findet man nach Scharfeinstellen des Randes, das bei der üblichen Bildfeldkrümmung im Mikroskop durch Tieferstellen des Tubus erzielt wird, die roten Körner in tieferem Niveau als die grünen, vorausgesetzt, daß das Objektiv selbst zentriert ist.

Nach diesen Erklärungen würde für solche Beobachtungen, die von der vorstehenden Beschreibung abweichen, zu folgern sein, daß hier ein abweichender Gang der chromatischen Aberration vorliegen müßte. Die gegebene Vorschrift für die richtige Einstellung des Augenabstandes am Binokularmikroskop wird aber hiervon nicht berührt. Als Ergebnis dieser Vorschrift wird man mit größerer Sicherheit im mikroskopischen Bilde die relative Lage der farbigen Körnchen zu deuten imstande sein, während bei Nichtbeachtung dieser Vorschrift Fehlurteile unvermeidbar sind.

Als Beispiel für solche Fehlurteile mag eine neuere Mitteilung von Schürhoff [2]) herangezogen werden. Derselbe kommt zu dem Schluß, „daß die unserem Auge stärker gefärbt erscheinenden Körnchen bei Betrachtung durch den Bitumiaufsatz höher zu liegen scheinen“. Es ist dem Autor entgangen, daß man den Augenfehler ausschaltet, wenn man bei richtig eingestelltem Okularabstand die verschiedenfarbigen Körnchen in einer Ebene beobachtet, in der sie auf Grund des bekannten Herstellungsverfahrens der Autochromrasterplatten auch liegen müssen.

---

[1]) Zeiss-Druckschrift „Mikro 355“ über „Bitumi“.

[2]) P. N. Schürhoff, Gefärbte Präparate bei Bitumi-Betrachtung. ZS. f. wiss. Mikr. **39**, 29—30, 1922.

Es ist einleuchtend, daß man zu einer anderen Okularabstandseinstellung am Binokularmikroskop kommt, wenn man mit Okulardeckeln nach Abbe, die als Halbblenden wirken, orthoskopisch beobachtet. Hier ergeben die Beobachtungen eine angenäherte Übereinstimmung mit der theoretisch geforderten Verkleinerung des Okularabstandes um einen Betrag, der das Doppelte beträgt von dem Ausdruck $a = \frac{4 \cdot r}{3\pi}$, worin „$r$" der Radius der Austrittspupille ist. Der Ausdruck „a" ist bekanntlich der mathematische Wert für den Abstand des Schwerpunktes des Halbkreises von der Mitte. Beabsichtigt man pseudoskopische Beobachtungen, die durch diesen farbenmikrostereoskopischen Effekt nicht gefälscht sein sollen, so ist der Okularabstand um denselben Betrag $2a$ zu vergrößern gegenüber der Feststellung des Okularabstandes ohne Halbblenden. Infolge der bei einiger Übung erreichbaren Einstellungsgenauigkeit auf gleiches Niveau der roten und grünen Teilchen kann man sogar auf diesem Umwege über Messung des Okularabstandes am Binokularmikroskop bei orthoskopischer oder pseudoskopischer Einstellung der Halbblenden den Durchmesser der Austrittspupille des Mikroskops nach obiger Formel wenigstens angenähert bestimmen.

Diese Betrachtungen gelten ohne weiteres für binokulare Mikroskope mit parallelen Okularachsen. Bei solchen Binokularmikroskopen, die konvergente Okularachsen haben, ergibt sich für ein und denselben Beobachter natürlich ein anderer Wert für den Okularabstand, infolge der konvergenten Stellung der Augenachsen. Diese Bemerkung führt uns auf ein neues Argument, das die alte Streitfrage, ob binokulare Mikroskope mit konvergenten oder mit parallelen Okularachsen gebaut werden sollen, zugunsten der letzteren entscheidet. Während wir einsehen, daß bei letzteren geringe Änderungen der Kopfhaltung sowohl bei seitlicher Verschiebung wie bei Veränderung des Abstandes vom Mikroskop keinen besonderen Einfluß auf den einmal richtig eingestellten Abstand der Okularachsen haben, ist selbstverständlich bei binokularen Mikroskopen mit konvergenten Achsen eine empfindliche seitliche Veränderung der Augenstellung zu den Schwerpunkten der Austrittspupillen des Instruments mit der Entfernung des Kopfes vom Mikroskop die Folge. Infolge dieser nicht fixierten Kopfhaltung wird man bei konvergenten binokularen Mikroskopen im allgemeinen mit unrichtigem Okularabstand beobachten, also hinsichtlich der Auffassung feiner räumlicher Verhältnisse Täuschungen auf Grund der oben geschilderten Verhältnisse, die durch die Chromasie im Auge mitbedingt sind, anheimfallen. Hat man z. B.

mit einem solchen konvergenten Binokularmikroskop die Farbenplatte mit zu kleinem Tubenabstand eingestellt und entfernt den Kopf ein wenig vom Mikroskop, so hebt sich das Niveau der roten Körner gegen das der grünen!

Man findet gelegentlich die Behauptung, daß man zur stereoskopischen Beobachtung am binokularen Mikroskop die Halbblenden nach Abbe nicht brauche, sondern daß es genüge, den Effekt der räumlichen Wahrnehmung durch Wahl des Abstandes der Okulartuben zu erreichen. Ich glaube, daß meine Auseinandersetzungen gezeigt haben, daß auf diesem Wege nur falscher Raumanschauung Vorschub geleistet wird und daß man auf die Verbindung der richtigen Einstellung des Okularabstandes nach meiner obigen Vorschrift mit der Anwendung der Abbeschen Wirkung halbabgeblendeter Objektive nicht verzichten kann. Es ist dabei zunächst belanglos, ob man die Halbblenden als Blenden hinter dem Okular oder hinter dem Objektiv, oder in einer beliebigen, diesen Ebenen konjugierten Bildebene anbringt. — Die gelegentlich aufgestellte Behauptung, daß man die Abbeschen Okularblenden bei sehr kleinen Austrittspupillen nicht genau genug herstellen könne, trifft auf die Ausführung von Zeiss nicht zu, da diese Firma auf meine Veranlassung die Stereookulare für „Bitumi“ in besonderer Weise abweichend von den üblichen Okularen zentriert, faßt und an den Halbblenden Justiereinrichtungen anbringt, die eine genügend genaue Halbierung sicherstellen. Es ist übrigens nicht so wichtig, daß eine absolut genaue Halbierung stattfindet, weil schon Abbe[1]) festgestellt hat, daß es zur Erzielung eines räumlichen Eindruckes nur darauf ankommt, daß wenigstens eins der beiden Bilder von möglichst guter Beschaffenheit ist.

Endlich legte ich mir noch die Frage vor, wie denn die Halbblenden genau in die Austrittspupille des Mikroskops gebracht werden können, wo doch die üblichen einfachen Huygens-Okulare eine beträchtliche, über 1 mm betragende chromatische Längsaberration im Ort der Austrittspupille zeigen. Dieser Einwand ist aber nur insofern berechtigt, als folgt, daß man nicht immer für das ganze Sehfeld gleichmäßige Beleuchtung herbeiführen kann, wenn man solche einfachen Huygens-Okulare benutzt und wenn man diese Huygens-Okulare mit besonders großem Sehfeld ausstattet. Alsdann würde am äußersten Rande der Sehfelder dieser Okulare eine geringe Verdunkelung sichtbar werden können, wenn man sie monokular prüft. Beim binokularen Beobachten spürt man diese Verdunkelung infolge

[1]) Abbe, Gesammelte Abhandlungen, Bd. 1, S. 250. Jena, Verlag G. Fischer.

der Bildverschmelzung in der Regel überhaupt nicht und außerdem kann man leicht durch passende Wahl der Sehfeldblenden diesem Schönheitsfehler begegnen, so daß er nicht störend aufzutreten braucht. Für die räumliche Deutung des im Binokularmikroskop Gesehenen kommt es bei feineren Vorgängen auch nicht sonderlich auf die Verhältnisse am Rande des Gesichtsfeldes an, weil wir oben gesehen haben, daß die richtige Wahrnehmung nur auf das direkte Sehen beschränkt ist, während man im indirekten Sehen Fälschungen im Raumbilde bekommen kann. Da wir in diesem Sinne also nur foveal am besten räumlich sehen und auch die Bilder im Mikroskop nur in der Mitte infolge der Bildfeldkrümmung und der chromatischen Differenz der Vergrößerung am besten sind, werden die äußersten Randpartien für die exakte räumliche Deutung sowieso nicht in Frage kommen.

Ferner mag die Bemerkung Platz finden, daß die auf sphärischer statt chromatischer Aberration der Abbildung im Instrument und im Auge beruhenden Einflüsse auf die stereoskopische Beurteilung bei richtiger Einstellung des Okularabstandes für die Mitte des Sehfeldes gleichzeitig mit den Einflüssen ausgeschaltet werden, die auf der in dieser Mitteilung lediglich behandelten chromatischen Aberration beruhen.

Es erübrigt noch eine Stellungnahme zu der Frage, wie der nach obiger Vorschrift richtig eingestellte Abstand der Okularachsen sich zu dem sogenannten Augenabstand des Beobachters verhält. Definieren wir den Augenabstand als den Abstand der beiden Augendrehpunkte, so werden wir sehen, daß jener richtig eingestellte Abstand der Okularachsen von binokularen Mikroskopen mit parallelen Okularachsen hiermit nicht genau identisch ist. Der Grund liegt darin, daß das normale Auge nicht symmetrisch ist, weil die Netzhautgrube, die Stelle des deutlichen Sehens, nicht auf der Augenachse, sondern temporalwärts von ihr liegt, derart, daß die Gesichtslinie des fixierten Punktes, welche durch den (vereinigten) Knotenpunkt des Auges nach der Netzhautgrube geht, mit der Augenachse einen Winkel von meistens ungefähr 5° bildet. Bei der richtigen Einstellung des Abstandes der Okularachsen nach obiger Vorschrift verfahren wir nun so, daß wir den Schwerpunkt der Austrittspupille des Mikroskops so weit seitwärts von der Gesichtslinie verlegen, daß die Strahlenfächer in dem Querschnitt, der durch die gemeinsame Ebene der Augenachsen gelegt wird, nach der Brechung in der Augenlinse symmetrisch zur Gesichtslinie verlaufen. Wir schalten also für diese Ebene den Augenfehler durch entgegengesetzte Dezentrierung aus. Dann kann in dem

auf der Fovea liegenden Zerstreuungskreis, in dem sich der Zielpunkt abbildet, keine temporale oder nasale Verschiebung der verschiedenfarbigen Bildpunkte oder Schwerpunkte vorkommen. Die Parallaxe der verschiedenfarbigen Bilder desselben Punktes verschwindet.

Bei genauerer Betrachtung finden wir weiter, daß diese Parallaxe nur so lange verschwindet, als die Linsen im Auge ihre Lage beibehalten. Wenn es auch noch nicht genügend bekannt ist, ob die Linse im ruhenden Auge merklich schief zur optischen Achse steht[1]), so folgt doch aus den Beobachtungen von Hess (l. c., S. 247), „daß die Linse bei starkem Akkommodieren sich merklich nach unten verschiebt, bei Entspannung der Akkommodation wieder heraufrückt". Hess fand „bei stärkster willkürlicher Akkommodationsanstrengung eine durchschnittliche Verschiebung der Linsen nach unten um etwa 0,28 bis 0,3 mm (S. 248). Die Beobachtungen von Hess scheinen aber „darauf hinzudeuten, daß auch im nicht akkommodierenden Auge die Linse nicht immer so unbeweglich befestigt ist, wie man es sich meist vorstellt" (S. 246). Wie die Linsenverschiebung auf die scheinbare Lage verschieden weit vom Auge entfernter Punkte wirkt, wird in der angegebenen Arbeit von Hess (S. 249) gezeigt.

Man kann weiter folgern, daß die seitliche Stellung der Gesichtslinie zum Schwerpunkt der Austrittspupille des Instruments einen kleinen Fehler in der obenerwähnten angenäherten Bestimmung des Durchmessers dieser Austrittspupille bewirkt, zu dem sich übrigens ein zweiter Fehler gesellt, der auf der Abweichung der Halbblenden von der genauen mathematischen Form beruht. Deshalb wurde jene Bestimmung nur als eine angenäherte bezeichnet.

Von weiterem Interesse ist, daß bei zuckenden Augenbewegungen und maximaler Akkommodationsanstrengung die Linse nach Untersuchungen von Hess (S. 244) schlotternde Bewegungen macht. Er bemerkt auch, daß die Deutlichkeit und Stärke, mit der das Linsenschlottern auftritt, für verschiedene Personen sehr verschieden ist (S. 245). Wir können daraus für unsere mikrostereoskopischen Beobachtungen die weitere Regel ableiten, daß man solche plötzlich zuckenden Augenbewegungen beim Mikroskopieren im Stereomikroskop nach Möglichkeit vermeiden soll.

Von geringerer Bedeutung für dieses Mikroskopieren ist die weitere Beobachtung von Hess, daß ein leichtes Schlottern, insbesondere der peripheren Iristeile, auch ohne Linsenschlottern auftreten

[1]) C. Hess in Graefe-Saemisch, Handbuch der gesamten Augenheilkunde, Kapitel XII, S. 79. Leipzig, Verlag W. Engelmann, 1910.

kann, weil die Austrittspupille der Mikroskope in der Regel merklich kleiner als die scheinbare Augenpupille ist.

Jedenfalls ziehen wir aus den oben gemachten Bemerkungen über die Inkonstanz der Linsenstellung den Schluß, daß es sich empfehlen dürfte, wenn man nicht ein für allemal nach obiger Vorschrift den Okularabstand des Binokularmikroskops einstellt, sondern ihn neu feststellt, wenn es sich um besonders genaue mikrostereoskopische Beobachtungen handelt. Alsdann hat man die Gewißheit, die Genauigkeit dieser Beobachtungen merklich weitergetrieben zu haben, als es ohne Anwendung dieser Vorschrift der Fall sein könnte.

Wir sahen oben, daß man zur richtigen Einstellung der Okularachsen diese gegen die Gesichtslinie dezentrieren muß. Dabei haben wir natürlich als selbstverständlich vorausgesetzt, daß der Beobachter keine Brille benutzt, die die sphärischen und chromatischen Fehler des Auges und die Wirkung der Schiefstellung der Gesichtslinie zur Augenachse aufhebt. Würde er das tun, dann müßte bei der richtigen Einstellung der Okularachsen im Sinne unserer Vorschrift die Gesichtslinie der Augen durch den Schwerpunkt der Austrittspupillen des Instruments gehen. Und selbst wenn diese Schwerpunkte auf den Okularachsen liegen, würde man erst dann bei dieser Einstellung einen Abstand der Okularachsen haben, der dem Augenabstand gleich ist, wenn in jedem Auge der Augendrehungspunkt auf der Gesichtslinie liegen würde.

Zusammenfassung: Es wird eine neue Vorschrift über die Einstellung des Abstandes der Okularachsen des Stereomikroskops gegeben, nach welcher eine bisher vorhandene Fehlerquelle, die auf der Chromasie des Auges in Verbindung mit der Schiefstellung der Gesichtslinie zur optischen Achse des Auges beruht und die zu abweichenden Raumauffassungen in stereoskopischen Schau- und Meßapparaten führt, in einfacher Weise beseitigt wird. Zugleich wird damit eine prinzipielle Fehlerquelle für die Raumauffassung in allen Stereomikroskopen mit konvergenten Okularachsen aufgedeckt. Schließlich ist gezeigt worden, daß der nach dieser neuen Vorschrift richtig eingestellte Okularabstand nicht genau mit dem Augenabstand übereinstimmen kann, auch wenn es sich um Mikroskope mit parallelen Okularachsen handelt.

Jena, im November 1923.

Die Zahl der von Radium ausgesandten α-Teilchen.

I. Teil. Szintillationszählungen.

Von **H. Geiger** und **A. Werner** in Charlottenburg.

(Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.)

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 5. Dezember 1923.)

1. Vorbemerkungen. Im Jahre 1908 veröffentlichten Rutherford und Geiger[1]) eine Methode, welche, auf dem Prinzip der Stoßionisation beruhend, eine Zählung einzelner α-Teilchen ermöglichte. Sie bestimmten nach dieser Methode die Zahl Z der α-Teilchen, die 1 g Radium pro Sekunde emittiert, zu $3{,}57 \cdot 10^{10}$[2]). Zehn Jahre später wurden die Versuche von Hess und Lawson[3]) wiederholt und für Z aus einer großen Zahl eingehend diskutierter Messungsreihen $(3{,}72 \pm 0{,}02) \cdot 10^{10}$ gefunden. Da die Zahl Z eine fundamentale radioaktive Konstante ist, aus der unter anderem Lebensdauer und Wärmeentwicklung von Radium hergeleitet wird, lag bei der beträchtlichen Differenz in den bisherigen Messungen die Notwendigkeit einer Neubestimmung vor. Wir haben es uns daher zur Aufgabe gemacht, die Zahl der von 1 g Radium in der Sekunde emittierten α-Teilchen mit möglichster Genauigkeit erneut zu bestimmen.

Wie bei den früheren Versuchen wird ein Präparat von genau bekanntem Gehalt in großem Abstand von einem Diaphragma aufgestellt. Dieses Diaphragma läßt einen aus Präparatabstand und Diaphragmenöffnung genau berechenbaren Bruchteil der Strahlen in den Zählapparat eintreten. Für die Zählung selbst kommen zwei Methoden in Betracht: die Szintillationszählung und die elektrische Zählung. Versuche sind nach beiden Methoden ausgeführt, doch soll hier zunächst über die Szintillationszählungen berichtet werden.

Gegen die Szintillationszählung als quantitative Methode können Bedenken zweierlei Art erhoben werden: 1. Es ist nicht ohne weiteres sicher, ob jedes α-Teilchen, welches auf die mit phosphoreszierender Substanz bedeckte Fläche auffällt, wirklich auch eine Szintillation hervorruft. Lücken in der Fläche und unwirksame Einschlüsse im phosphoreszierenden Material können die Ursache sein, daß einzelne

---

[1]) E. Rutherford und H. Geiger, Proc. Roy. Soc. (A) **81**, 141, 1908; Phys. ZS. **10**, 1, 1909.

[2]) Reduziert auf den internationalen Standard.

[3]) V. F. Hess und R. W. Lawson, Wien. Ber. **127** [2a], 405, 1918; ferner Wien. Ber. **127** [2a], 461, 599, 1918.

α-Teilchen unwirksam bleiben. 2. Ermüdungserscheinungen im Auge können bewirken, daß nicht jede Szintillation erfaßt und mitgezählt wird.

Wir glauben im folgenden den unter 1. angegebenen Einwand überzeugend widerlegt zu haben (Abschnitt 6). Zur Behebung des zweiten Einwandes, der sich bei genauer Untersuchung als viel erheblicher herausstellte, als allgemein angenommen wird, haben wir ein Doppelzählverfahren angewandt, das eine genaue Berechnung aller subjektiven Fehler beim Zählen ermöglichte (Abschnitt 7).

2. Versuchsanordnung. Die von dem Präparat P (Fig. 1) ausgesandten α-Teilchen treten durch die mit einem dünnen Glimmerblatt verschlossene Öffnung F in das evakuierte Messingrohr R ein. Ein

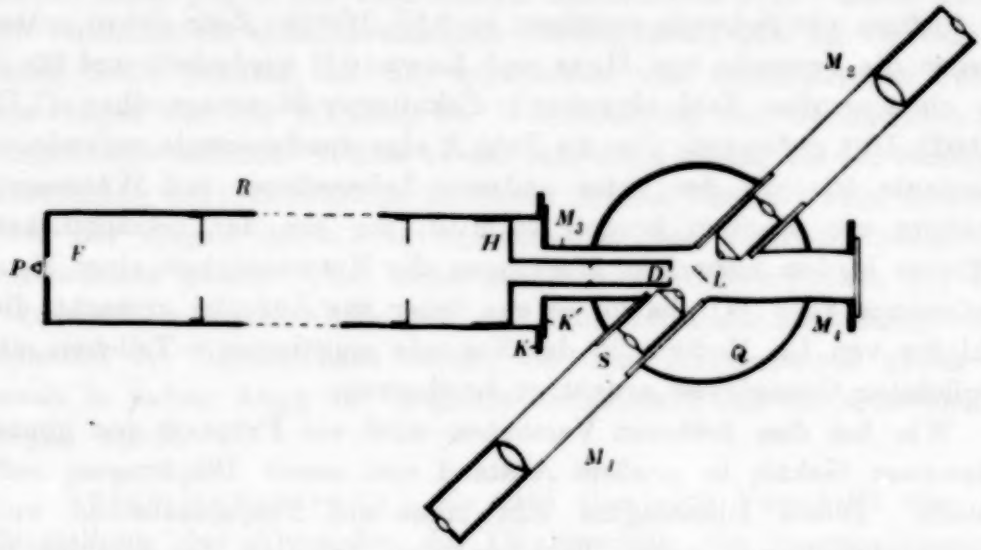


Fig. 1.

kleiner Bruchteil dieser Strahlen durchsetzt das an dem Halter H befestigte Diaphragma D und fällt auf den unter 45° zur Strahlrichtung geneigten Leuchtschirm L. Die besondere Form des Halters ermöglicht, daß das Diaphragma sehr nahe an den Zinksulfidschirm herangeschoben werden kann, was zur Vermeidung von Fehlern infolge der Streuung der Strahlen wünschenswert ist. Das Messingrohr R ist 5 cm weit, aber je nach der Stärke des Präparats von verschiedener Länge (300 cm, 120 cm und 50 cm). Durch mehrere Blenden in dem Rohr und in dem Diaphragmenhalter ist dafür gesorgt, daß nur unmittelbar vom Präparat ausgehende, nicht aber an der Rohrwand reflektierte Strahlen den Schirm erreichen können. Die auf dem Leuchtschirm auftretenden Szintillationen konnten gleichzeitig von zwei Beobachtern in Aufsicht und Durchsicht beobachtet werden. Das hierfür benutzte Doppelmikroskop war in einen zylindrischen Messingkörper Q von

9 cm Durchmesser und 5 cm Höhe eingebaut, der senkrecht zur Achse in zwei unter 45° liegenden Richtungen durchbohrt war. Die in diese Bohrungen eingelöteten Ansatzröhren M_1 und M_2 dienten zur Aufnahme der optischen Systeme. Die Objektive, zwischen denen sich der Leuchtschirm befand, waren in ein Führungsrohr S eingeschraubt, das in das Rohr $M_1 M_2$ derart eingeschoben wurde, daß der Schirm genau in die Mitte des Messingkörpers zu liegen kam. Teile des Führungsrohrs waren an den Seiten ausgefeilt, so daß der Schirm in Richtung der beiden anderen Ansatzstücke M_3 und M_4 vollkommen frei lag. Es wurden Leitz-Objektive Nr. 3 und Okulare Nr. 0 verwendet, die eine 45fache Vergrößerung ergaben. Die in den Mikroskopen sichtbare Fläche des Leuchtschirms hatte einen Durchmesser von 2,6 mm. Die Rohre M_3 und M_4 waren mit ebengeschliffenen Dichtungsflanschen versehen. M_4 war mit einer Glasplatte verschlossen, durch die der Schirm zur Erleichterung des Zählens schwach erleuchtet werden konnte. M_3 diente zum Anschluß des Doppelmikroskops an das Rohr R. Durch geringe Verschiebung der beiden Schliffflächen K und K' aufeinander konnte das aus dem Diaphragma D austretende α-Strahlenbündel auf die Mitte des Leuchtschirms zentriert werden. Die Zentrierung erfolgte auf optischem Wege, indem die Öffnung F mit parallel zum Rohr R verlaufendem Licht beleuchtet wurde. Das durch das Diaphragma begrenzte Strahlenbündel bildete sich auf dem Schirm als elliptische Fläche ab, deren Mittelpunkt nach der Zentrierung genau mit dem Mittelpunkt des Gesichtsfeldes zusammenfiel.

3. Diaphragmen. Als Material für die Diaphragmen wurden kreisförmige, beiderseits hochglanzpolierte Scheiben aus gehärtetem Stahl verwandt, die etwa 10 mm Durchmesser und 1 mm Dicke besaßen und vor der Härtung mit zentralen Bohrungen von annähernd dem gewünschten Durchmesser versehen wurden. Die Löcher wurden alsdann mit einem konischen Kupferdorn unter Verwendung von feinstem Schmirgel ausgeschliffen, so daß scharf begrenzte kreisförmige Blenden entstanden, deren Durchmesser, an verschiedenen Stellen auf dem Komparator ermittelt, selten größere Abweichungen als 0,001 mm aufwiesen. Die zu den Messungen verwandten Diaphragmen hatten folgende Durchmesser:

Diaphragma	Durchmesser mm	Unsicherheit mm
I	0,5191	± 0,0020
II	0,6362	± 0,0015
III	0,7270	
IV	1,0360	

4. Radioaktive Präparate. Die zu benutzende Strahlenquelle muß einerseits so stark sein, daß eine genaue Dosierung nach der γ-Strahlenmethode möglich ist, andererseits aber eine so geringe Schichtdicke besitzen, daß in ihr keine α-Strahlen absorbiert werden. Beide Bedingungen lassen sich bei Radium nicht gleichzeitig erfüllen. Es ist daher bei allen früheren Bestimmungen von Z der aktive Niederschlag der Radiumemanation als Strahlenquelle verwendet worden. Besitzt der aktive Niederschlag genau dieselbe γ-Strahlenaktivität wie 1 g Radium, so sendet er auch ebensoviel α-Strahlen in der Sekunde aus, so daß sich durch Messungen am Niederschlag die Zahl Z ebenso herleiten läßt, wie an Radium selbst. Das Arbeiten mit dem aktiven Niederschlag ist aber insofern sehr unbequem, als er sehr rasch abklingt, so daß alle Messungen unter größter Zeitbeschränkung ausgeführt werden müssen. Außerdem haftet den mit dem Niederschlag bedeckten Flächen sehr leicht Emanation an, wodurch Abweichungen von den theoretischen Abklingungskurven bedingt sind.

Wir haben daher nach einer geeigneteren Strahlenquelle gesucht und eine Lösung in der Weise gefunden, daß wir Radiumemanation in kleine Messingtrichterchen einführten, die an der Basis mit einem für die α-Strahlen genügend durchlässigen Glimmerblatt verschlossen waren [1]). Ein solches Trichterchen hatte die in Fig. 2 wiedergegebene Form. Der Basisdurchmesser betrug etwa 3 bis 4 mm, die Höhe 4 bis 5 mm, so daß sich ein Volumen von etwa 10 mm³ ergab. Die Innenfläche des Trichters war sorgfältig poliert und der Glimmer so aufgekittet, daß der Trichter selbst von Kittmaterial völlig frei war. Die Glimmerdicke betrug $5{,}6 \cdot 10^{-4}$ cm und absorbierte ebenso stark, wie eine Luftschicht von 1,1 cm Dicke.

Fig. 2.

Die Füllung des Trichterchens mit Emanation erfolgte durch eine mit Silber in die Trichterspitze eingelötete Platinkapillare von 0,1 mm Weite und 0,4 mm äußerem Durchmesser. An das freie Ende der Kapillare war ein dünnes Glasrohr angeschmolzen, das die Verbindung mit der zur Gewinnung und Reinigung der Radiumemanation

[1]) Die von Danysz und Duane (Amer. Journ. of Sci. **35**, 295, 1913) benutzte Strahlenquelle, bestehend aus einem sehr dünnwandigen, mit Em und Hg gefüllten Glaskügelchen, hat große Vorzüge, doch ist fraglich, ob nicht der aktive Niederschlag in merklichem Betrag in das Hg hineindiffundiert.

dienenden Glasapparatur herstellte. Nachdem der Trichter mit einer Emanationsmenge von 3 bis 10 Millicurie gefüllt war, wurde das Verbindungsrohr dicht an der Kapillare abgeschmolzen. Der Gasdruck im Trichter betrug dann wenige Zentimeter Hg. Die Dichtigkeit war außer Zweifel, da der Glimmer während der ganzen, meist mehrwöchigen Versuchsdauer infolge des äußeren Überdrucks eine leichte Krümmung nach Innen aufwies.

Wird das Trichterchen mit seiner Basisfläche vor der Eintrittsöffnung des Fensters *F* (Fig. 1) befestigt, so können alle Teile des Trichters mit Ausnahme der Kapillare ihre α-Strahlen in Richtung auf das Diaphragma entsenden. Das tote Kapillarvolumen beträgt höchstens 1 Proz. des gesamten Trichtervolumens und kann genügend genau in Rechnung gesetzt werden (vgl. auch Abschnitt 9).

5. Messung des Emanationsgehalts. Die Radiumemanation befindet sich drei Stunden nach der Füllung des Trichters im Gleichgewicht mit ihren Zerfallsprodukten, Radium A, B und C. Es werden dann vom Trichter drei Gruppen von α-Strahlen emittiert, die von der Emanation selbst, sowie von Radium A und C′ herrühren, und die durch die Reichweiten von 4,12, 4,72 und 6,97 cm charakterisiert sind. Man kann entweder die α-Strahlen von allen drei Gruppen zusammen zählen oder sich durch Einschaltung eines Absorptionsschirmes auf die Gruppe mit größter Reichweite, Radium C′, beschränken. Die Zahl der beobachteten α-Strahlen ist im ersten Fall dreimal, im zweiten ebenso groß, als wenn sich an Stelle der Emanation ihr Gleichgewichtsbetrag an Radium befände [1]). Man kann also aus Zählungen an Emanation sofort die Zahl der pro Gramm Radium emittierten α-Teilchen errechnen, wenn der Gleichgewichtsbetrag an Radium bekannt ist [2]). Dieser wird in der Weise bestimmt, daß man die γ-Strahlung des Emanationstrichters mit der γ-Strahlung eines Radiumnormalpräparats vergleicht, dessen Gehalt an Radium dem Gewicht nach feststeht. Die Reichsanstalt ist im Besitz mehrerer solcher an den internationalen Standard unmittelbar angeschlossener Radiumnormalpräparate.

Die Bestimmung der γ-Strahlung erfolgte unter Benutzung der in der Reichsanstalt für die Prüfung von Radiumpräparaten ausgearbeiteten Methoden. Die Mehrzahl der Messungen eines Präparats

[1]) In Wirklichkeit trifft dies nicht ganz zu, da sich Emanation und Radium C′ in „laufendem Gleichgewicht“ befinden. Statt des Faktors 3 ist 2,983 zu setzen; dies ist bei den folgenden Berechnungen auch stets geschehen. Näheres z. B. bei St. Meyer und v. Schweidler: Radioaktivität, S. 52, 1916.

[2]) Diejenige Emanationsmenge, die sich mit 1 (Milli)Gramm Radium im Gleichgewicht befindet, heißt (Milli)Curie.

wurde an dem Tage vorgenommen, an dem die Emanation so weit abgeklungen war, daß ihre γ-Strahlung möglichst nahe mit der eines Normalpräparats übereinstimmte, wodurch eine hohe Meßgenauigkeit erzielt wurde. Bei den Messungen mußte ferner berücksichtigt werden, daß an der Trichterwandung sekundäre γ-Strahlen ausgelöst wurden, während bei dem allseitig in Glas eingeschlossenen Radiumnormalpräparat solche asymmetrische Strahlen nicht auftraten. Die hierdurch bedingte Korrektion hängt von den speziellen Versuchsbedingungen ab und betrug im vorliegenden Falle 0,6 Proz.

Ist der Emanationsgehalt zu einem beliebigen Zeitpunkt einmal genau bestimmt, so kann er mit Hilfe der Zerfallskonstanten der Emanation für jeden beliebigen anderen Zeitpunkt berechnet werden. Diese Extrapolation bedingt in keinem Falle einen größeren Fehler als 0,2 Proz.[1]).

6. Leuchtschirme. Wir entschlossen uns nach einigen Vorversuchen, als Material für die Schirme phosphoreszierendes Zinksulfid zu benutzen, das teils selbst hergestellt, teils von de Haën bezogen war. Dünnschliffe aus Willemit oder Diamant ergaben zu schwache Szintillationen, da Objektive mit großer Apertur, wie sie z. B. Regener[2]) bei seinen bekannten Versuchen benutzte, hier wegen ihrer kurzen Brennweite nicht verwendet werden konnten. Um so notwendiger war es, alle Sorgfalt auf die Gewinnung von einwandfreiem Zinksulfid zu verwenden. Die Anforderungen, welche an ein solches Präparat gestellt werden mußten, waren folgende:

1. Möglichst feinkörniges Material, um dünne und doch lückenlose Schirme herstellen zu können;

2. Abwesenheit von inaktiven Einschlüssen; solche können z. B. durch Verunreinigungen oder durch mangelhafte Beseitigung der bei der Herstellung erforderlichen überschüssigen Salzzusätze entstehen;

3. Starke Erregbarkeit durch α-Strahlen.

Ein von de Haën stammendes Zinksulfid, das in erregtem Zustand kräftig Grün mit einem Stich ins Blaue leuchtete, erwies sich als sehr geeignet und wurde zu einem Teil der Zählungen herangezogen. Bei der Mehrzahl der Versuche wurde jedoch ein selbst hergestelltes Zinksulfid benutzt. Bei der Herstellung leiteten uns neben den von Tomaschek[3]) gewonnenen Erfahrungen vor allem die Anschauungen, die Lenard[4]) zur Erklärung der Triboluminescenz

[1]) Vgl. z. B. W. Bothe, ZS. f. Phys. **16**, 266, 1923.
[2]) E. Regener, Berlin. Ber. 1909, S. 948.
[3]) R. Tomaschek, Ann. d. Phys. **65**, 198, 1921.
[4]) Siehe obige Arbeit von Tomaschek, S. 195.

entwickelt hat. Es ist sehr wahrscheinlich, daß auch die Szintillation auf Triboluminescenz zurückzuführen ist; das α-Teilchen zerbricht bei seinem Aufprall die Kristalle, wobei sich luftverdünnte Spalte bilden, in denen die durch den Bruch entstehenden elektrischen Doppelschichten kurzdauernde Entladungen hervorrufen. Das dabei auftretende ultraviolette Licht löst im Zinksulfid den sogenannten Momentanprozeß des Leuchtens aus, den wir als die Szintillation ansprechen. Um möglichst helle Szintillationen zu erhalten, mußte daher auf höchste Intensität des Momentanprozesses hingewirkt werden. Nun nimmt der Momentanprozeß, der bei allen ZnCu-Phosphoren an sich schon stark ausgeprägt ist, bei Glühtemperaturen unter 1000° mit steigendem Metallgehalt zu und erreicht bei 0,0002 g Cu pro g ZnS seinen höchsten Wert [1]). Der nach diesen Gesichtspunkten hergestellte ZnCu-Phosphor mit NaCl als Schmelzzusatz zeigte bei Erregung durch Licht eine smaragdgrüne Farbe. Durch die Wahl einer nicht zu hohen Glühtemperatur und geeignete Glühdauer sowie durch schnelle Abkühlung des fertigen Präparats wurde ein recht feinkörniges Material gewonnen. Es wurde durch gründliches Waschen mit Wasser von dem überschüssigen NaCl befreit.

Die Feinkörnigkeit wurde durch Aufschlämmen in Alkohol und Abtrennung der sich schnell absetzenden gröberen Teilchen noch verbessert. Die Körnchen hatten schließlich im Mittel einen Durchmesser von einigen Mikron; sie zeigten kristallinischen Charakter, waren aber nicht selten zu unregelmäßigen traubenförmigen Gebilden zusammengeschlossen. Versuche, die Struktur des Phosphors durch Zerreiben verfeinern zu wollen, scheitern daran, daß durch den dabei aufgewandten Druck neben einer Verfärbung auch eine Zerstörung der Phosphoreszenzzentren eintritt.

Zur Prüfung der Szintillationsfähigkeit des Phosphors wurde eine Probe des Materials sehr fein auf einer Glasplatte verteilt und unter dem Mikroskop Korn für Korn den α-Strahlen ausgesetzt. Unter 600 beobachteten Körnchen waren 10, die auf die Strahlen nicht ansprachen und die sich teils auch äußerlich von ZnS unterschieden. Acht von diesen Körnchen hatten eine Abmessung von nur 1 bis höchstens 2 μ. Sie konnten daher die Zahl der Szintillationen nicht merklich verringert haben, da sie den α-Strahlen nur eine verschwindend kleine Oberfläche darboten und außerdem die Reichweite und damit die Helligkeit der Szintillationen um höchstens 20 Proz. herabsetzten.

[1]) R. Tomaschek, Ann. d. Phys. **65**, 198, 1921.

Dazu kommt, daß ja auch die Schicht der bei den Zählungen benutzten Schirme eine mittlere Dicke von einigen Kristalldurchmessern besaß. Zwei optisch inaktive Körner dagegen hatten normale Größe, so daß damit zu rechnen war, daß sich ein α-Teilchen in ihnen totlief, ohne eine Szintillation zu erzeugen. Der Fehler in der Zählung infolge solcher optisch inaktiver Beimengungen dürfte sich nach dem Gesagten auf etwa 0,4 Proz. belaufen.

Daß etwa dasselbe Körnchen optisch aktive und inaktive Stellen besitzen könnte, erscheint bei der Homogenität und der einheitlichen Kristallform des Materials wohl ausgeschlossen. Wir haben auch bei der Durchmusterung der einzelnen Körnchen keine Anzeichen hiervon gefunden. Auch die Tatsache, daß sich in phosphoreszierenden Kristallen bei starker Vergrößerung die Bahn eines α-Teilchens als feine leuchtende Linie erkennen läßt, spricht aufs stärkste gegen eine solche Möglichkeit [1]).

Zur Herstellung der Schirme sei folgendes bemerkt: Das Aufstäuben des ZnS mit Hilfe von sehr feinmaschigen Sieben auf die leicht eingefetteten oder mit dünnen Lacküberzügen versehenen Träger ergab ebenso wie die etwas umständliche Methode der Absetzung des in Alkohol aufgeschlämmten ZnS auf die Unterlage keine so guten Resultate, wie ein Verfahren, das wir als Gießverfahren bezeichnen. Die pulverige Masse wird in das stark verdünnte Bindemittel eingetragen, gut geschüttelt und schnell auf eine horizontal ausgerichtete und leicht mit Glycerin eingeriebene Glasplatte ausgegossen. Die ZnS-Kristalle sinken auf den Boden, reihen sich lückenlos aneinander und bilden nach erfolgter Trocknung einen dünnen Film, der sich leicht vom Glase abziehen läßt. Als Bindemittel wurde zunächst eine Reihe von Lacken ausprobiert, wie sie für Leuchtmassen Verwendung finden und die meist Kopal- oder Damarlack als wesentlichen Bestandteil enthalten, außerdem Zaponlack und eine Auflösung von Kanadabalsam in Xylol. Es zeigte sich aber bald, daß die so hergestellten Schirme die Erscheinung der Triboluminescenz in sehr störendem Maße aufwiesen. Mit zunehmendem Hartwerden der Lacke und dem dadurch bedingten Zerbrechen der Kristalle traten Szintillationen auf, ohne daß ein radioaktiver Körper zugegen war. Die Szintillationen zeichneten sich sogar durch eine besonders starke Helligkeit aus. Aus diesen Beobachtungen glauben wir schließen zu können, daß die in der Literatur immer wieder betonte, sogenannte

---

[1]) H. Herzfinkiel und L. Wertenstein, Journ. d. phys. et le Radium 1, 146, 1920; H. Geiger und A. Werner, ZS. f. Phys. 8, 191, 1922.

natürliche Aktivität von Zinksulfidschirmen in Wirklichkeit nicht auf radioaktive Beimengungen, sondern auf eine derartige Triboluminescenz zurückzuführen ist.

Aus diesem Grunde wurde von Lacken als Bindemittel ganz abgesehen und ausschließlich Stoffe wie Ricinusöl und Terpentinöl in stärkster Verdünnung als Bindemittel verwandt. Schirme, die in dieser Weise durch Aufgießen des Zinksulfids auf dünne Glimmerblättchen hergestellt waren, zeigten keine Triboluminescenz. So wurden bei dem für die meisten Zählungen benutzten Schirm auf einer Fläche von 5,3 mm² nur zwei Szintillationen in $1^1/_2$ Stunden beobachtet. Da es im Interesse eines leichten Zählens darauf ankam, ein Minimum der Schirmdicke zu erreichen, war es nicht ganz zu vermeiden, daß der Schirm an einigen Stellen eine winzige Lücke aufwies. Die von Kristallen freie Fläche wurde unter verschiedener Vergrößerung und bei wechselnder Beleuchtung sehr sorgfältig ermittelt und für die drei benutzten Schirme zu 0,0 Proz., 0,2 Proz. bzw. 1,4 Proz. der Gesamtfläche bestimmt. Mit dem letzten weniger günstigen Schirm wurden nur zwei Meßreihen ausgeführt.

7. Die Zählmethode. Die Zählungen beider Beobachter wurden durch elektrisch betätigte Kontaktschlüssel auf demselben Registrierstreifen eines mit drei Schreibhebeln versehenen Chronographen registriert. Der dritte Schreibhebel war an eine für elektrische Abnahme von Zeitmarken eingerichtete Pendeluhr angeschlossen. Alle von dem Beobachter *A* registrierten Szintillationen würden mit den von *B* registrierten zeitlich zusammenfallen, wenn es möglich wäre, fehlerlos zu zählen. Da aber längere Zählreihen auch für ein gesundes und gut ausgeruhtes Auge eine erhebliche Anstrengung bedeuten, die sich in Ermüdung und häufigem Blinzeln äußert, wird manche Szintillation übersehen. Man findet daher auf dem Registrierstreifen neben den für beide Beobachter koinzidierenden Szintillationsmarken auch solche, die zwar von *A*, aber nicht von *B* gesehen wurden, und umgekehrt. Bedeutet N die in einem größeren Zeitabschnitt tatsächlich auftretende Szintillationszahl und λ_1 die Wahrscheinlichkeit, daß der Beobachter *A* eine in seinem Gesichtsfeld erscheinende Szintillation auch wirklich sieht, so ist im Mittel $N_1 = \lambda_1 N$ die Zahl der Szintillationen, die von ihm in dem betrachteten Zeitraum registriert wird. Entsprechendes gilt für den Beobachter *B*, der $N_2 = \lambda_2 N$ Szintillationen verzeichnet. Von diesen fallen $C = \lambda_1 \lambda_2 N$ mit solchen Szintillationen zusammen, die auch von *A* gesehen wurden. Da aus dem Registrierstreifen N_1, N_2 und C entnommen werden können, so findet man für die Zahl N der in der betrachteten Zeitspanne wirklich

auftretenden Szintillationen: $N = \frac{N_1 N_2}{C}$. Diese Gleichung setzt voraus, daß C eine große Zahl ist, und daß jedes α-Teilchen eine gleich gut sichtbare Szintillation hervorruft.

Eine Zählreihe erstreckte sich in der Regel auf etwa 1000 Szintillationen. Vor Beginn mußten die Augen mindestens eine Viertelstunde im Dunkeln ausgeruht werden. Auch während der Versuche erwies es sich am vorteilhaftesten, nur etwa 1 bis 2 Minuten im Zusammenhang zu zählen und dann wieder eine Pause von etwa einer Minute einzuschalten. Die minutliche Szintillationszahl durfte 40 nicht erheblich überschreiten, da es sonst bei den infolge der statistischen Schwankungen oft auftretenden zeitlichen Häufungen von Szintillationen nicht mehr möglich war, mit der Registrierung nachzukommen. Andererseits wirkte es sehr ermüdend, wenn die Zahl der Szintillationen 20 pro Minute unterschritt. Durch geeignete Wahl von Rohrlänge und Diaphragmengröße konnte die minutliche Zahl von Szintillationen für jedes Präparat und für jeden Meßtag leicht innerhalb des gewünschten Bereichs gehalten werden. Nach Beendigung einer Zählreihe wurde aus dem Registrierstreifen N_1, N_2 und C entnommen und daraus N selbst nach obiger Gleichung berechnet. Diese Zahl dividiert durch die gesamte Meßdauer in Sekunden ergibt die wahre sekundliche Szintillationszahl.

Wie wichtig es ist, den persönlichen Fehler bei Szintillationszählungen auszuschalten, zeigen die folgenden Zahlen. Es waren von dem einen Beobachter (H. G.) im ganzen $N_1 = 23416$ Szintillationen, von dem zweiten (A. W.) $N_2 = 17207$ Szintillationen gezählt worden. Wir waren außerdem bei vielen Zählungen aufs beste durch Herrn Görke unterstützt worden; für ihn belief sich N_3 auf 14307. Dividiert man N_1, N_2, N_3 durch die nach obenstehender Gleichung berechneten N-Werte, nämlich 26487, 19017 bzw. 15598, so erhält man

$$\lambda_1 = 0{,}884,$$
$$\lambda_2 = 0{,}904,$$
$$\lambda_3 = 0{,}917,$$

das heißt also, daß die Beobachter 12 Proz., 10 Proz. bzw. 8 Proz. der auftretenden Szintillationen nicht registrierten. Es ist klar, daß durch eine hervorragende Optik, wie sie z. B. Rutherford und Chadwick[1]) für ihre Szintillationszählungen zur Verfügung stand, der persönliche Fehler wohl erheblich herabgedrückt werden könnte. Trotzdem kann die Sicherheit, welche die hier verwandte Doppelzählung bietet, niemals

[1]) E. Rutherford und J. Chadwick, Phil. Mag. 42, 809, 1921.

von einem einzelnen Beobachter erzielt werden. Wer jemals längere Zählreihen ausgeführt hat, weiß, wie schwer es oft ist, zu entscheiden, ob eine längere Pause im Auftreten der Szintillationen auf statistischen Schwankungen beruhte oder ob sie durch Überanstrengung des Auges vorgetäuscht war. Es ist auch gar nicht leicht, das Auge für längere Zeit genügend genau in der Sehachse des Mikroskops zu halten.

8. Ergebnisse. Die in Tabelle 1 zusammengestellten Zählungen sind der Übersichtlichkeit halber in fünf Serien geteilt, von denen sich Serie 1 und 3 auf das 300-cm-Rohr, Serie 2 und 4 auf das 120-cm-Rohr und Serie 5 auf das 50-cm-Rohr beziehen. Sämtliche nach Beendigung der Vorversuche durchgeführten Zählreihen sind in die Tabelle aufgenommen.

Tabelle 1.

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Versuchsserie	Zählreihe	Präparat	Gehalt in Millicurie	Strahlung	Diaphragma Durchmesser in mm	Sz-Zahl	$\frac{Sz\text{-Zahl}}{\text{Zeit in Sek.}}$	$\gamma \cdot 10^{-10}$	Mittelwert $\gamma \cdot 10^{-10}$
I	1	*K*	3,534	Ra C′	0,727	714	0,404	3,258	
300-cm-	2	*K*	2,901	„	0,727	486	0,326	3,203	
Rohr	8	*L*	0,891	Em, A, C′	1,036	1078	0,686	3,612	
	9	*L*	0,755	„	1,036	1021	0,527	3,271	3,326
	12	*M*	7,242	Ra C′	0,636	1200	0,625	3,216	
	13	*M*	5,932	„	0,636	1031	0,524	3,293	
	14	*N*	5,115	„	0,519	998	0,302	3,350	
II	3	*K*	2,020	Ra C′	0,519	977	0,780	3,626	
120-cm-	4	*K*	1,695	„	0,519	1013	0,594	3,293	
Rohr	5	*K*	0,830	„	0,636	1019	0,440	3,315	
	6	*K*	0,696	„	0,727	1041	0,478	3,283	3,341
	7	*K*	0,641	„	0,727	1038	0,458	3,233	
	10	*L*	0,622	„	0,727	983	0,432	3,310	
III	15	*N*	4,179	Ra C′	0,636	612	0,369	3,336	
300-cm-	16	*O*	3,328	„	0,727	971	0,402	3,441	
Rohr	17	*O*	2,813	„	0,727	940	0,347	3,524	
	18	*O*	1,933	Em, A, C′	0,636	977	0,527	3,413	3,423
	19	*O*	1,650	„	0,636	1076	0,430	3,260	
	20	*O*	1,347	„	0,727	1069	0,498	3,540	
IV	11	*L*	0,428	Em, A, C′	0,519	1073	0,448	3,275	
120-cm-	21	*O*	1,125	Ra C	0,519	952	0,414	3,462	
Rohr	22	*O*	0,937	„	0,636	1031	0,479	3,197	
	23	*O*	0,546	Em, A, C	0,519	1071	0,580	3,349	3,361
	24	*O*	0,462	„	0,519	1046	0,531	3,624	
	25	*O*	0,380	„	0,519	974	0,392	3,261	
V	26	*O*	0,2255	Ra C	0,519	1076	0,393	3,271	
50-cm-	27	*O*	0,1538	„	0,636	1004	0,427	3,439	
Rohr	28	*O*	0,1082	Em, A, C	0,519	1039	0,549	3,160	
	29	*O*	0,0890	„	0,519	1027	0,478	3,314	3,364
	30	*O*	0,0750	„	0,519	956	0,417	3,467	
	31	*P*	0,0627	„	0,636	1058	0,533	3,541	

In den Spalten 3 und 4 sind Bezeichnung des Präparats sowie Gehalt in Millicurie, bezogen auf die mittlere Zeit der Zählung, eingetragen. An den Zahlen der Spalte 4 ist bereits eine Korrektion angebracht, die dem Umstand Rechnung trägt, daß die in der Platinkapillare des Trichterchens befindliche Emanation zwar bei der Gehaltsbestimmung mitgemessen wird, aber zur α-Strahlung nichts beiträgt. Diese Korrektion blieb bei allen Präparaten unter 1 Proz. bis auf Präparat *L*, bei dem an der Abschmelzstelle ein kleiner emanationserfüllter Hohlraum im Glas entstanden war.

Aus Spalte 5 ist ersichtlich, ob die Zählungen an Radium C′ allein oder an Ra Em + Ra A + Ra C′ ausgeführt wurden. Im ersten Falle betrug das Luftäquivalent der zwischen radioaktiver Substanz und Zinksulfidschirm eingeschalteten Glimmerschicht 4,9 cm, im zweiten Falle 2,2 cm.

Spalte 7 enthält die nach Ziffer 7 ermittelte Zahl aller Szintillationen, die während der ganzen Versuchsdauer aufgetreten waren. Das Verhältnis dieser Zahl zu der Versuchsdauer in Sekunden ist in Spalte 8 eingetragen.

Schließlich findet man in Spalte 9 die aus jeder Zählreihe ermittelte Zahl Z von α-Teilchen, welche 1 g Radium in jeder Sekunde emittiert. Bei den in Spalte 10 verzeichneten Mittelwerten sind die einzelnen Zählreihen proportional der Zahl der beobachteten Szintillationen bewertet.

Tabelle 2 enthält die Zusammenfassung der Ergebnisse aller fünf Versuchsserien und bedarf keiner weiteren Erläuterung. Das Hauptmittel beträgt $3{,}362 \cdot 10^{10}$ und ist auf $3{,}40 \cdot 10^{10}$ aufgerundet, was später begründet wird.

Tabelle 2.

Versuchsserie	Rohrlänge	Szintillationszahl N	$Z \cdot 10^{-10}$	Hauptmittel
I	300 cm	6528	3,326	$3{,}362 \cdot 10^{10}$
II	120 „	6071	3,342	erhöht nach
III	300 „	5645	3,423	Abschnitt 10
IV	120 „	6147	3,361	auf $3{,}40 \cdot 10^{10}$
V	50 „	6160	3,364	
		Summe: 30 551		

9. Fehlermöglichkeiten. Alle Einwände, welche gegen die Szintillationsmethode an sich erhoben werden könnten, wurden bereits in Abschnitt 6 und 7 widerlegt. Es bleibt hier nur noch zu zeigen, inwieweit der endgültige Wert von Z anderweitig beeinflußt sein kann:

a) Entfernung von Präparat zum Diaphragma. Gemessen wurde stets die Entfernung zwischen Schwerpunkt des Trichterchens und der Seite des Diaphragmas, nach der hin sich die konische Bohrung verjüngte. Diese Seite war auch stets dem Präparat zugewandt. Die Entfernung ließ sich auch beim kürzesten Rohr so genau messen, daß der hiervon herrührende Fehler von Z höchstens 0,2 Proz. beträgt.

b) Diaphragmendurchmesser. Durch die bereits in Abschnitt 2 zahlenmäßig angegebenen Fehlergrenzen bei der Durchmesserbestimmung wird das Resultat bei den Zählungen mit dem kleinsten Diaphragma um etwa $+$ 0,8 Proz., bei allen übrigen um etwa $\pm$ 0,4 Proz. beeinflußt. Es dürfte zurzeit nicht möglich sein, die Meßgenauigkeit in dieser Richtung zu steigern.

c) Gehaltsbestimmung der Emanationstrichterchen. Der nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnete mittlere Fehler in den Gehaltsbestimmungen betrug $\pm$ 0,25 Proz. Hierzu kommen noch Fehler untergeordneter Größe, welche durch die Extrapolation auf den Meßtag, durch die Korrektion für den toten Raum und durch die Zerstreuung der γ-Strahlen im Messingtrichterchen bedingt sind (vgl. Abschnitt 5). Im ganzen dürften die Gehaltsbestimmungen auf $+$ 0,3 Proz. richtig sein.

d) Zerstreuung der α-Strahlen. Wesentlich war die Feststellung, ob eine etwa vorhandene Zerstreuung der α-Strahlen durch die im Rohr befindlichen Gasreste die Zählungen beeinflußt haben konnte. Von vornherein war dies wenig wahrscheinlich, da bei den Zählungen der Gasdruck im Rohr stets unter $^1/_{100}$ mm, meist sogar unter $^1/_{1000}$ mm Hg lag. Trotzdem schien ein besonderer Versuch geboten: das auf das Diaphragma zulaufende Strahlenbündel wurde durch ein Aluminiumscheibchen von 1 cm Durchmesser abgeblendet, das mit zwei Glasfäden auf der in der Mitte des Rohres befindlichen Blende befestigt war. Die α-Strahlen konnten jetzt nur mehr auf dem Umwege durch den zwischen Aluminiumscheibchen und Blende verbleibenden ringförmigen Zwischenraum von 1 cm Breite zum Schirm gelangen. In der Tat verschwanden bei tiefem Druck nunmehr alle Szintillationen und erschienen erst wieder in merklicher Zahl, wenn der Gasdruck im Rohr auf einige Zehntel Millimeter gesteigert wurde. Der Versuch zeigt, daß die Zerstreuung der α-Strahlen in den Gasresten jedenfalls keine erhebliche Rolle spielt, er beweist außerdem, daß eine störende Reflexion von α-Strahlen an den Rohrwänden oder an den Rändern der Blenden nicht stattfand.

Wie gering die Zerstreuung war, geht auch daraus hervor, daß der Bereich, innerhalb dessen auf dem Zinksulfidschirm Szintillationen auftraten, nur ganz wenig größer war, als bei völlig geradliniger Ausbreitung der α-Strahlen zu erwarten war. Nur unter 50 bis 100 Szintillationen wurde eine bemerkt, die aus dem geometrisch bestimmten Bereich deutlich herausfiel. Noch ein gut Teil geringer war die Wahrscheinlichkeit, daß ein α-Teilchen ganz aus dem Gesichtsfeld herausgestreut wurde und so der Zählung entging. Eine Korrektion von 0,6 Proz. dürfte diesem Fehler gerecht werden.

Die Zerstreuung der Strahlen in den Glimmerschichten von Präparat und Eintrittsfenster F kommt deshalb nicht in Betracht, weil diese Schichten der strahlenden Substanz sehr nahe liegen und der mittlere Streuungswinkel in einer Glimmerschicht von 1 cm Luftäquivalent erheblich unter 1° liegt [1]).

e) Absorption. Zahlreiche Versuche haben gezeigt, daß die Geschwindigkeit der α-Strahlen beim Durchgang durch Luft oder durch dünne Folien allmählich abnimmt, daß sich aber ihre Zahl dabei nicht ändert. Erst in den letzten 4 bis 5 mm der Reichweite nimmt auch die Zahl der Teilchen ab [2]). Daß die vorliegenden Versuche nicht durch Absorption der Strahlen in dem Glimmer oder an der inneren Trichterwandung merklich getrübt sein können, zeigt am besten ein Vergleich der Messungen an RaEm + RaA + RaC′ mit denen an RaC′ allein, wo durch Einschalten eines Glimmerblattes die α-Strahlen von Emanation und RaA zurückgehalten waren. Nach der einfachen Zerfallstheorie müßte die Zahl der aus dem Trichterchen austretenden α-Teilchen im ersten Fall dreimal so groß sein als im zweiten [3]). Jede Absorption im Glimmer müßte dieses Verhältnis stören, da die mittlere Reichweite der α-Strahlen von Em + A + C′ beim Austritt aus dem Trichterchen 4,2 cm, die der Strahlen von RaC′ allein 5,9 cm betrug. Auch würde es sich bemerkbar machen, wenn ein Teil der Strahlen an der Trichterwandung selbst infolge ungenügender Politur der Fläche absorbiert würde. Denn RaC′ haftet als fester Körper an der Trichterwandung und der Innenseite des Glimmers, während die Emanation und wahrscheinlich auch RaA wegen seiner Kurzlebigkeit sich in gasförmigem Zustande befinden.

Im ganzen wurden an Em + A + C′ 13 468 Szintillationen, an RaC′ allein 17 086 Szintillationen gezählt. Alle Messungen an Em + A + C′

---

[1]) H. Geiger, Proc. Roy. Soc. (A) **83**, 492, 1910.

[2]) Lit. s. E. Rutherford, Radioaktivität, deutsche Ausgabe, S. 118; ferner W. Makower, Phil. Mag. **32**, 222, 1916.

[3]) Vgl. hierzu Fußnote 1, S. 191.

zusammengefaßt, führten auf $Z = 3{,}39 \cdot 10^{10}$, alle Messungen an RaC′ allein auf $3{,}34 \cdot 10^{10}$. Die Abweichungen beider Zahlen vom Mittelwert liegen innerhalb der durch die statistischen Schwankungen bedingten Fehlergrenzen (vgl. unter f). Wenn man die ganze Differenz zwischen den beiden Z-Werten auf Absorption zurückführen wollte, was aber sehr willkürlich wäre, müßte der endgültige Z-Wert um 1 Proz. vergrößert werden.

f) Statistische Schwankungen. Da es sich bei der Emission der α-Strahlen um völlig voneinander unabhängige Einzelvorgänge handelt, ist die Zahl N der in einem beliebigen Zeitabschnitt beobachteten Szintillationen mit einem mittleren Fehler von der Größe $+\sqrt{N}$ behaftet. Bei einer Zählreihe von 1000 Szintillationen beträgt also der Fehler infolge der statistischen Schwankungen +3,2 Proz. Der endgültige Z-Wert, der sich auf 30551 Szintillationen stützt, wird dagegen durch die statistischen Schwankungen theoretisch im Mittel nur um +0,57 Proz. beeinflußt [1]). Andererseits berechnet sich aus den experimentellen Resultaten der mittlere Fehler einer einzelnen Zählreihe von etwa 1000 Szintillationen zu ± 4,1 Proz., der des endgültigen Mittelwertes zu ± 0,72 Proz. Wie zu erwarten war, sind die theoretischen mittleren Fehler erheblich kleiner als die wirklichen mittleren Fehler, da diese ja außer den statistischen Schwankungen auch alle anderen Versuchsfehler mit einbegreifen.

10. Der endgültige Z-Wert. Der Mittelwert aller Messungen (Tabelle 2) ist wegen der optisch inaktiven Einschlüsse im Zinksulfid (Abschnitt 6) um 0,4 Proz. und wegen der Zerstreuung der Strahlen (Abschnitt 9d) um 0,6 Proz. zu erhöhen. Damit wird $Z = 3{,}40 \cdot 10^{10}$. Für diese Zahl möchten wir als untere Meßfehlergrenze −0,8 Proz., als obere Grenze +2 Proz. angeben. Die höhere positive Fehlergrenze scheint uns deshalb geboten, weil immerhin die Möglichkeit besteht, daß der in Abschnitt 9e besprochene Unterschied in den Meßreihen mit Em + RaA + RaC′ einerseits und RaC′ andererseits auf Absorption von Strahlen zurückzuführen ist.

11. Zusammenfassung und Schlußbetrachtung. Die Zahl der α-Teilchen, welche ein Gramm Radium (ohne Zerfallsprodukte) in

[1]) Will man in diese Fehlerberechnung auch die Schwankungen, welche durch die unvollkommene Zählung der beiden Beobachter entstehen, mit einbeziehen, so gilt, wie Herr Bothe freundlicherweise für uns berechnet hat, für den mittleren Fehler der genauere Ausdruck $\sqrt{N + N\left(\frac{N}{N_1} - 1\right)\left(\frac{N}{N_2} - 1\right)}$, in dem N, N_1 und N_2 den Bezeichnungen in Abschnitt 7 entsprechen. Der numerische Unterschied des nach dieser Gleichung berechneten Fehlers gegenüber der im Text angegebenen Zahl ist gering.

jeder Sekunde emittiert, beträgt auf Grund der vorliegenden Szintillationszählungen

$$Z = 3{,}40 \cdot 10^{10}.$$

Dabei wurde unter weitgehender Variation der Versuchsbedingungen ein Doppelzählverfahren (Abschnitt 7) angewandt, durch das alle subjektiven Fehler ausgeschaltet wurden, welche durch Ermüdung und Unsicherheit des Auges entstehen konnten. Auch wurde durch besondere Versuche (Abschnitt 6) erwiesen, daß das Resultat nicht durch Unvollkommenheiten des Zinksulfidschirmes beeinflußt sein konnte. Alle übrigen Fehlermöglichkeiten sind in Abschnitt 9 eingehend besprochen.

Vergleicht man den von uns gefundenen Wert mit der ersten Zählung von Rutherford und Geiger ($3{,}57 \cdot 10^{10}$), so ist zu berücksichtigen, daß es sich damals um die ersten grundlegenden Versuche dieser Art handelte. Ein einheitlicher Radiumstandard existierte damals noch nicht, auch waren die Meßmethoden und die Verfahren zur Herstellung starker Präparate noch im Stadium der Entwicklung. Nicht ohne weiteres kann dagegen der viel erheblichere Unterschied unserer Zahl gegenüber dem Hess-Lawsonschen Wert ($3{,}72 \cdot 10^{10}$) erklärt werden, da es sich hierbei um eine zehn Jahre später und mit beträchtlichen Hilfsmitteln ausgeführte Arbeit handelt. Vielleicht hat die ungenügende Schärfe der Elektrometerausschläge (vgl. die Photographie Wien. Ber. **127**, 463, 1918) dazu geführt, daß kleine, durch sekundäre Einflüsse hervorgerufene Schwankungen als Strahlen mitgezählt wurden. In dieser Vermutung wird man bestärkt durch die Unstimmigkeiten, die sich bei der Zählung durch verschiedene Beobachter ergaben, und die erst nach längerer Übung behoben werden konnten.

Unter Zugrundelegung unserer Zahl und des Millikanschen Wertes für das Elementarquant berechnet sich die Halbwertszeit des Radiums zu 1730 Jahren, die Heliumentwicklung zu 159 mm^3 pro Jahr und pro Gramm Ra im Gleichgewicht mit Em + A + C′; schließlich findet man für die Wärmeentwicklung des von seinen Zerfallsprodukten befreiten Radiums 22,25 cal/Stunde pro Gramm Ra. Dabei ist für die Geschwindigkeit der α-Strahlen des Radiums der experimentell sehr gut begründete Wert $1{,}511 \cdot 10^9$ cm/sec benutzt [1]). Vergleicht man die rechnerisch gefundene Wärmeentwicklung mit den untereinander gut übereinstimmenden experimentellen Werten von Hess [2]) und

[1]) H. Geiger, ZS. f. Phys. 8, 45, 1921.
[2]) V. F. Hess, Wien. Ber. **121** [2a], 1419, 1912.

Rutherford[1]) (25,2 und 25,1 g-cal/Stunde), so kann kaum mehr ein Zweifel bestehen, daß bei der radioaktiven Umwandlung des Radiumatoms außer der kinetischen Energie des α-Teilchens und des Rückstoßatoms weitere Energie als Folge der im Atomkern vor sich gehenden Umlagerungen in Freiheit gesetzt wird[2]). Auf diese Fragen wird an anderer Stelle noch näher eingegangen werden.

Es ist beabsichtigt, die hier gefundene Zahl zunächst durch Zählungen nach der elektrischen Methode weiter zu stützen, um dann auf Grund von Ladungsmessungen einen von dem Millikanschen Meßverfahren völlig unabhängigen Wert für das Elementarquant zu gewinnen.

---

[1]) E. Rutherford und H. Robinson, Wien. Ber. **121** [2a], 1491, 1912.
[2]) Siehe auch E. Rutherford und H. Robinson, Wien. Ber. **122** [2a], 1855, 1913.

Kraft und Feld an der Kathode einer elektrischen Glimmentladung.

Von **Werner Braunbek** in Stuttgart[1]).

Mit 11 Abbildungen. (Eingegangen am 7. Dezember 1923.)

1. Einleitung.

Bei der Glimmentladung in verdünnten Gasen besteht bekanntlich an der Kathode infolge der vorgelagerten positiven Raumladung des negativen Glimmlichtes eine besonders hohe Feldstärke. Diese müßte verbunden sein mit einer entsprechenden mechanischen Kraftwirkung auf die Kathode. Nun entstehen aber durch die Entladungsvorgänge Gasströmungen, die ihrerseits Kräfte auf die Kathode ausüben und so die Kraftwirkung des elektrischen Feldes in unübersichtlicher Weise verdecken.

Die Bedingungen für das Zustandekommen bzw. Nichtzustandekommen der störenden Gasströmungen sind noch sehr wenig untersucht. Die einzige Arbeit über die mechanischen Kräfte bei der Glimmentladung, die mir bekannt ist, stammt von Herrn Warburg[2]), der für verschiedene Gase und Elektroden die Kraft an der Kathode gemessen hat und daraus nun die Feldstärke an der Kathode und andere elektrische Größen berechnet, aber dabei nach einer abschätzenden Überlegung den Einfluß der Gasströmungen vernachlässigt.

Einige gelegentliche Beobachtungen, die Herr Professor Regener über die Kraft an freien Elektroden machte, wurden für mich die Veranlassung, diese Kraft und insbesondere ihren Zusammenhang mit den aerodynamischen Kräften der Gasströmungen nochmals näher zu untersuchen.

Die Kraft pro Flächeneinheit an der Oberfläche eines Leiters gegen ein Medium von der Dielektrizitätskonstante 1 ist ja mit der elektrischen Feldstärke E an dieser Oberfläche durch die Beziehung verknüpft:

$$K = \frac{E^2}{8\pi}. \qquad (1)$$

---

[1]) Auszug aus der Diplomarbeit.

[2]) E. Warburg, Wied. Ann. **45**, 1, 1892.

Man kann daher die elektrische Feldstärke an der Kathode direkt aus der auf die Kathode ausgeübten Gesamtkraft bestimmen, wenn nur zwei Bedingungen möglichst streng erfüllt sind, wenn nämlich:

1. das Feld über die ganze (einseitige) Kathodenfläche homogen ist, und

2. auf die Kathode außer dem elektrischen Feld E keinerlei andere Kräfte wirken.

Die erste Bedingung kann man bei einer ebenen Kathode ziemlich gut experimentell erfüllen, und zwar um so besser, je größer die Fläche ist, da dann die störenden Randeinflüsse weniger ins Gewicht fallen. Ein Kriterium für die Homogenität des Feldes liefert die Parallelität der Glimmlichtgrenze mit der Kathodenfläche.

Die zweite Bedingung ist jedoch, wie schon erwähnt, im allgemeinen nicht erfüllt, da die Entladungsvorgänge von Gasströmungen begleitet sind, die aerodynamische Kräfte auf die Kathode ausüben und so den eigentlichen elektrischen Effekt weithin verdecken.

Da die Entstehung dieser Gasströmungen auch bei Warburg diskutiert ist, und da ihre Wirkung besonders von den geometrischen Verhältnissen der Elektroden und ihrer Umgebung abhängt, so soll zum Vergleich mit der vorliegenden Arbeit auch das Wesentliche der Warburgschen Versuchsanordnung hier kurz angeführt werden.

Die Anordnung ist durch Fig. 1 schematisch wiedergegeben.

Die kreisförmige Kathode K (20 bis 30 mm Durchmesser) hing auf der einen Seite einer Wage. Ihr gegenüber befand sich die Anode A. Um an der Kathode nun nach oben gehende Kraftlinien zu verhindern und die nach unten gehenden möglichst in die gewünschte, zur Kathodenfläche senkrechte Richtung zu drängen, war die Kathode mit einer zylinderförmigen, oben bis auf ein kleines Loch verschlossenen metallischen Hülse H umgeben, die auf das Potential der Kathode gebracht war. Der Luftspalt zwischen Kathode und Hülse betrug zwischen 2 und 4 mm.

Die ganze Anordnung befand sich in einem Rezipienten, der bei den verschiedenen Versuchen auf 0,5 bis 2 mm evakuiert war. Warburg untersuchte mit verschiedenen Elektroden in verschiedenen Gasen die Kraft in Abhängigkeit von Druck und Stromdichte, und fand insbesondere bei konstantem Druck Proportionalität zwischen Kraftdichte und Stromdichte.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit war nun, die Wirkung der im Entladungsgefäß entstehenden Gasströmungen auf die Kathode zu untersuchen, insbesondere mit dem Ziel, eine Versuchsanordnung zu finden, die unter vollständiger Elimination der aerodynamischen

Wirkungen gestattet, die reine elektrische Kraft zu messen, und endlich, wenigstens für ein bestimmtes Elektrodenmaterial und ein bestimmtes Gas (Kupfer–Luft), die quantitative Abhängigkeit der Kraft, und damit der Feldstärke an der Kathode, von Druck und Stromdichte zu ermitteln.

2. Diskussion des elektrisch-mechanischen Problems.

Bei einer selbständigen Entladung ist in nächster Nachbarschaft der Kathode, im Hittorfschen Dunkelraum, ein sehr steiler Potentialverlauf vorhanden, und dem Übergang dieses Potentialverlaufes in den flachen des Faradayschen Dunkelraumes entspricht nach der Poissonschen Gleichung eine positive Raumladung an der „Knickstelle“ im negativen Glimmlicht.

Die verhältnismäßig hohe Kraft an der Kathode kann einerseits als Wirkung der großen Feldstärke, in einer anderen Betrachtungs-

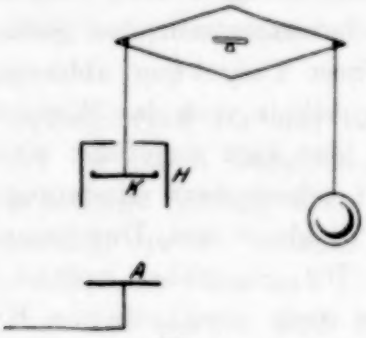


Fig. 1.

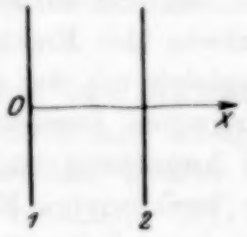


Fig. 2.

weise aber auch als die Anziehung der vorgelagerten positiven Raumladung aufgefaßt werden. Diese Anziehung ist natürlich wechselseitig, und mit derselben Kraft, mit der die Raumladung die Kathode, zieht auch die Kathode die Raumladung an. Könnten die positiven Ionen, aus denen die Raumladung besteht, durch die Anziehung der Kathode frei beschleunigt werden, so würden sie, wie sich leicht einsehen läßt, durch ihren Aufprall auf die Kathode die Anziehung, die diese von der Raumladung erfährt, gerade aufheben.

Die Ionen bewegen sich aber nun in Gasen von der hier vorliegenden Dichte nicht beschleunigt, sondern gleichförmig; sie übertragen also die ganze auf sie wirkende Kraft durch „Reibung“, d. h. durch fortwährende Zusammenstöße mit den Gasmolekülen, auf das Gas

Da bei den herrschenden Drucken die Vorgänge noch nicht molekularkinetisch aufgelöst zu werden brauchen, sondern noch vom

Kontinuumstandpunkt aus betrachtet werden dürfen, so kann man sagen, es wirkt auf das Gas eine Volumkraft:

$$\mathfrak{B} = \varrho \mathfrak{E},$$

wenn ϱ die Raumladungsdichte und $\mathfrak{E}$ die elektrische Feldstärke ist. Diese Volumkraft wird entweder zu einem Gleichgewichtszustand führen, der durch ein Druckgefälle im Gas charakterisiert ist, oder, wenn ein solches Gleichgewicht nicht möglich ist, zu Strömungsvorgängen.

Im Falle des Gleichgewichtes müßte

$$\mathfrak{B} = \operatorname{grad} p \qquad (p \text{ Gasdruck})$$

sein. Die Bedingung für das Gleichgewicht ist somit:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} = 0$$

oder:

$$\operatorname{rot}(\varrho \mathfrak{E}) = \varrho \operatorname{rot} \mathfrak{E} - [\mathfrak{E}, \operatorname{grad} \varrho] = 0 \qquad [\mathfrak{E}, \operatorname{grad} \varrho] = 0$$

oder auch, wenn V das Potential bedeutet:

$$[\operatorname{grad} V, \operatorname{grad}(\Delta V)] = 0. \tag{2}$$

Gleichgewicht tritt also dann auf, wenn Feldstärke und Ladungsgradient überall dieselbe Richtung haben, oder wenn die Niveauflächen von V und ΔV identisch sind. Im anderen Falle tritt eine wirbelhafte Strömung auf, da ja $\operatorname{rot} \mathfrak{B} \neq 0$ ist.

Im folgenden sind einige prinzipiell interessante Elektrodenanordnungen behandelt.

a) Unendliche planparallele Elektroden. Der einfachste Fall besteht in unendlich ausgedehnten parallelen Platten als Elektroden (Fig. 2).

Es ist hier:

$$\varrho = \frac{1}{4\pi} \frac{d\mathfrak{E}}{dx}, \qquad \mathfrak{B} = \varrho \mathfrak{E} = \frac{1}{4\pi} \mathfrak{E} \frac{d\mathfrak{E}}{dx},$$

$$p_2 - p_1 = \int_1^2 \mathfrak{B}\, dx = \frac{1}{4\pi} \int_1^2 \mathfrak{E}\, d\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{E}_2^2}{8\pi} - \frac{\mathfrak{E}_1^2}{8\pi}.$$

Die Ausdrücke $\frac{\mathfrak{E}_1^2}{8\pi}$ und $\frac{\mathfrak{E}_2^2}{8\pi}$ sind aber gerade die elektrischen Anziehungen K_1 und K_2. Es ist also:

$$p_2 - K_2 = p_1 - K_1,$$

d. h., obwohl die elektrischen Anziehungen an Kathode und Anode verschieden sind, sind die Gesamtkräfte, die sich aus elektrischen Anziehungen und aerostatischen Druckkräften zusammensetzen, genau gleich. Dies folgt natürlich auch aus dem Energieprinzip, bzw. dem

Schwerpunktssatz oder dem Prinzip der virtuellen Arbeit, angewandt auf das ganze System.

Als Spezialfall kann man die Anode ins Unendliche rücken lassen; es muß dann fürs Unendliche p gegen p_∞, ϱ, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{V}$ gegen Null konvergieren. Für die unendlich ausgedehnte Kathode (Index 0) hat man dann:

$$p_x - p_0 = \frac{1}{4\pi}\int_0^{\mathfrak{E}} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{E} = -\frac{\mathfrak{E}_0^2}{8\pi}, \qquad p_0 = p_\infty + \frac{\mathfrak{E}_0^2}{8\pi}. \tag{3}$$

Der Druck rechts (p_0) ist um so viel größer als der Druck links (der $= p_\infty$ ist), wie die elektrische Anziehung nach rechts pro Quadratzentimeter beträgt. Die Gesamtkraft ist Null. Der Druckverlauf ist durch Fig. 3 schematisch angegeben.

Der Fall der unendlich entfernten Anode ist insofern von praktischer Bedeutung, als bei einer wirklichen Glimmentladung nur in unmittelbarer Nähe der Kathode große Werte von ϱ, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{V}$ auftreten. Der Einfluß der Anode und der positiven Säule (die sich außerdem noch schwächen) auf die Kathode kann meist gegen den Einfluß der positiven Raumladung vernachlässigt werden; es macht sehr wenig aus, ob die Anode in unendlicher oder in nicht zu kleiner endlicher Entfernung sich befindet. Durch Weglassen des Anodeneinflusses gewinnen aber die Verhältnisse an Übersichtlichkeit, und es sollen daher die folgenden Fälle alle für den Grenzfall einer unendlich entfernten Anode betrachtet werden.

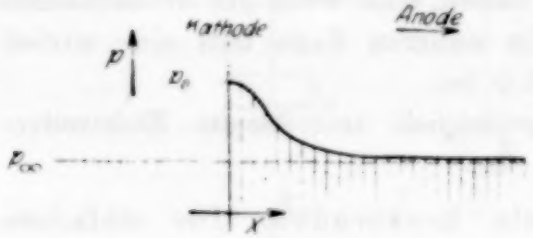


Fig. 3.

b) Begrenzte freie Elektrode. Sind die Elektroden nicht unendlich ausgedehnt, so ist die Gleichgewichtsbedingung sicher nicht erfüllt. Es treten also Gasströmungen auf, über deren Verlauf und Wirkung sich natürlich nur qualitativ etwas aussagen läßt.

Betrachtet man zunächst eine ganz freie Elektrode von so großer Fläche, daß die Schichtdicke der positiven Raumladung (im wesentlichen die Dicke des Hittorfschen Dunkelraumes und negativen Glimmlichts) klein gegen die Elektrodendimensionen ist, so ist sicher in den mittleren Teilen der Elektrode annähernd dieselbe Druckverteilung wie bei einer unendlich ausgedehnten Elektrode vorhanden. In den Randteilen wird dagegen das Gas seitlich abströmen und durch einen axialen Zustrom zur Mitte wieder ersetzt werden, wie es durch Fig. 4 veranschaulicht wird. (Der schraffierte Teil ist die

positive Raumladung.) Daneben ist ein Druckdiagramm der Kathodenfläche gezeichnet, in dem die gestrichelte Linie den Druck im Fall der unendlichen Kathode bedeutet.

Der mittlere Druck auf die Kathode ist also jedenfalls kleiner als im Fall unendlicher Elektroden, da am Rand ein Druckausgleich durch Strömung stattfindet. Um wieviel er kleiner ist, läßt sich nur durch den Versuch entscheiden. Um diesen Differenzbetrag aber wird nun die elektrische Anziehung, die im Fall unendlicher Elektroden den Druck gerade kompensierte, die aerodynamische Druckwirkung überwiegen. Es wird also an einer freien Kathode ein Bruchteil

$$\left(1-\frac{p'}{p}\right)\frac{E^2}{8\pi} \tag{4}$$

der wirklichen elektrischen Anziehung als Kraft auftreten, wenn p' den Überdruck auf die begrenzte Elektrode, p denjenigen auf ein gleich großes Stück der unbegrenzten bedeutet.

Warburg schätzt den Bruchteil $\left(1-\frac{p'}{p}\right)$ auf sehr nahe 1, die hier durchgeführten Überlegungen machen aber einen sehr viel

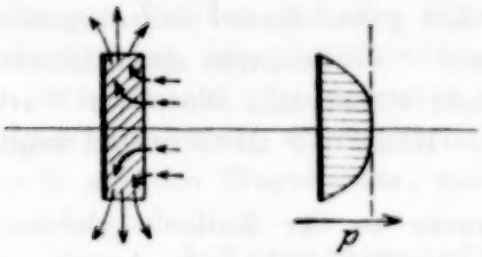


Fig. 4.

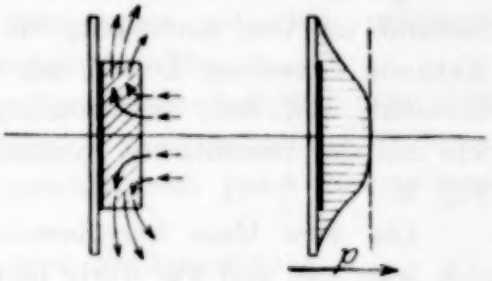


Fig. 5.

kleineren Wert wahrscheinlich, da sicher p' noch einen ziemlich großen Bruchteil von p ausmachen kann. Von den Versuchsergebnissen sei hier vorausgenommen, daß an einer freien Elektrode tatsächlich p' noch etwa 90 Proz. von p war, also $\left(1-\frac{p'}{p}\right)$ von der Größenordnung 0,1.

Etwas anders liegen die Verhältnisse, wenn, wie es bei meinen ersten Versuchen der Fall war, die metallische Kathodenfläche auf einer isolierenden Unterlage liegt, die noch wesentlich über den Rand der eigentlichen Kathode herausragt. Die entsprechende Strömung und Druckverteilung zeigt Fig. 5.

Der Unterschied gegen Fig. 4 ist der, daß die seitlichen Gasströmungen nur nach rückwärts ausweichen können, und so auf das System Isolator–Kathode ein vermehrter Druck ausgeübt wird. Dieses läßt sich auch so deuten, daß jetzt die Druckverteilung über den

Rand der Kathode hinausgreift und auch noch auf die umgebenden Teile der isolierenden Unterlage wirkt. Wenn also schon der Fall Fig. 4 keinen großen Unterschied gegen den Fall unendlicher Elektroden zeigte, so ist zu erwarten, daß Fig. 5 sich diesem Fall noch mehr nähert. Tatsächlich ergaben die auf Unterlagen geklebten Kathoden für $\left(1-\frac{p'}{p}\right)$ Werte zwischen 0,05 und $-0{,}02$. Es scheint, als ob hier Druck und elektrische Anziehung sich annähernd kompensieren und je nach kleinen zufälligen Ursachen einmal der Druck, ein andermal die Anziehung ein klein wenig überwiegt.

c) Begrenzte Elektrode im „Käfig". Der vorige Abschnitt zeigt, daß zur Messung der elektrischen Anziehung eine freie Elektrode durchaus ungeeignet ist. Um diese Anziehung messen zu können, muß der Druck auf die Vorderfläche der Kathode eliminiert werden, und dies kann nur dadurch geschehen, daß man auf ihre Rückseite denselben Druck wirken läßt. Umgibt man nämlich die Elektrode mit einer zylindrischen Röhre, dem Käfig, in dem sie sich mit geringem Luftspalt bewegen kann, und schließt diese Röhre auf der der Entladung abgewandten Seite ab, so muß sich ein statischer Gleichgewichtszustand im Gas einstellen, bei dem der ganze Raum links von der Kathode denselben Druck hat, der an der Vorderfläche der Kathode herrscht, und der, da Strömungen nicht stattfinden, denselben Wert wie bei der unendlichen Kathode hat. Käfig und Druckverlauf zeigt Fig. 6.

Die vom Gase herrührenden Drucke an der Kathode gleichen sich jetzt aus, und was übrig bleibt, ist die reine elektrische Anziehung $\frac{E^2}{8\pi}$. Das Äquivalent dieser Anziehung, das ja nach dem Schwerpunktssatz irgendwo in dem System vorhanden sein muß, ist die Druckdifferenz an der Abschlußwand des Käfigs.

Natürlich stellt sich der beschriebene Gleichgewichtszustand nicht momentan ein, aber selbst bei den Verhältnissen meiner Versuchsanordnung, bei der der Raum auf der Rückseite der Kathode mehrere Liter groß war, ergeben sich aus einer theoretischen Abschätzung für die Einstellungsdauer kleine Bruchteile einer Sekunde.

d) Warburgsche Anordnung. Die von Warburg benutzte Anordnung unterscheidet sich infolge der zu elektrostatischer Schutzwirkung angebrachten Metallbüchse nur sehr wenig von der Käfiganordnung, nämlich nur durch das kleine Loch in der Abschlußwand. Gerade dieses Loch macht aber ein statisches Gleichgewicht unmöglich. Es tritt eine Strömung durch den ringförmigen Spalt an der Kathode

und durch das Loch auf, die im wesentlichen einen Drucksprung Δp_1 an der Kathode und einen Drucksprung Δp_2 an der Käfigrückwand zur Folge haben wird. Die in der Strömung auftretende Druckverteilung ist in Fig. 7 angegeben.

Die Drucksprünge Δp_1 und Δp_2 werden von den Verhältnissen der Öffnungsquerschnitte des ringförmigen Spaltes an der Kathode und des Loches abhängen und in erster Näherung deren Quadraten umgekehrt proportional sein. Da nun bei der Warburgschen Anordnung sicher das Loch klein war gegen den ringförmigen Kathodenspalt, so war sehr wahrscheinlich der Drucksprung Δp_1 zu vernach-

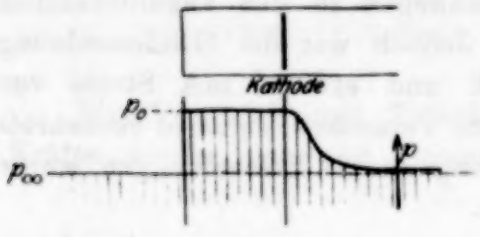


Fig. 6.

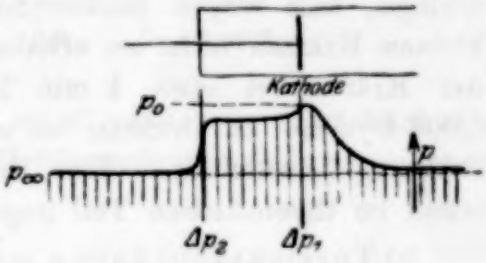


Fig. 7.

lässigen, so daß auf die Kathode, wenigstens mit einer gewissen Annäherung, nur die elektrische Anziehung wirkte.

Inwieweit allerdings der mit großer Geschwindigkeit aus dem Loch austretende Gasstrom im Rezipienten noch störende Einflüsse, z. B. auf den Wagebalken, ausübte, entzieht sich jeder Beurteilung.

3. Versuchsanordnung und Meßresultate.

Zum Auspumpen des Rezipienten, der die verschiedenen noch näher zu beschreibenden Meßanordnungen enthielt, diente ein Volmeraggregat mit einer Wasserstrahlpumpe als Vorpumpe. Der Druck p wurde mit einem Mc Leod-Manometer gemessen, das für einen Meßbereich von 0,1 bis 10 mm konstruiert war. Im Rezipienten befand sich P_2O_5 als Trockenmittel.

Die Entladungsströme wurden von einer Akkumulatorenbatterie von 2000 Volt geliefert, deren Strom i durch einen regulierbaren Hochspannungswiderstand geändert und durch ein Milliamperemeter gemessen werden konnte. Zur Messung der am Entladungsrohr liegenden Spannung V diente ein Elektrometer.

Die Kathode war bei allen Messungen ganz vom Glimmlicht bedeckt. Der sogenannte normale Fall, bei dem die Kathode nur gerade ganz bedeckt ist und bei einer kleinen Verminderung des Stromes anfängt, nicht mehr ganz bedeckt zu sein, ist in den

Tabellen mit einem Stern (*) bezeichnet. Alle auf den normalen Fall bezüglichen Buchstaben sind überstrichen (z. B. K).

Die Meßanordnung selbst wurde mehrfach abgeändert. Dabei kamen vier prinzipiell verschiedene Anordnungen zur Anwendung.

a) Torsionsanordnung mit unterlegter Kathode. Auf ein Glimmerblatt, das an einem Torsionsdraht aufgehängt war, war auf einer Seite exzentrisch die Kathode in Form einer leitenden Belegung aufgebracht. Die Torsion wurde direkt mittels eines Glaszeigers an einer um den Rezipienten gelegten kreisförmigen Skale abgelesen.

Genaue Meßresultate waren teils wegen der Kleinheit der Ausschläge, teils wegen starker Schwankungen in den außerordentlich kleinen Kräften nicht zu erhalten. Jedoch war die Größenordnung der Kräfte bei etwa 1 mm Druck und etwa 5 mA Strom von 0,006 Dyn/cm² an abwärts, bei einigen Versuchen sogar in verkehrter Richtung (Abstoßung). Eine Erklärung dieser Erscheinungen wurde schon im theoretischen Teil gegeben.

b) Torsionsanordnung mit Käfig. Die kreisförmige Kathode a (Fig. 8) (Kupfer, Rückseite mit Schellack lackiert) schwebt konzentrisch in dem Glaskäfig b. Die Stromzufuhr erfolgt durch den Torsionsdraht, und im Innern der Glaskapillare c, die außerdem Gegengewicht d und Glaszeiger e trägt.

Für genaue quantitative Messungen war die Anordnung noch nicht brauchbar, da die Wirkung des Käfigs nur bei ganz kleinen Ausschlägen vollständig war. Dagegen zeigten die Kräfte (siehe Tabelle 1) jetzt wirklich die richtige Größenordnung.

Tabelle 1.

p mm	V Volt	i Milliamp.	K Dyn/cm²
0,14	800	0,4	0,05
	830	1,0	0,10
0,23	650	0,4	0,04
	690	1,0	0,06
	750	2,0	$0{,}08^{5}$
0,73	450	1,2	0,07*
	530	2,0	0,09
	580	3,0	0,13
1,1	530	2,2	0,11*
	550	3,0	0,13
1,5	620	4,0	0,15*

c) Anordnung b) ohne Glaskäfig. Um den Einfluß des Käfigs möglichst deutlich zu zeigen, wurde an der Anordnung b) der Glaskäfig entfernt, sonst aber keinerlei Veränderung vorgenommen. Die Ergebnisse zeigt Tabelle 2.

Tabelle 2.

p mm	V Volt	i Milliamp.	K Dyn/cm²
etwa 0,4	620	0,7	0,006
1,6[5]	910?	0,7	0,011*
	860	2,5	0,011
2,8[5]	1100	2,8	0,017*

Ein Vergleich mit Tabelle 1 zeigt, daß jetzt tatsächlich die Kräfte wieder von viel kleinerer Größenordnung sind, wenn auch

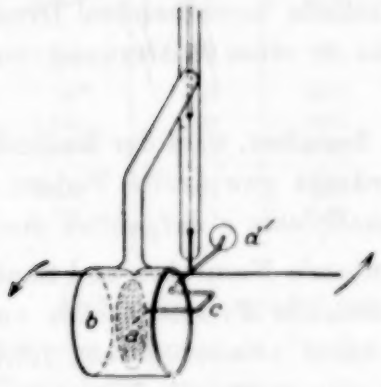


Fig. 8.

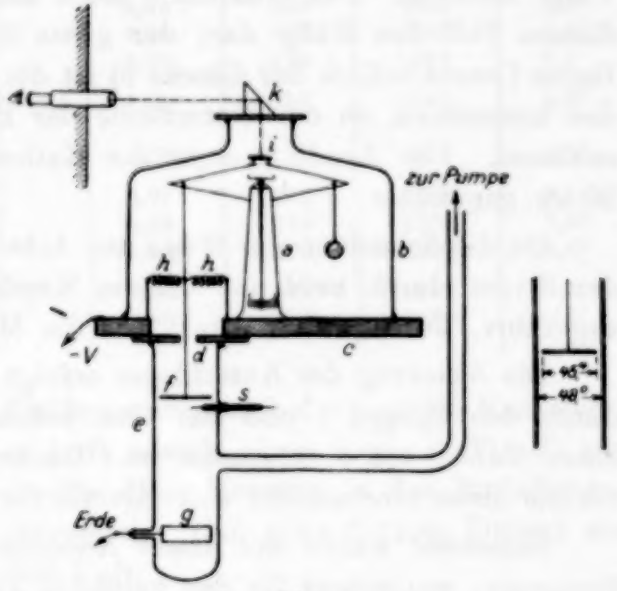


Fig. 9.

nicht so klein wie bei der Anordnung a). (Letzteres infolge des Unterschiedes von freier und unterlegter Elektrode.)

Interessant ist es auch, daß bei Anordnung c) die Spannungen höher, die normalen Stromdichten aber sehr viel kleiner sind als bei denselben Drucken bei Anordnung b). Dies zeigt, daß die Gasströme, die im Fall c) vorhanden sind, im Fall b) aber nicht, einen starken Einfluß auf den ganzen Charakter der Entladung ausüben. Die charakteristische Veränderung der Entladungsvorgänge zeigte sich auch direkt darin, daß im Gegensatz zur Anordnung b) bei Anordnung c)

eine sehr starke, geschichtete positive Säule bis in die Nähe der Kathode vorhanden war und die Wärmeentwicklung an letzterer sehr beträchtlich wurde.

d) Endgültige Anordnung mit Wage zu quantitativen Messungen. An eine quantitative Meßanordnung mußte in erster Linie die Anforderung gestellt werden, daß sich bei einer Ablenkung der Kathode aus ihrer Ruhelage die gegenseitigen geometrischen Verhältnisse von Kathode und Käfig nicht ändern. Dies konnte mit einer Torsionsanordnung nicht erreicht werden, und es wurde daher, ähnlich wie bei Warburg, eine Wage zur Messung der Kräfte verwendet, deren Anordnung Fig. 9 zeigt.

Die Wage[1]) *a* steht unter der Glasglocke *b*, die auf die Metallplatte *c* aufgekittet ist. Unter der Öffnung *d* dieser letzteren ist das zylindrische Glasrohr *e* angekittet, in dem die an der Wage aufgehängte kreisförmige Kupferkathode *f* mit einem Luftspalt von etwas über 1 mm schwebt. Das Glasrohr *e* stellt zusammen mit der Glocke *b* in diesem Fall den Käfig dar; der ganze über der Kathode befindliche Raum (einschließlich der Glocke *b*) ist der Raum, der bei der Messung den konstanten, an der Unterfläche der Kathode herrschenden Druck annimmt. Die Anode *g* steht der Kathode in einer Entfernung von 20 cm gegenüber.

Da die Schneiden der Wage aus Achat bestehen, wird der Kathode der Strom durch zwei aus 0,1 mm Kupferdraht gewickelte Federn *h* zugeführt, deren Halter direkt auf die Metallplatte *c* aufgelötet sind.

Die Ablesung des Ausschlages erfolgt mittels Fernrohrs und Skale durch den Spiegel *i* und das total reflektierende Prisma *k*, das auf einen Tubus von *b* aufgesetzt ist. Durch einen zweiten Tubus führt mittels eines Drehschliffs eine Arretiervorrichtung für die Wage.

Gemessen wurde mit dieser Anordnung außer Kraft, Strom und Spannung, wenigstens für den normalen Fall, auch noch die ungefähre Länge *l* des Hittorfschen Dunkelraumes.

Berechnet wurde jedesmal aus den direkt gemessenen Größen die Kraftdichte K, die Stromdichte i/F, die Feldstärke an der Kathode $E = 300 \sqrt{8 \pi K}$ und das Verhältnis $\frac{K}{i/F}$ von Kraftdichte zu Stromdichte.

Die Ergebnisse einiger Versuchsreihen sind in der folgenden Tabelle 3 wiedergegeben.

---

[1]) Die Wage war von Rubens† entgegenkommenderweise zur Verfügung gestellt worden.

Tabelle 3.

p mm	i Milliamp.	V Volt	l mm	K Dyn/cm²	i/F Mikroamp/cm²	E Volt/cm	$\frac{K}{i/F}$ Dyn/mA
0,29*	0,3	620	15	0,053	19	340	2,8
0,58*	0,9	710	8	0,151	56	575	2,7
0,58	2,0	730		0,242	124	730	1,9[5]
0,58	3,0	740		0,317	186	835	1,7
0,58	4,0	750		0,385	248	920	1,5[5]
0,58	5,0	770		0,437	310	980	1,4
0,82*	1,7	730	6	0,250	105	740	2,4
0,82	3,0	750		0,400	186	935	2,1[5]
0,82	4,0	770		0,490	248	1040	2,0
0,82	5,0	750		0,565	310	1115	1,8
0,82	6,0	780		0,660	372	1205	1,7[5]
0,82	7,0	800		0,740	434	1275	1,7
1,35*	3,5	800	3,5	0,505	217	1050	2,3
1,35	4,0	820		0,59	248	1135	2,4
1,35	5,0	820		0,69	310	1235	2,2
1,35	6,0	820		0,80	372	1325	2,1[5]
1,35	7,0	820		0,92	434	1420	2,1
1,92*	8,5	850	2,5	1,09	527	1545	2,0[5]
1,00*	2,2	790		0,332	136	855	2,4[5]
1,56*	6,0	830		0,78	372	1310	2,1
1,56	7,0	830		0,88	434	1390	2,0[5]
1,56	8,0	830		1,01	496	1490	2,0[5]
1,72*	7,0	840		0,90	434	1405	2,1
1,72	8,0	840		1,00	496	1480	2,0

Außer den angeführten Größen wurde noch der normale Kathodenfall von Kupfer in trockener Luft mittels einer Sonde s (Fig. 9) aus Platindraht gemessen, die erst für diese Messung in den Entladungsraum gebracht wurde. Es ergab sich (bei etwa 0,4 mm Druck) ein normaler Kathodenfall von 290 Volt.

Die Messungsergebnisse sind in den graphischen Darstellungen Fig. 10 und 11 aufgezeichnet. Die Fig. 10 beziehen sich alle auf den normalen Fall; es ist in a $\overline{i/F}$ in Funktion von p, in b $\overline{K}$ in Funktion von i/F, in c $\overline{K}$ in Funktion von p und in d $\overline{E}$ in Funktion von p aufgezeichnet.

In den Fig. a und b wurden die Kurven bestmöglich durch die gemessenen Punkte durchgelegt. Der Kurvenverlauf in c und d ist dann aus dem in a und b gezeichneten berechnet.

Die Fig. 11 zeigt die Kraftdichte K in Funktion von der Stromdichte i/F auch für größere als normale Stromdichten in Kurven

konstanten Druckes für die Drucke, bei denen gemessen wurde. Die Kurve normaler Stromdichte ist gestrichelt eingezeichnet.

An Hand der graphischen Darstellungen sollen nun die Versuchsergebnisse diskutiert werden.

1. Die normale Stromdichte $\overline{i/F}$ wächst stark mit dem Druck. Die Streuung der einzelnen gemessenen Punkte ist erheblich, was damit zusammenhängt, daß der Zustand der gerade bedeckten Kathode nicht sehr scharf und eindeutig hergestellt werden kann. Aus demselben Grunde tritt auch in Kurve c eine starke Streuung auf; in dem Verhältnis von Kraft und Stromdichte in Kurve b müßten aber die so entstandenen Fehler wegfallen, was sich auch weitgehend bestätigt.

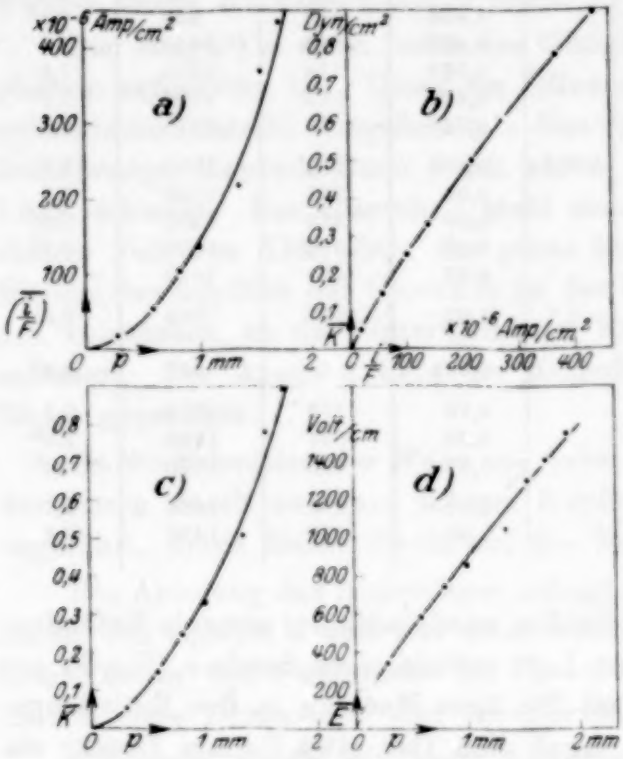


Fig. 10.

2. Die Kraftdichte $\overline{K}$ an der Kathode im normalen Fall zeigt eine Druckabhängigkeit (Kurve c), die der der normalen Stromdichte sehr ähnlich ist. Tatsächlich ergibt sich das Verhältnis von Kraft- und Stromdichte als annähernd konstant, die Beziehung zwischen Kraft und Stromdichte (Kurve b) als annähernd linear.

3. Die aus der Kraft berechnete Kathodenfeldstärke E gibt in ihrer Abhängigkeit vom Druck (Kurve d) annähernd eine Gerade, die jedoch nicht ganz durch den Nullpunkt geht. Das bedeutet, daß die normale Feldstärke etwas langsamer als proportional mit dem Druck wächst.

Interessant ist auch ein Vergleich der Feldstärke $\overline{E}$ an der Kathode mit der mittleren Feldstärke $\overline{E}_{\text{mittel}}$ im Dunkelraum, die man durch Division des normalen Kathodenfalles durch die Dunkelraumlänge erhält. In Tabelle 4 sind für die gemessenen Werte $\overline{E}$ und $\overline{E}_{\text{mittel}}$ einander gegenübergestellt.

Man sieht, daß die Feldstärke unmittelbar an der Kathode immer größer ist als die mittlere Feldstärke im ganzen Dunkelraum, und

zwar bei niederen Drucken verhältnismäßig mehr als bei höheren Drucken. Dies steht mit dem, was bisher über den Feldverlauf im Dunkelraum bekannt ist, im Einklang.

Tabelle 4.

p mm	$\overline{E}$ Volt/cm	$\overline{E}_{\text{mittel}}$ Volt/cm	$\overline{E} / E_{\text{mittel}}$
0,29	340	195	$1{,}7^5$
0,58	575	360	1,6
0,82	740	485	1,5
1,35	1050	830	$1{,}2^5$
1,92	1545	1160	1,3

4. Für höhere als normale Stromdichte wurde für die Kraft K die Darstellung in Abhängigkeit von der Stromdichte i/F gewählt. Die Fig. 11 zeigt, daß bei konstantem Druck die Kraft langsamer mit der Stromdichte wächst, als wenn gleichzeitig der Druck derart erhöht würde, daß die Stromdichte normal bliebe. Am ausgesprochensten ist der langsamere Anstieg bei niederen Drucken, während bei höheren zwischen normalem und anormalem fast kein Unterschied mehr besteht. Bei den Drucken 0,58 mm und 0,82 mm ist noch ein wesentlich flacherer Anstieg der Kraft vorhanden als der auf der Normalkurve. Dagegen liegen schon die Punkte für $p = 1{,}35$ mm und höhere als normale Stromdichte fast ganz auf der Kurve für normale Stromdichte.

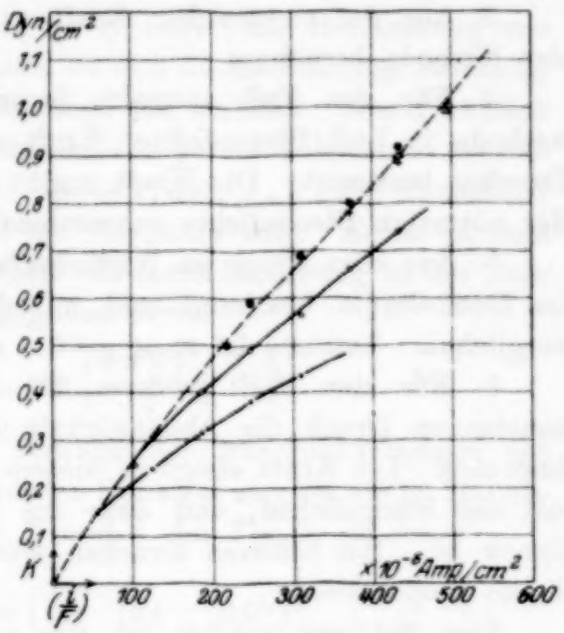


Fig. 11.

Die Abhängigkeit der Kraft von der Stromdichte ist also folgende: Im normalen Fall annähernde Proportionalität, im anormalen Fall bei konstantem Druck langsamerer als proportionaler Anstieg der Kraft, der sich aber bei höheren Drucken immer mehr dem proportionalen nähert. Bei höheren Drucken scheint die Kraft (und damit auch die Kathodenfeldstärke) unabhängig vom Druck und nur abhängig von der Stromdichte zu sein.

Außer den Versuchen mit trockener Luft wurden auch Meßreihen mit nicht getrockneter Luft aufgenommen, die einen starken Einfluß des Feuchtigkeitsgehaltes, hauptsächlich auf die normale Stromdichte, erkennen ließen.

4. Zusammenfassung.

Die Ergebnisse meiner Arbeit möchte ich dahin zusammenfassen:

1. Es wird gezeigt, daß die Kraft, die auf die Kathode einer elektrischen Glimmentladung ausgeübt wird, sich zusammensetzt aus einer elektrischen Kraft, die der Feldstärke an der Kathode entspricht, und einer aerodynamischen Kraft, die von den durch die Entladung erzeugten Druckunterschieden im Gas und Gasströmungen stammt.

2. Es wird eine Methode angegeben, die gestattet, die aerodynamische Kraft zu eliminieren und die elektrische Kraft allein zu messen.

3. Aus der elektrischen Kraft wird der Wert der Feldstärke an der Kathode berechnet.

4. Für den Fall normaler Stromdichte wird für eine Kupferkathode in Luft Stromdichte, Kraft und Feldstärke in Funktion des Druckes bestimmt. Die Kraft ergibt sich bei verschiedenen Drucken der normalen Stromdichte proportional.

5. Aus dem normalen Kathodenfall wird die mittlere Feldstärke im Dunkelraum bestimmt und mit der Feldstärke an der Kathode verglichen. Letztere ist stets größer als erstere.

6. Für den Fall größerer als normale Stromdichte wird bei konstantem Druck die Abhängigkeit der Kraft von der Stromdichte bestimmt. Die Kraft steigt in diesem Fall langsamer als proportional mit der Stromdichte, und zwar um so langsamer, je niederer der Druck ist. Bei höheren Drucken wird die Kraft wieder der Stromdichte proportional.

Zum Schlusse möchte ich mir erlauben, Herrn Prof. Regener für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine Unterstützung meinen herzlichen Dank auszusprechen.

Stuttgart, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

Über die quantitative Beziehung zwischen der sprungweisen Änderung der Atome und der harmonischen Komponenten ihrer Massenänderung. II.

Von **Karl Fehrle**[1]) in Freiburg i. B.

Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 14. September 1923.)

Wir stellen nun für die einzelnen harmonischen Komponenten die Lage in bezug auf die Einteilung der x-Achse fest, in welcher die in ihnen aufgespeicherte potentielle Energie ein Minimum ist, ausgehend von der 18. Harmonischen. Diese umfaßt pro Wellenlänge vier Elemente. Die in Fig. 1 gezeichnete Lage stellt offenbar einen Gleichgewichtszustand dar. Es genügt, um dies zu erkennen, die Betrachtung von vier aufeinanderfolgenden Ordinaten, da sich die Reihenfolge beständig wiederholt. Das Gleichgewicht ist auch ein stabiles. Wenn nämlich vier Ordinaten einander in Abständen von je 90° folgen, so müssen die Argumente durch die Formel $(2n+1)\,45°_{n=0,1,2,3\ldots}$ darstellbar sein, damit die Summe der cos| ein Maximum wird. Es ist ja nach Gleichung (2) meiner vorigen Arbeit die Massenänderung in der Zeiteinheit für die n. Harmonische gegeben durch

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{2\pi}{72} \cdot n\, A_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{72} + \vartheta_n\right).$$

Die Summe der absoluten Beträge der Massenänderungen pro Zeiteinheit in vier aufeinanderfolgenden Punkten, also für die 18. Harmonische, z. B. in den Punkten 0, 1, 2 und 3 der Fig. 1, ist daher

$$\frac{2\pi}{72} \sum_{t=0}^{t=3} 18\, A_{18} \cos\left(\frac{2\pi}{72} \cdot 18t + 315°\right)\Big|,$$

und dieser Ausdruck stellt das Maximum der möglichen Massenänderung pro Zeiteinheit in den vier Punkten dar. Mit der Phase von 315° im Punkte $t = 0$ ist also die in der 18. Harmonischen aufgespeicherte potentielle Energie ein Minimum. Jene Phase stellt aber die von der Fourieranalyse gelieferte Phasenkonstante dar. Prüfen wir nun, ob dasselbe auch für die 24. Harmonische gilt. Ihre Wellenlänge umfaßt ein Intervall von drei Elementen. Sie ist in Fig. 2a in einer Lage dargestellt, welche offenbar auch einen Gleichgewichtszustand bezeichnet.

---

[1]) Der Verfasser ist am 10. Dezember 1923 gestorben.

Die Sekanten bezeichnen den Anteil, den die betreffende Harmonische an der geradlinigen (sprungweisen) Änderung der Elemente haben würde. Aber dieses Gleichgewicht ist ein labiles. Die Ordinaten folgen einander nämlich in Abständen von 120°, und für diese Differenz ist die Summe der drei cos in der gezeichneten Lage kein Maximum. Bei der geringsten Verschiebung wird sich also der Spannungszustand so ändern, daß die Kurve von selbst in die durch Fig. 2b dargestellte Lage gleitet, mit der Phase von 300° im Nullpunkt. Dieses Gleichgewicht ist stabil, denn größer als 2, wie hier, kann die Summe dreier

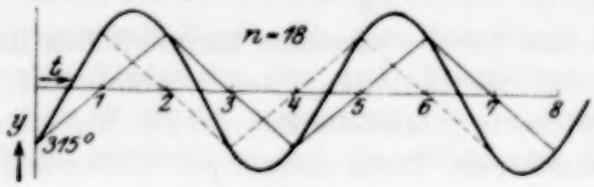


Fig. 1.

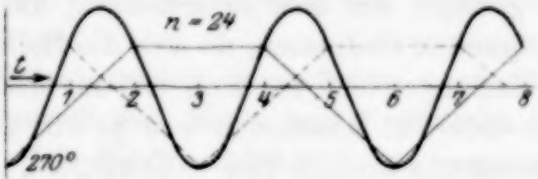


Fig. 2a.

Fig. 2b.

cos, deren Argumente um je 120° springen, überhaupt nicht werden. Die Phase im Nullpunkt ist genau die von der Fourieranalyse gelieferte Phasenkonstante. Würde es sich nun nur um eine Harmonische allein handeln, so wäre das Gleichgewicht stabil bei jeder Verschiebung um eine ganze Zahl von Einheiten der x-Achse, also z. B. bei der 24. Harmonischen auch für $\vartheta = 60°$ und $\vartheta = 180°$ als Phase im Nullpunkt (Phasenkonstante). Welche der drei Möglichkeiten in Betracht kommt, richtet sich nach den übrigen Harmonischen. Fig. 3a stellt die 27. Harmonische dar. Das Gleichgewicht ist nur labil in der gezeichneten Lage. Es genügt, vier aufeinanderfolgende Ordinaten zu betrachten, z. B. eins bis vier, da sich die absoluten Beträge von hier ab in derselben Reihenfolge wiederholen. Verschieben wir die Kurve ein wenig nach links oder rechts, so wird die Summe der absoluten Beträge der vier cos größer. Die Kurve gleitet nun von selbst weiter, bis mit $\vartheta = 204°$ in $t = 0$ das Maximum der Massenänderung erreicht ist. Diese Lage ist in Fig. 3b dargestellt. Die

Phasenkonstante ist nicht die von der Fourieranalyse gelieferte. Diese beträgt 219,39°. Aber es ist die von mir berechnete Phasenkonstante, nämlich $4{,}65° + 27 \cdot 7{,}375° = 203{,}63°$. Man sieht: Es sind die Harmonischen mit den zu 72 inkommensurablen Schwingungszahlen, welche die Translationsbewegung verursachen. Fig. 4 stellt die 32. Harmonische dar. In der gezeichneten Lage ist das Gleichgewicht stabil. Es genügt, neun aufeinanderfolgende Ordinaten zu betrachten, z. B. Nr. 3 bis 11, da die absoluten Beträge sich von hier ab wiederholen.

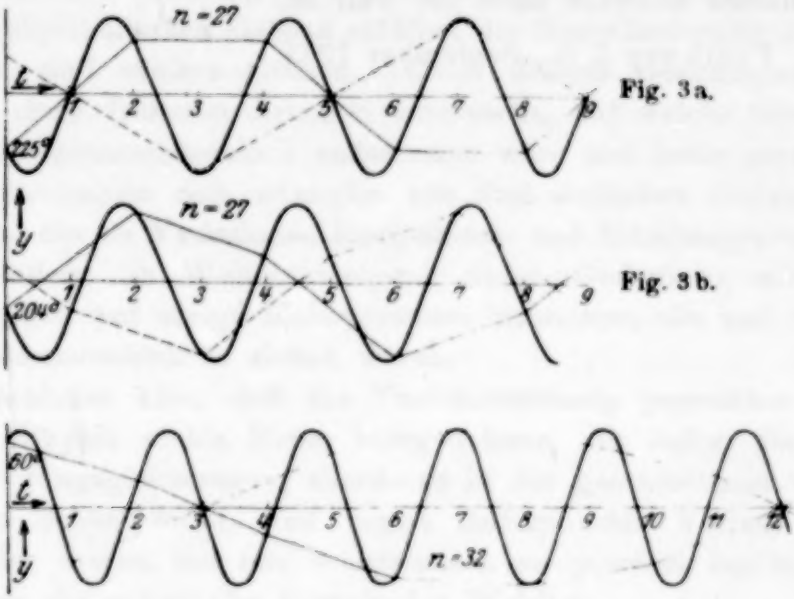


Fig. 4.

Die Summe der neun cos ist ein Maximum, die Massenänderung pro Zeiteinheit in dieser Lage also die größtmögliche. Die Phase in $t = 0$ beträgt 60°. Die Fourieranalyse ergab 55,26°, meine Formel $184{,}65° + 32 \cdot 7{,}375° = 60{,}50°$, abgesehen von einem Vielfachen von 360°. Aus leicht ersichtlichen Gründen wurden für die Beispiele Harmonische gewählt, deren Schwingungszahlen ganz oder in ihren Faktoren in 72 enthalten sind. Die allgemeine Anwendbarkeit des Prinzips ist durch die weitgehende Übereinstimmung der gemachten Stichproben mit den experimentellen Werten sehr wahrscheinlich gemacht, und es ist klar, daß die Rechnung von der hier vorgeführten sich nur durch ihre größere Umständlichkeit unterscheiden wird, da statt 3 bis 4 Ordinaten deren bis zu 36 berücksichtigt werden müssen, was besonders dann ins Gewicht fällt, wenn durch Superposition zweier Harmonischen festgestellt wird, welche Kombination der möglichen Phasen für die resultierende Kurve das Maximum der Massenänderung ergibt. Bekanntlich hat auch Bohr ein Minimumprinzip

aufgestellt, aber das hier angewendete unterscheidet sich in zwei wesentlichen Punkten davon: Erstens betrachtet es nicht die Energie eines einzelnen aus dem Verbande mit der übrigen Materie losgelösten Atoms, sondern diejenige einer einzelnen Harmonischen in ihrer Wechselwirkung mit der gesamten Materie, zweitens kann man damit in eindeutiger und bestimmter Weise rechnen, was bei dem Bohrschen Minimumprinzip aus den von Sommerfeld auf S. 108 der 1. Aufl. seines Buches allerdings in bezug auf das Bohrsche Prinzip angeführten Gründen nicht der Fall ist.

Freiburg i. B., September 1923.

Zur Quantenatomistik.

Von **R. Mecke** in Bonn.

(Eingegangen am 20. Dezember 1923.)

Soll die Relativitätstheorie für die Physik mehr sein als ein bequemes mathematisches Hilfsmittel, so kann eine Atomistik in ihr nur eine solche der Wirkung und der Elektrizität sein, denn nur diese beiden physikalischen Größen erfüllen die Hauptforderung einer Atomistik: es sind skalare Größen. Unter diesem Gesichtspunkte hatte ich in einer früheren Arbeit[1]) untersucht, auf welche Grundannahmen eine Quantenatomistik aufzubauen wäre und hatte gezeigt, daß die Quantenregeln sich zwanglos aus drei einfachen Prinzipien ableiten ließen, die als Variations-, Integrations- und Erhaltungsprinzip formuliert wurden. In Weiterverfolgung dieses Gedankens möchte ich im folgenden auf einige Konsequenzen hinweisen, die aus einer solchen Quantenatomistik zu ziehen wären.

Es ist zunächst klar, daß das Variationsprinzip gegenüber der „klassischen" Physik nichts Neues bringen kann. Es liefert die bekannten Bewegungsgleichungen, allerdings in der geschlossenen vierdimensionalen Schreibweise, und regelt dadurch den Verlauf der Ereignisse oder macht, um rein relativistisch zu sprechen, bestimmte Aussagen über die mögliche Gestalt der Weltlinie.

Das atomistische Moment in der Relativitätsphysik brachte erst das Integrationsprinzip. Ich hatte es in meiner Arbeit derart formuliert, daß die Integration der Gesamtwirkung über eine geschlossene Weltlinie nur ein ganzes Vielfaches einer kleinsten Größe, des Wirkungsatoms, sein kann, und ich mußte es dahin erweitern, daß auch jedem der vier Einzelintegrale, in die das Linienintegral nach Einführung der Impulse zerfiel, ein Vielfaches des Wirkungsquantes zukam. Während aber die allgemeine Formulierung naturgemäß invariant, d. h. unabhängig von jeglichem Koordinatensystem ist, wird durch die Erweiterung ein bestimmtes Koordinatensystem festgelegt, in dem nun die Quantelung vorzunehmen wäre. Also auch hier stößt man wieder auf die Frage, welches Koordinatensystem das richtige ist und welche Eigenschaften es zu erfüllen hat. Für die Klasse der bedingt periodischen Bewegungen konnte seinerzeit bekanntlich Epstein[2]) die

[1]) R. Mecke, ZS. f. Phys. **21**, 26, 1924, im folgenden mit l. c. bezeichnet.

[2]) P. Epstein, Ann d. Phys. **51**, 168, 1916, vgl. Sommerfeld, Atom und Spektrallinien, 3. Aufl., S. 674.

formale Regel aufstellen, daß diejenigen Koordinaten die richtigen seien, in die sich die Phasenintegrale separieren lassen. Auch konnte er ihnen als Einhüllende der Bahnkurve eine geometrische Deutung geben. Die allgemeine Lösung der Frage blieb jedoch aus.

Unter dem Gesichtspunkt einer Quantenatomistik wird nun einem Quantenmolekül, das aus einzelnen Wirkungsquanten aufgebaut sein soll, je nach der Anordnung seiner Atome eine bestimmte Struktur zukommen. Dann wird aber stets dasjenige Koordinatensystem das zweckmäßigste, also auch das richtige, sein, welches sich dieser Struktur möglichst anschmiegt; beim kugelsymmetrischen Wasserstoffmodell wären dies die Polarkoordinaten. Man ist geneigt, auch hier das Bild der Lissajouskurve mit einer Einhüllenden als Begrenzung anzuwenden. Das Integrationsprinzip wäre dann so aufzufassen, daß die Weltlinie nur innerhalb eines geschlossenen Viererraums verlaufen kann. Dieser begrenzte Raum stellt das Quantenmolekül dar, seine Struktur ist durch die Phasenintegrale eindeutig festgelegt.

Ein solchermaßen definiertes Quantenmolekül bleibt auch dann noch dasselbe, wenn man jetzt durch beliebige Transformationen

$$x_i' = f(x_i \ldots \alpha_i \ldots) \tag{1}$$

neue Koordinaten einführt, den Standpunkt der Beobachtung also in ein anderes System verlegt. Namentlich wird sich weder Anzahl noch Anordnung der Quantenatome ändern, wenn die die Transformation bestimmenden Parameter α_i derart gewählt sind, daß der adiabatische Grenzübergang

$$x_i' = \lim_{\alpha_i = 0} f(x_i \ldots \alpha_i \ldots) = x_i$$

gilt. Da aber nach dem Äquivalenzprinzip jede Koordinatentransformation aufgefaßt werden kann als eine Einwirkung äußerer Kräfte (z. B. wird beim Zeemaneffekt ein rotierendes Koordinatensystem eingeführt, beim Starkeffekt parabolische Koordinaten), so lassen sich auch alle diejenigen Zustände „quanteln", die adiabatisch auf das durch die Gestalt des Moleküls festgelegte Koordinatensystem zurückzuführen sind. Der Fall, daß hierbei ein „entarteter" Zustand durchlaufen wird, ist selbstverständlich gesondert zu untersuchen, da dadurch die Struktur des Moleküls geändert werden könnte.

Das Integrationsprinzip bestimmte nun nur bei einem geschlossenen Integrationswege den Wert der Gesamtwirkung

$$S = \int H ds, \tag{2}$$

darüber hinaus forderte allerdings das Erhaltungsprinzip ihre allgemeine Konstanz. Um hier zu einer Deutung im obigen Sinne zu gelangen,

wähle ich an Stelle des Weltlinienelementes einen der Wirkung proportionalen Integrationsparameter, lasse also jetzt die für die Ausführung der Integration vollkommen unwesentliche Bedingung

$$\sqrt{-g_{ik}\,y^i\,y^k} = 1$$

fallen. Dann ist aber $H = \text{const}$ eine mögliche Lösung der Lagrangeschen Gleichungen und für die partikuläre Lösung $H = 0$ wird die Gesamtwirkung eine von den Koordinaten unabhängige universelle Konstante, die gleich der Summe der Quantenwerte $\Sigma n_i = 0$ gesetzt werden soll. Es ist die Gleichung der Einhüllenden der Weltlinie:

$$f(x_i \ldots n_i \ldots) = \Sigma n_i = 0. \tag{3}$$

Sie gestattet mir aber jetzt für die stationären Bahnen die ausgestrahlten Frequenzen zu berechnen. Führt man diese Rechnung nach der in meiner Arbeit [1]) entwickelten Methode durch, so gelangt man beim Elektron zu Frequenzen, die hauptsächlich durch den Ausdruck

$$\nu \sim \frac{m_0 c^2}{h} \tag{4}$$

bestimmt sind; die Wellenlänge ist demnach in der Nähe von $\lambda = 24{,}3\,X\text{-}E$ zu suchen. Nach Messungen von L. Meitner [2]) und Ellis [3]) haben nun γ-Strahlen des RaC und ThC″ eine Wellenlänge von 24,5 bzw. 20,3 X-E.

Die stationären Elektronenbahnen, d. h. Bahnen, die nur durch ein Wertesystem der n_i festgelegt sind, sind also keineswegs strahlungslos, sie strahlen vielmehr eine Wellenlänge aus, die im Bereich der γ-Strahlen liegt.

Man kann dieses Resultat ganz im Sinne der Bohrschen Anschauungen von Elektronensprüngen deuten: Bei den Bohrschen Atommodellen enthält nämlich der durch die Gleichung (3) abgegrenzte Wirkungsraum den Atomkern als singuläre Stelle. Die Strahlung kann also angesehen werden als hervorgerufen durch einen Elektronensprung von den stationären Bahnen, hier charakterisiert durch die partikuläre Lösung einer Einhüllenden [Gleichung (3)], zum Atomkern; es ist eine Kernstrahlung mit dem Quantensprung $(n_4, n_i) \to (0, 0)$ [4]). Bei der übrigen Strahlung wird diese singuläre Stelle aber dadurch

---

[1]) l. c., Gl. 28.

[2]) L. Meitner, Naturw. **10**, 381, 1922.

[3]) C. D. Ellis, Proc. Roy. Soc. (A) **101**, 1, 1922.

[4]) Aus l. c., Gl. 15 erhält man für $n_4 = n = 0$ den Radius des Wasserstoffkernes zu $r = \frac{e^2}{m c^2} = 2{,}81 \cdot 10^{-13}$ cm und aus Gl. 16, $\alpha = \beta$, seine Eigenfrequenz zu $\nu = 1{,}7 \cdot 10^{22}$ ($R = 0{,}17$ X.-E.).

ausgeschlossen, daß jetzt die Weltlinie nur zwischen zwei solcher Einhüllenden, jede durch ein Wertesystem n_i bzw. n_i festgelegt, verlaufen kann. Der Viererraum wird dann zweifachzusammenhängend, die stationären Bahnen seien auch hier gedeutet als seine Grenzen, bis zu denen die Weltlinie vorzudringen vermag. Durch letztere Auffassung wird jetzt der Sinn des Erhaltungsprinzips

$$S_1 - S_2 = 0 \qquad (5)$$

klar aufgefaßt als Wert des Linienintegrals längs einer Kurve (Weltlinie) in einem Bereiche, der keine singulären Stellen mehr enthält.

Auf einen Gesichtspunkt will ich zum Schluß noch hinweisen: Bald nach der Erkenntnis, daß die Elektrizität aus Elementarquanten zusammengesetzt ist, zeigte es sich, daß jedem solchen Elektrizitätsatom eine ganz spezifische Masse zukommen mußte, die aber bedeutend kleiner gefunden wurde als die Masse des kleinsten Atoms, des Wasserstoffs. Die ganze Entwicklung, die die Quantentheorie nun angenommen hat, nicht zuletzt die Versuche Comptons über die Streuung der Röntgenstrahlen an freien Elektronen mit dem Nachweis der Umkehrbarkeit der Einsteinschen Gleichung

$$h\nu \rightleftharpoons \tfrac{1}{2} m v^2 \qquad (6)$$

weist darauf hin, daß auch dem Wirkungsquantum unter Umständen eine Masse zukommen muß. Es liegt nahe, in ihr die Masse des positiven Wasserstoffatoms zu vermuten, als einer Masse, über deren etwaiger Deutung noch vollständiges Dunkel herrscht. Eine Atomistik der Elemente würde sich demnach zusammensetzen aus einer Atomistik des Elektrons mit seiner spezifischen Masse einerseits und einer solchen des Wirkungsquantums mit der Wasserstoffkernmasse andererseits. Es wäre dadurch die Möglichkeit gegeben, eine Kernphysik zu treiben und gleichzeitig auch der Isotopie der Elemente mit ihren ganzzahligen Atomgewichten gebührend Rechnung zu tragen, ohne gezwungen zu sein, besondere ad-hoc-Hypothesen einzuführen. Um hier einen Weg zu zeigen, könnte man etwa annehmen, daß für die einzelnen Isotope die Bohrschen Elektronenschalen im Normalzustand verschieden besetzt sind, die Schalen aber auch hier gedeutet nur als Grenzen, bis zu denen die Elektronen vorzudringen vermögen. Man hätte dann darauf Rücksicht zu nehmen, ob die Elektronenschale voll ausgebildet [1]) ist wie beim Helium, in diesem Falle ist die Schale als eine Einheit zu betrachten und ihr Atomgewicht gleich dem Vierfachen der die Schale charakterisierenden Quantenzahl, oder sie ist wasserstoffähnlich, im letzteren

[1]) 1_k Bahn mit 2 Elektronen, 2_k mit 4, 3_k mit 6 usw.

Falle tragen die Quanten jedes Elektrons zum Atomgewicht bei. So wäre z. B. beim Wasserstoff das Atomgewicht 1, 2 oder 3, je nachdem die ein-, zwei- oder dreiquantige Bahn der Normalzustand des Elektrons wäre; eine solche Beobachtung „molekularer" Verbindungen ist nun bei Kanalstrahlenuntersuchungen stets gemacht worden, ohne dafür eine rechte Erklärung geben zu können. Parhelium hätte demnach das Atomgewicht 4, Orthohelium jedoch das Atomgewicht 3, entsprechend der Elektronenbesetzung 1 in (1_1)- und 1 in (2_1)-Bahn. Einen derartigen Versuch für einige Elemente zeigt nun die Tabelle.

Z	A.-G. \ n_k	1_1	2_1	2_2	3_1	3_2	3_3	
1 H . . .	1	1	—	—	—	—	—	—
2 He .	4	2	—	—	—	—	—	(Parhelium)
	3	1	1	—	—	—	—	(Orthohelium)
3 Li . . .	6	2	1	—	—	—	—	—
	7	2	—	—	1	—	—	—
4 Be . . .	9	2	1	—	1	—	—	—
5 B . . .	10	2	2	1	—	—	—	—
	11	2	2	—	1	—	—	—
10 Ne . . .	20	2	4	4	—	—	—	—
	22	2	4	2	2	—	—	—
18 A . . .	40	2	4	2	6	4	—	—
	36	2	4	—	6	6	—	—

Bei den hochatomigen Elementen bestände noch eine große Willkür in der Anordnung, so daß eine Reihe von Fragen hier nicht spruchreif sind. Außerdem kennen wir heute den Mechanismus des radioaktiven Atomzerfalles noch nicht genügend, um eine allgemeine Genesis der Elemente schreiben zu können. Deshalb soll der obige Versuch einer reinen Quantenatomistik auch nur auf die Notwendigkeit hinweisen, die Atomgewichte durch Quantenzahlen zu ersetzen. Ein experimenteller Nachweis der verschiedenen Atomgewichte wird möglich, sobald es gelungen ist, das Atomgewicht angeregter Atome zu bestimmen. In den Versuchen von Aston[1]) und Dempster[2]) liegt aber bereits der Nachweis von Schwankungen vor, die je nach den Anregungsbedingungen im Mischungsverhältnis von Isotopen auftreten (z. B. beim Mg, Zn u. a.). Auch die Deutung der Tatsache, daß die Atomgewichte des Zinns nicht ganzzahlig sind, sich aber um ganze Zahlen unterscheiden, wäre in dieser Richtung zu suchen. Ein vollkommenes Analogon findet man nämlich in den Serienformeln, wo die effektive Quantenzahl auch unganzzahlig ist. Spektro-

[1]) Vgl. F. W. Aston, Isotope. Leipzig, Hirzel, 1923.
[2]) A. J. Dempster, Proc. Nat. Ac. Sci. 7, 45, 1921; Phys. Rev. 20, 631, 1922.

skopische Untersuchungen isotoper Elemente werden sich bei der Identität der Spektra im wesentlichen auf Intensitätsfragen zu beschränken haben.

In den obigen Ausführungen habe ich versucht, in rohen Umrissen ein Bild davon zu geben, wie etwa vierdimensionale Quantenmoleküle physikalisch vorstellbar sind. Ich habe mich dabei von dem Bestreben leiten lassen, die krassen Widersprüche zwischen „klassischer" Strahlung einerseits und Quantentheorie mit ihren durchschlagenden Erfolgen andererseits möglichst auszugleichen. Daß hierbei die Bilder in der Hauptsache der Mathematik (Geometrie und der Funktionentheorie) entnommen sind, liegt ganz in der Natur der Sache begründet, nämlich in der Schwierigkeit, Raum und Zeit als eine einheitliche, vierdimensionale Metrik aufzufassen. Es wird nun Aufgabe der Quantentheorie sein, hier präzisere Vorstellungen zu schaffen.

Bonn, Physikalisches Institut der Universität, Dezember 1923.

Über lichtelektrische Wirkung in Steinsalzkristallen.

Von **J. Bingel** in Göttingen.

Mit zehn Abbildungen. (Eingegangen am 20. Oktober 1923.)

§ 1. Die lichtelektrische Wirkung, d. h. die Abspaltung von Elektronen durch Licht, kann im Innern isolierender Kristalle sowohl zu einer „Polarisation" als auch zu „lichtelektrischer Leitung" führen.

Bei der lichtelektrischen Leitung handelt es sich um eine wirkliche Wanderung der vom Licht dissoziierten Ladungen bis an und in die Elektroden.

Bei der Polarisation infolge innerer lichtelektrischer Wirkung kann es sich um recht verschiedenartige Vorgänge handeln. Möglich sind Verschiebungen von Ladungen innerhalb einzelner Moleküle oder Molekülkomplexe. Dann haben wir eine Polarisation des Dielektrikums im engeren Sinne. Es können aber auch Ladungstrennungen um größere als molekulare Strecken vorkommen: etwa in der Art, daß sich Ladungen in Störungsgebieten des Kristallgitters, unter Umständen sogar Spaltrissen bewegen. Denkbar ist auch, daß die durch einen optischen Elementarprozeß an einem Molekül freigemachten Elektronen eine gewisse „mittlere freie Weglänge" im Felde durchlaufen, bis sie durch Zusammenstoß mit einem anderen Molekül wieder eingefangen werden.

Lichtelektrische Leitung liegt nach den Untersuchungen von Gudden und Pohl[1]) in einer Gruppe von Kristallen mit Sicherheit vor, nämlich in der Gruppe derer, die durch hohe Lichtbrechung ($n>2$) ausgezeichnet sind. Bei diesen Kristallen spielt sich der wirksame Elementarprozeß bei der Lichtabsorption im Grundmaterial ab.

Eine andere große Gruppe von Kristallen mit innerer lichtelektrischer Wirkung ist von Röntgen und Joffé entdeckt[2]). Ihr gemeinsames Merkmal ist, daß sie durch sichtbares oder ultraviolettes Licht nur dann erregt werden, wenn sie ultramikroskopische oder submikroskopische Gitterstörungen zeigen. Diese Störungen brauchen nicht bis zur optischen Nachweisbarkeit zu gehen. Diesen Fall haben wir nach Einwirkung von Röntgenlicht auf Quarz, Steinsalz, Flußspat usw. In anderen Fällen können die Gitterstörungen bis zu grob sichtbaren Änderungen führen (Auftreten ultramikroskopischer Partikelchen, wie

---

[1]) B. Gudden und R. Pohl, ZS. f. Phys. **16**, 170, 1923.

[2]) A. Joffé und W. C. Röntgen, Ann. d. Phys. (4) **64**, 1921.

wir sie bei den verschiedenen Spielarten des blauen Steinsalzes, grünen Flußspates usw. finden).

Für die Kristalle der ersten Gruppe sind die Gesetze der lichtelektrischen Leitung in großen Zügen bekannt, nachdem Gudden und Pohl[1]) die Abtrennung des lichtelektrischen Primärstromes geglückt ist.

Für die Kristalle der zweiten Gruppe sind die Gesetze der Elektrizitätsleitung im Licht noch wenig erforscht. Röntgen hat zwar ein außerordentlich umfangreiches Beobachtungsmaterial geliefert, aber es ist trotzdem notwendig, die Untersuchungen, namentlich in quantitativer Hinsicht, auszudehnen. Das ist insbesondere deswegen erforderlich, weil wir bis heute, ebensowenig wie Röntgen selbst entscheiden können, ob in den Kristallen der zweiten Gruppe lichtelektrische Leitung oder nur Polarisation des Dielektrikums vorliegt,

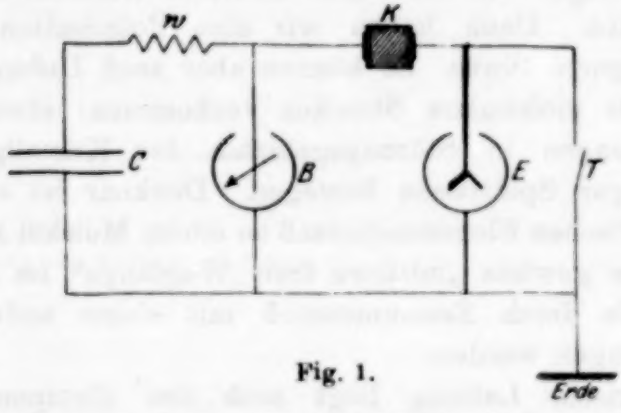


Fig. 1.

C Kondensator = 1100 cm; *W* Holzwiderstand von etwa 10^9 Ohm; *B* Braunsches Elektrometer, Meßbereich 10000 Volt; *E* Zweifadenelektrometer, Empfindlichkeit: 1 Skalenteil = 4,5 Volt bzw. Einfadenelektrometer, Empfindlichkeit: 1 Skalenteil = 0,2 Volt; *K* Kristall; *T* Kurzschlußtaster.

und es infolgedessen durchaus unzulässig ist, von vornherein bei den Kristallen der zweiten Gruppe dieselben Gesetzmäßigkeiten zu erwarten wie bei denen der ersten.

Unter diesem Gesichtspunkte ist die vorliegende Arbeit am Steinsalz ausgeführt worden, und zwar unter Fragestellungen, die zu Anfang der einzelnen Paragraphen angegeben sind.

§ 2. Die Versuchsanordnung. Der elektrische Teil der Versuchsanordnung ist schematisch in Fig. 1 mit erläuternder Beschriftung wiedergegeben. Die im Lichte bewegten Elektrizitätsmengen werden genau wie bei Röntgen elektrometrisch durch Aufladung gemessen.

[1]) R. Gudden und R. Pohl, ZS. f. Phys. 6, 248, 1921.

Die Anordnung unterscheidet sich von der von Röntgen benutzten im wesentlichen nur durch die Möglichkeit, sehr viel höhere Spannungen und kürzere Beobachtungszeiten anzuwenden. Diese wurden unter Umgehung einer Hochspannungsbatterie in sehr bequemer Weise einem technischen Kondensator entnommen, der in Fig. 2 mit Größenangaben abgebildet ist. Aufladung auf die gewünschte Spannung erfolgte vor jeder Beobachtung mittels einer kleinen Influenzmaschine.

Besondere Sorgfalt verlangte die Befestigung der Elektroden an den Kristallen und die Ausschaltung von störenden Oberflächenleitungen. Das letztere geschah durch Einbau des ganzen Kristallträgers in einen

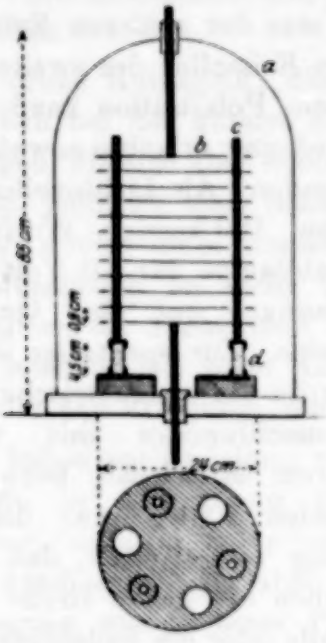


Fig. 2.

Plattenkondensator. *a* Glasgehäuse (Glocke auf Platte); *b* Metallplatten; *c* Messingstangen; *d* Bernsteinfüße.

Fig. 3.

Längsfeldelektrode. Steinsalzplatte; Glyzerinelektrode; Glasfenster.

elektrisch geheizten Kasten, dessen Innentemperatur im Durchschnitt auf etwa 40° gehalten wurde. Schutzringe erwiesen sich dann als unnötig, da die Dunkelleitung zu vernachlässigen war.

Für die Beobachtung im Längsfeld wurden Flüssigkeitselektroden benutzt (Fig. 3). Zur Benutzung im Querfeld wurden an dem Kristall Stanniolelektroden mit Syndetikon aufgeklebt, das durch $CaCl_2$-Zusatz feuchtgehalten wurde.

Hier folgen mit Maßangaben die hauptsächlich benutzten Kristalle, damit im folgenden auf sie zurückverwiesen werden kann.

Tabelle 1.

Querfeld.

Kristall Nr. 1: Natürlich violett, 2 × 2,6 × 0,5 cm;
Kristall Nr. 2: Mit Röntgenlicht bestrahlt, gelbe Färbung, 3,2 × 2,5 × 0,6 cm;
Kristall Nr. 3: Mit Röntgenlicht bestrahlt, schwach gelbe Färbung, 1,3 × 1,3 × 0,5 cm.

Längsfeld.

Kristall Nr. 4: Dunkelblaue Kristallplatte, 1 mm dick;
Kristall Nr. 5: Helldurchsichtige Kristallplatte, in dicken Schichten violett, 2 mm dick;
Kristall Nr. 6: Hellblaue Kristallplatte, 1,5 mm dick.

Die pro Sekunde dem Elektrometer zufließenden Elektrizitätsmengen sollen im folgenden als „lichtelektrische Ströme" bezeichnet werden. Damit soll aber in keiner Weise der späteren Entscheidung vorgegriffen werden, ob es sich bei den Kristallen der zweiten Gruppe um lichtelektrische Leitung oder nur um Polarisation handelt.

Der optische Teil der Versuchsanordnung erlaubte sowohl spektral zerlegtes wie unzerlegtes Licht anzuwenden. Als Lichtquellen dienten eine 100 kerzige Wolframspiraldrahtlampe für 10 Volt Betriebsspannung und eine Quecksilberlampe. Zur spektralen Zerlegung wurde ein symmetrischer Doppelmonochromator mit verschiebbarem Mittelspalt benutzt [1]). In beiden Fällen war die Anordnung so getroffen, daß nach Belieben die ganze Breite des Kristalls oder ein beliebiger Teil desselben belichtet werden konnte. Zu diesem Zweck wurde (Fig. 4) die Beleuchtungslinse L_1 von der Wolframlampe direkt oder von dem monochromatischen Spaltbild aus gleichförmig beleuchtet. Vor ihr befand sich eine meßbar verstellbare rechteckige Spaltblende S_1, die mittels der Linse L_2 auf den Kristall abgebildet werden konnte. Das unzerlegte Licht kam im wesentlichen in drei verschiedenen Intensitätsstufen zur Verwendung:

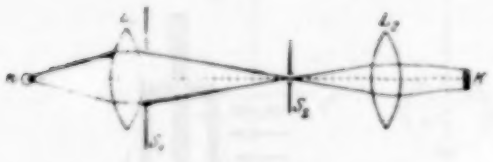


Fig. 4.

w Wolframspiraldrahtlampe bzw. monochromatisches Spaltbild; L_1 Glaslinse: $f = 18$ cm, $\Phi = 9{,}5$ cm; L_2 Glaslinse: $f = 20$ cm, $\Phi = 10$ cm; S_1 Spalt; K Kristall; S_2 Spaltverschluß.

Intensitätsstufe I $\backsim 5 \cdot 10^{-3}$ cal/sec . cm^2,
Intensitätsstufe II $\backsim 5 \cdot 10^{-4}$ „
Intensitätsstufe III $\backsim 5 \cdot 10^{-5}$ „

§ 3. Reproduzierbarkeit der Messungen. Bei ihren Versuchen über lichtelektrische Leitung haben Gudden und Pohl die

[1]) H. Lehmann, Ann. d. Phys. (4) 5, 633, 1901, Fig. 1.

Reproduzierbarkeit ihrer Messungen und die Abspaltung des einfachen Primärstromes im wesentlichen durch drei Kunstgriffe erreicht:

1. Geringe Lichtdichten,
2. Beschränkung auf kleine Belichtungszeiten und Extrapolation auf die Belichtungszeit Null,
3. „Ausleuchtung".

Die ersten beiden Kunstgriffe haben den Zweck, keine merklichen Änderungen des elektrischen Feldes im Kristallinnern entstehen zu lassen. Diese Feldänderungen müssen auftreten, wenn vorzugsweise die Elektronen abwandern und im Kristallinnern positive Restladungen zurückbleiben.

Der dritte Kunstgriff, die „Ausleuchtung", hat den Zweck, die zwar an sich bei der kurzen Einzelbelichtung nicht erheblichen Feldverzerrungen, die sich aber doch bei aufeinanderfolgenden Belichtungen summieren, jedesmal nach Schluß einer Messung wieder zu beseitigen. Und zwar erfolgt diese Ausleuchtung folgendermaßen: Nach Schluß jeder Beobachtung im Licht wird das elektrische Feld abgeschaltet Dann werden die Elektroden kurz geschlossen und der Kristall eine Zeitlang intensiv mit einer Lichtquelle bestrahlt. In unserem Falle genügte die zur Erregung benutzte Wolframlampe.

Wir haben zur Erzielung reproduzierbarer Messungen die gleichen Kunstgriffe in Anwendung gebracht. Maßgebend war dabei die Überlegung, daß sie nötig seien, wenn es sich um lichtelektrische Leitung handle, daß sie aber ebensowenig zu entbehren seien, wenn die Bewegung nur zu einer Polarisation führt. Denn welche der in § 1 genannten Möglichkeiten des Polarisationsvorganges auch vorliegt, jede einzelne von ihnen muß im Kristallinnern zu einem Gegenfelde und somit zur Schwächung des von außen angelegten Feldes führen. Die Existenz dieser Gegenfelder war schon von Röntgen nachgewiesen worden. Wir haben sie ohne weiteres bestätigen können und kommen in § 6 auf quantitative Versuche zurück.

Zunächst handelt es sich in diesem Paragraphen um den Nachweis, daß die oben genannten Kunstgriffe in der Tat zu beliebig reproduzierbaren Zahlen führen. Zu diesem Zweck sind in Tabelle 2 Messungen zusammengestellt. Die Schwankungen kennzeichnen gleichzeitig die Meßgenauigkeit.

Die Lichtdichte war während dieser Versuche konstant (Stufe II). Die Ausleuchtung zwischen den Messungen der einzelnen Horizontalreihen erfolgte je eine Minute lang. Die Extrapolation der dem

Elektrometer zufließenden Ströme auf den zeitlichen Nullpunkt geschah graphisch. Fig. 5 gibt ein Beispiel.

Man findet in der Tat, daß bei natürlich blauem Steinsalz in längeren Meßreihen und über mehrere Wochen die Reproduzierbarkeit der Ströme innerhalb weniger Prozente erhalten bleibt (Beispiel Kristall Nr. 1).

Für mit Röntgenlicht bestrahltes Material läßt sich die Reproduzierbarkeit für etliche Stunden ebenfalls dartun (Beispiel Kristall Nr. 2). Für längere Zeiten geht der Abnahme der Empfindlichkeit

Tabelle 2.

	Datum	Stromstärke in Skalenteilen pro Sekunde
Kristall Nr. 1	20. 3. 23	11,5
Spannung 4000 Volt . .		12
		11,5
		11,5
		11
		12
		Mittel: 11,5
	23. 3. 23	„ 11
	14. 4. 23	„ 11,5
Kristall Nr. 2		18
Spannung 2000 Volt . .		18
		19
		18,3
	3 Stunden später	17,5
		18
		18,5
		18

eine Entfärbung parallel, die anscheinend von Belichtung und elektrischem Feld unabhängig ist.

§ 4. Stromspannungskurven. Bei lichtelektrischer Leitung in den Kristallen der Gruppe 1 erreicht der Primärstrom mit wachsender Spannung einen Sättigungswert. Für die Kristalle der Gruppe 2 findet Röntgen Gültigkeit des „Ohmschen Gesetzes", indem er die Ströme bei den beiden Feldstärken 6 und 4600 Volt/cm vergleicht. Es galt die Stromspannungskurve durch weitere Meßpunkte zu belegen und auf einen viel größeren Feldstärkebereich auszudehnen. Denn es lag die Möglichkeit nahe, wie Röntgen selbst betont, daß seine Beobachtungen nur dem anfänglichen linearen Anstieg einer Sättigungskurve angehören, deren horizontales Stück erst bei viel höheren Feldstärken, als sie Röntgen benutzt hatte, erreicht wird. Die Messungen wurden mit den Kristallen Nr. 4, 5 und 6 ausgeführt,

Lichtintensität Stufe III. Ihre Darstellung in Fig. 6 zeigt, daß wir auch bei 50000 Volt/cm, d. h. bei ungefähr zehnmal so hohen Feldstärken, als sie Röntgen benutzt hatte, noch keine Andeutung der Sättigung finden, wie sie für die Kristalle der ersten Gruppe charakteristisch ist.

§ 5. Zusammenhang zwischen Stromstärke und Lichtenergie. Für die Kristalle der ersten Gruppe besteht Proportionalität zwischen Lichtenergie und Primärstrom. Röntgen hatte über den

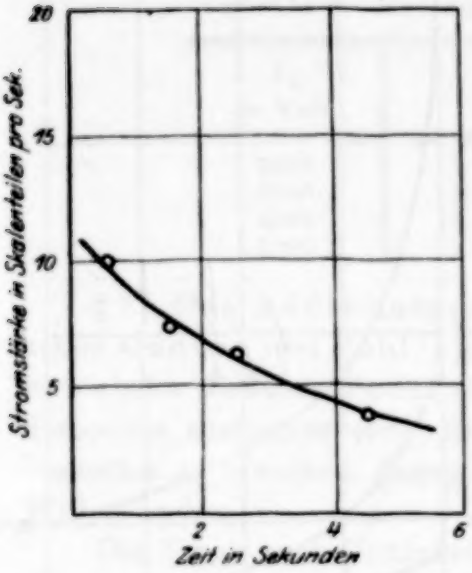


Fig. 5.

Zeitliche Abnahme des Stromes. Kristall Nr. 1, 4000 Volt, Lichtintensität Stufe II.

Zweifadenelektrometer.

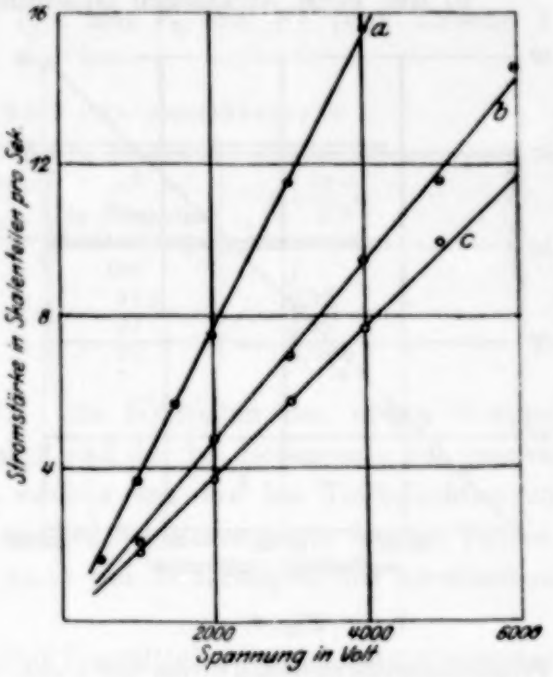


Fig. 6.

Proportionalität von Strom und Spannung. Lichtintensität Stufe III. *a* Kristall Nr. 6, $d = 1{,}5$ mm; *b* Kristall Nr. 5, $d = 2$ mm; *c* Kristall Nr. 4, $d = 1$ mm. Bei *a* Einfadenelektrometer, bei *b* und *c* Zweifadenelektrometer.

Zusammenhang des lichtelektrischen Stromes und der Lichtintensität keine Messungen mitgeteilt, bei Aufnahme der spektralen Verteilung aber Proportionalität vorausgesetzt.

Diese Voraussetzung erwies sich als berechtigt. Unsere Messungen in Fig. 7 ergeben in Kurve *a* einen linearen Zusammenhang. Die Lichtintensität war dabei unter Anwendung von Siebblenden variiert. Wesentlich war wieder die Extrapolation auf die Zeit Null. Ohne Beachtung dieses Kunstgriffes steigt der Strom weniger als proportional an (Kurve *b*).

§ 6. Zeitlicher Verlauf der Stromstärke. Die beiden in § 4 und § 5 festgestellten Tatsachen wenden wir auf eine mehr quantitative Beschreibung des zeitlichen Verlaufs der Stromstärke an. Dazu machen wir folgende vereinfachenden Annahmen:

1. Die zeitliche Abnahme der Stromstärke ist lediglich durch die Zunahme eines inneren Gegenfeldes bedingt[1]).

2. Die zeitliche Zunahme des Gegenfeldes ist proportional
   a) der Intensität des auffallenden Lichtes,
   b) der noch wirksamen Spannung.

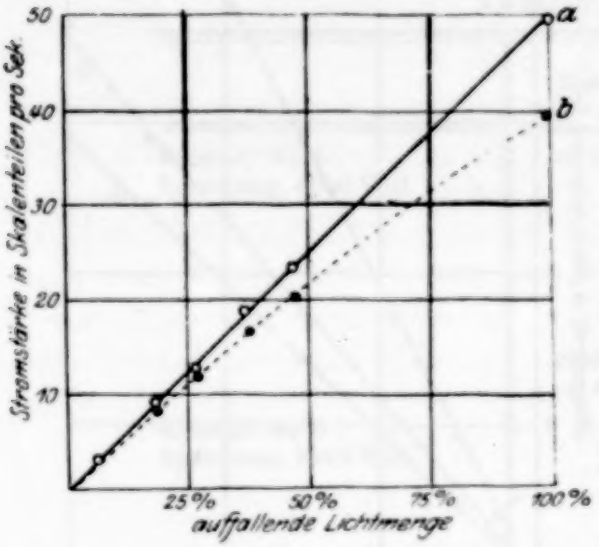


Fig. 7.

Proportionalität zwischen Strom und Lichtintensität. Kristall Nr. 5, 3000 Volt, Lichtintensität Stufe I, Zweifadenelektrometer.

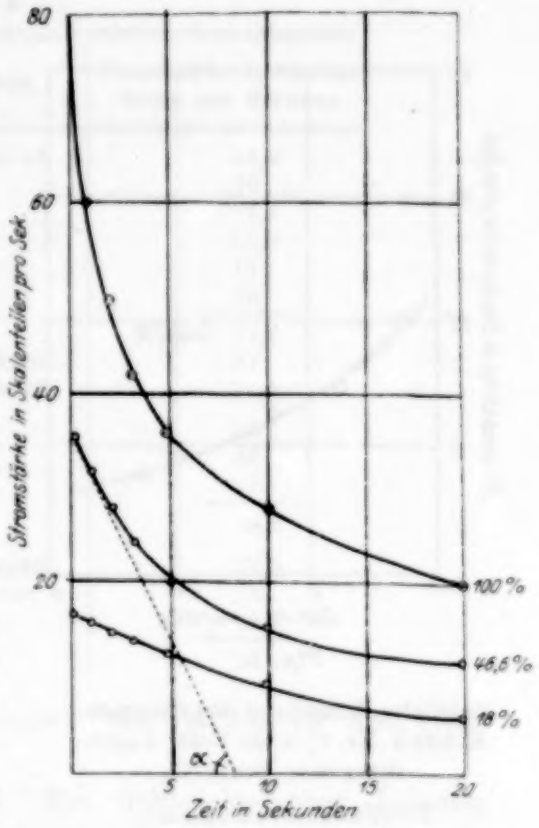


Fig. 8.

Fig. 8.

Zeitlicher Abfall durch Ausbildung eines Gegenfeldes. Kristall Nr. 5, 3000 Volt, Lichtintensität Stufe I, Zweifadenelektrometer.

Sei V_0 die angelegte äußere Spannung, V die wirksame Spannung zur Zeit t, J die Stromstärke und F die Flächendichte des auffallenden Lichtes, C Konstanten, dann ist:

$$dV = -C_1 F V dt$$
$$V = V_0 e^{-C_1 F t}$$

[1]) Wir sind damit in Übereinstimmung mit einer Veröffentlichung von A. Joffé, die nach Abschluß dieser Arbeit erschienen ist: A. Joffé, Ann. d. Phys. (6) **72**, 461, 1923.

Nach § 4 und 5:

$$J = C_2 F V = C_2 V_0 F e^{-C_1 F t},$$

$$\frac{dJ}{dt_{(t=0)}} = C V_0 F^2 = -tg\,\alpha. \qquad (1)$$

Stellen wir den zeitlichen Verlauf der Stromstärke graphisch dar und sei α der Winkel der Tangente mit der Abszissenachse für $t = 0$, so finden wir in der Tat bei variierter Spannung und konstanter Lichtdichte ebenso wie bei konstanter Spannung und variierter Lichtdichte angenähert Proportionalität von $tg\,\alpha$ mit V_0 bzw. F^2 (vgl. Tabelle 3 und Fig. 8).

Tabelle 3. Kristall Nr. 5. Intensitätsstufe I.

V_0 in Volt	$C \cdot \frac{tg\,\alpha}{V_0}$	F in Prozenten	$C \cdot \frac{tg\,\alpha}{F^2}$
2000	1	100	1
3000	1,07	46,6	0,98
4000	1,1	37	1,02
5000	1,12	18	0,90

§ 7. Das Additionsgesetz. An Kristallen der ersten Gruppe haben Gudden und Pohl[1]) gezeigt, daß der bei Belichtung der ganzen Strombahn fließende Strom sich additiv aus den bei Teilbelichtungen fließenden zusammensetzt. Ein solches Additionsgesetz ist bei Volumionisation zu erwarten, dagegen nicht bei Änderungen des spezifischen Widerstandes.

Die Frage nach Gültigkeit oder Ungültigkeit eines entsprechenden Gesetzes am Steinsalz war daher wichtig.

Unsere Versuche wurden an zahlreichen Kristallen sowohl von natürlich blauem als auch mit Röntgenlicht verfärbtem Steinsalz angestellt. Die Ergebnisse sind folgende:

Bei geringer Lichtdichte (Stufe III) gilt das Additionsgesetz. Bei hoher Lichtintensität (Stufe I) gilt nur noch ein Additionsgesetz für Teilbelichtungen, während beim Übergang zur Belichtung der ganzen Strombahn eine erhebliche Vergrößerung des Stromes eintritt. Diese Abweichung scheint unabhängig von Wellenlänge, Spannung und Feldrichtung, hängt vielmehr ausschließlich von der Lichtdichte ab.

Tabelle 4 bringt Meßreihen, welche die Gültigkeit des Additionsgesetzes dartun.

Tabelle 5 und Fig. 9 zeigen auf zwei verschiedene Weisen an einem leidlich homogenen Kristall (Fig. 9a Empfindlichkeitsverteilung)

[1]) B. Gudden und R. Pohl, ZS. f. Phys. 7, 65, 1921.

Tabelle 4. Kristall Nr. 1. Intensitätsstufe III—II. Stromstärke in Skalenteilen pro 20 Sekunden Belichtung.

	Spannung in Volt	Erste Hälfte	Zweite Hälfte	Summe beider Hälften	Ganze Strombahn
Unzerlegtes Licht	1500	11,4	7,6	19,0	18,4
	1500	52	36,8	88,8	92
	3000	104	76	180	188
	4000	156	100	256	252
λ = 490—520 mμ	3000	2,7	1,2	3,9	4,0
525—545 „		6,3	4,4	10,7	10,8
560—610 „		6,3	3,5	9,8	10,3
640—690 „		7	5,5	12,5	12,7

die erhebliche Vergrößerung des Stromes beim Übergang zur ganzen Strombahn. Gleichzeitig erkennt man aus der Tabelle 5 die Addition der Teilbelichtungen:

$$^1/_1 > ^2/_2 = ^3/_3 = ^4/_4 = ^6/_6.$$

Tabelle 5. Kristall Nr. 2. Intensitätsstufe I.

Belichtete Bruchteile	Stromstärke in Skalenteilen pro Sekunde
$^1/_1$	58
$^2/_2$	33
$^3/_3$	32,5
$^4/_4$	33,5
$^6/_6$	33

Tabelle 6 läßt die Abhängigkeit der Additivität von der Lichtintensität erkennen:

Tabelle 6. Kristall Nr. 1. Spannung 500 Volt. Unzerlegtes Licht.

Lampenspannung in Volt	Stromstärke in Skalenteilen pro 5 Sekunden			
	Ganze Strombahn	Erste Hälfte	Zweite Hälfte	Prozente
5	8,5	4,5	3,8	92
6	22	10,4	7,6	82
8	67,5	32,5	22,5	80
9	132	60	40	75
10	190	80	50	67

Der Umstand, daß die Additivität unabhängig von der angelegten Spannung (Tabelle 7) und auch unabhängig von der Art der Vergrößerung der belichteten Strombahn (ausgehend von der Kathode zur Anode und umgekehrt) gefunden wird, schließt verschiedene sonst

Tabelle 7. Additionsgesetz bei variierter Spannung. Kristall Nr. 1. Lichtintensität Stufe II.

Spannung in Volt	Stromstärke in Skalenteilen pro Sekunde				
	Erste Hälfte	Zweite Hälfte	Summe beider	Ganze Strombahn	Prozente
100	3	3,5	6,5	10	65
200	5	7	12	20	60
300	9	11	20	31	64
400	12	15	27	39	69
500	14	19	33	50	66

naheliegende Erklärungen des abweichenden Verhaltens des Additionsgesetzes bei hohen Lichtdichten aus. Wir können zurzeit keine befriedigende Deutung geben.

§ 8. Lichtabsorption und Quantenäquivalent. Zur Entscheidung der Frage, ob „Leitung“ oder „Polarisation“ vorliegt, bedarf man der Kenntnis der Verschiebungswege von Elementarladungen im Kristall. Einen Anhaltspunkt bietet das Quantenäquivalentgesetz. Man setzt voraus, daß, analog wie in den Kristallen der Gruppe I [1]) jedes absorbierte Lichtquant zur Befreiung einer Elementarladung führt. In unserem Falle ist nur eine Überschlagsrechnung möglich, da keine Sättigungsströme vorliegen. Die erforderlichen Absorptionsmessungen wurden in zweifacher Weise an dem schwach gelblichen Kristall Nr. 3 vorgenommen:

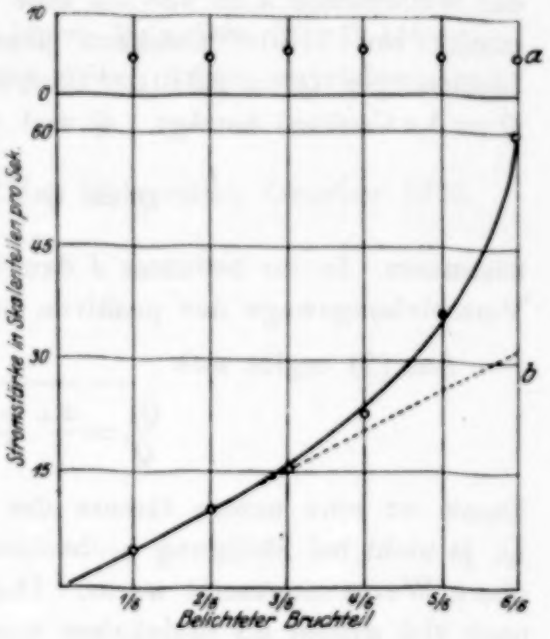


Fig. 9.

Stromstärke und belichteter Bruchteil des Kristalls. Kristall Nr. 2. 5000 Volt. Lichtintensität Stufe II, Zweifadenelektrometer.

1. Durch den lichtelektrischen Strom selbst. Querfeldelektroden waren nach Fig. 10 derart angeordnet, daß das Elektrometer entweder an Elektrode 1 oder 2 angelegt wurde, während die Gegenelektrode (auf der anderen Kristallseite) an Spannung lag. Die Differenz der Ströme bei Verwendung der vorderen oder hinteren

[1]) B. Gudden und R. Pohl, ZS. f. Phys. **17**, 331, 1923; Phys. ZS. **22**, 529, 1921.

Elektrode lag innerhalb der Meßgenauigkeit (in diesem Falle + 5 Proz).

2. Optisch mittels Thermosäule. Zur Ausschaltung der Streuungs- und Reflexionsverluste wurden die Bruchteile gleichen auffallenden monochromatischen Lichtes verglichen, die den Kristall 3 oder einen gleich dicken farblos unbestrahlten durchsetzt hatten.

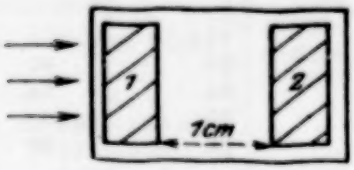


Fig. 10.

Bei 546 mμ ergab sich kein meßbarer Unterschied zwischen beiden Kristallen, bei 436 mμ zeigte der gelbliche Kristall Nr. 3 bei 1 cm Schichtdicke 10 Proz. Verlust. Dieser Verlust kann zum Teil auf Zerstreuung an den ultramikroskopischen Partikeln beruhen, so daß die wahre Absorption sicherlich < 10 Proz. ist.

Nun ergab sich bei einer auffallenden Lichtenergie von 3.10^{-5} cal/sec der Wellenlänge $\lambda = 436$ mμ eine ballistisch gemessene Elektrizitätsmenge von 7.10^{-10} Coul/sec. Daraus folgt pro Calorie absorbierter Lichtenergie $Q_b = 2{,}3.10^{-4}$ Coul/cal, während das volle Äquivalent $Q = 1{,}4$ Coul/cal beträgt. Q und Q_b hängen durch die Gleichung [1])

$$Q_b = Q\,\frac{x_+ + x_-}{d} \qquad (2)$$

zusammen. In ihr bedeutet d den Elektrodenabstand, x_+ bzw. x_- die Verschiebungswege der positiven bzw. negativen Träger im Kristall.

Aus (2) ergibt sich

$$\frac{Q_b}{Q} = \frac{x_+ + x_-}{d} \sim 2.10^{-4}.$$

Damit ist eine untere Grenze der Verschiebungswege gegeben, da Q_b ja nicht bei Sättigung beobachtet war, und für die Lichtabsorption obere Werte eingesetzt waren. Die Verschiebungswege wären demnach viel größer als molekulare Strecken. Andererseits scheinen sie erheblich kleiner als die verwendeten Kristalldicken zu sein, da sonst ein charakteristischer Unterschied bei Belichtung eines Streifens an der Anode oder an der Kathode zu erwarten wäre.

§ 9. Zusammenfassung. 1. Es werden nach Röntgens Vorgang „lichtelektrische Ströme“ in natürlich und künstlich verfärbtem Steinsalz gemessen. Dabei werden die gleichen Bedingungen benutzt, unter denen sich bei den lichtelektrisch leitenden Kristallen vom

[1]) B. Gudden und R. Pohl, ZS. f. Phys. **16**, 170, 1923.

Brechungsindex höher als 2 die einfachen Erscheinungen des lichtelektrischen Primärstromes ergeben. Es ergibt sich:

a) Reproduzierbarkeit der Messungen selbst nach Wochen,

b) linearer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung, keine Andeutung von Sättigung auch bei Feldstärken von 50 000 Volt/cm,

c) Proportionalität des Stromes zur Lichtenergie,

d) Additionsgesetz bei Teilbelichtung.

2. Die Beobachtungen lassen es unentschieden, ob es sich um wirkliche lichtelektrische Leitung oder Polarisation des Dielektrikums handelt. Ein Vergleich der Ausbeute mit dem Quantenäquivalentgesetz spricht eher für Leitung. Mindestens sind Verschiebungswege um nur molekulare Strecken ausgeschlossen.

3. Die unter 1a) bis d) aufgeführten Tatsachen geben quantitativ Rechenschaft von der von Röntgen festgestellten zeitlichen Abnahme der lichtelektrischen „Ströme".

Herrn Prof. Dr. R. Pohl und Herrn Priv.-Doz. Dr. B. Gudden bin ich für Anregung und Förderung dieser Arbeit zu vielem Dank verpflichtet.

Göttingen, I. Physik. Institut der Universität, Oktober 1923.

Die Berechnung höherer Näherungen zufällig entarteter Systeme.

Von **L. Nordheim** in Göttingen.

(Eingegangen am 9. Dezember 1923.)

In der Arbeit des Verfassers: „Zur Behandlung entarteter Systeme in der Störungsrechnung“ [1]) ist die Berechnung der höheren Näherungen zufällig entarteter Systeme in § 1 nicht richtig. Man kann nicht wie l. c. S. 320 unten schließen, daß die Größen $\frac{\partial S_{2n-2}}{\partial w_\varkappa}$ verschwinden, sondern es sind die Werte der Phasenkonstanten ebenfalls als Potenzreihen nach dem Entwicklungsparameter λ anzusetzen. Dann ist aber das l. c. angewandte Verfahren nicht mehr durchführbar.

Wegen der prinzipiellen Wichtigkeit der Frage sei sie hier noch einmal kurz behandelt. Ließe sich nämlich der Nachweis der Existenz der librationsfreien Lösungen nicht allgemein für beliebige Näherungen durchführen, so wäre auch die Behauptung der Phasenbeziehungen [2]) bei Atom- und Molekülmodellen in Frage gestellt. Das nachstehende Verfahren, das den geforderten Beweis wohl in befriedigender Weise erbringt, verdanke ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn W. Pauli, dem ich hierfür meinen besten Dank aussprechen möchte.

Es werde noch einmal in Kürze das Problem formuliert. Von dem mechanischen System mit der Hamiltonschen Funktion

$$H = H_0(J_\varkappa) + \lambda H_1(J_\varkappa, w_\varkappa) + \lambda^2 H_2 + \cdots \quad (\varkappa = 1 \cdots r) \qquad (1)$$

sollen die „zufällig entarteten“ Bewegungen untersucht werden, d. h. diejenigen, für die einige Frequenzen des ungestörten Systems etwa die mit den Indizes $s+1 \cdots r$

$$\nu_\sigma = \frac{\partial H_0}{\partial J_\sigma} = 0 \quad (\sigma = s+1 \cdots r) \qquad (2)$$

verschwinden. Im ungestörten System wird dann die Bahnkurve, da die w_σ konstant sind, nur ein Gebiet von $s < r$ Dimensionen erfüllen. Gefragt wird, ob es auch im gestörten System solche Lösungen vom Periodizitätsgrad s gibt, die für $\lambda = 0$ in entsprechende des ungestörten übergehen. Ihre Auffindung ist offenbar eine ganz analoge Aufgabe, wie sie bei der Grenzentartung auftritt, und läßt sich durch sinngemäße Übertragung der dort zum Ziel führenden Methode erledigen.

---

[1]) ZS. f. Phys. **17**, 316, 1923.

[2]) Siehe M. Born und W. Heisenberg, ebenda **14**, 44, 1923.

Die zu betrachtenden Lösungen des gestörten Systems werden sich nun bei verschwindendem λ an ganz bestimmte des ungestörten anschließen, für die die J_σ und w_σ ganz bestimmte Werte haben, d. h. gewisse Funktionen der $J_\varkappa\,(\varkappa = 1 \cdots s)$ sind. Bezeichnen wir diese mit J_σ^0 bzw. w_σ^0, so verschwinden die Größen

$$\xi_\sigma = J_\sigma - J_\sigma^0, \quad \eta_\sigma = w_\sigma - w_\sigma^0 \tag{3}$$

im ungestörten System. Wenn wir also ξ_σ und η_σ, d. h. die Abweichungen von der Ruhelage im ungestörten System als kanonische Variable einführen können, ohne daß die den $J_\varkappa$, $w_\varkappa$ entsprechenden Variabeln $\overline{J_\varkappa}$, $\overline{w_\varkappa}$ ihren Charakter als Wirkungs- bzw. Winkelvariabeln einbüßen, so wird sich das bei der Grenzentartung angewandte Verfahren ohne Schwierigkeiten übernehmen lassen. Dabei ist zu bemerken, daß wir die Funktionen $J_\sigma^0\,(J_\varkappa)$ schon kennen. Da nämlich die Gleichungen (2) erfüllt sein müssen, erhalten wir die J_σ^0, indem wir jene nach den J_σ auflösen. Die $w_\sigma^0\,(J_\varkappa)$ lassen wir zunächst unbestimmt. Sie werden sich weiterhin zwangsläufig ergeben.

Um das eben angegebene Ziel zu erreichen, führen wir folgende kanonische Transformation der Variabeln $(J_\varkappa, J_\sigma, w_\varkappa, w_\sigma)$ zu den Variabeln $(\overline{J_\varkappa}, \xi_\sigma, \overline{w_\varkappa}, \eta_\sigma)$ aus. Wir nehmen als Transformationsfunktion $\Phi\,(\overline{J_\varkappa}, \xi_\sigma, w_\varkappa, w_\sigma)$

$$\Phi = \sum_{\varkappa=1}^{s} J_\varkappa w_\varkappa + \sum_{\sigma=s+1}^{r} [J_\sigma^0 w_\sigma + \xi_\sigma (w_\sigma - w_\sigma^0)]. \tag{4}$$

Dann wird

$$\left.\begin{aligned} J_\varkappa &= \frac{\partial w_r}{\partial \Phi} = \overline{J_\varkappa}, \qquad J_\sigma = \frac{\partial \Phi}{\partial w_\sigma} = J_\sigma^0 + \xi_\sigma, \\ \overline{w_r} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \overline{J_\varkappa}} = w_\varkappa + \sum_\sigma \left(\frac{\partial J_\sigma^0}{\partial J_\varkappa} w_\sigma - \xi_\sigma \frac{\partial w_\sigma^0}{\partial J_\varkappa}\right), \\ \eta_\sigma &= \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_\sigma} = w_\sigma - w_\sigma^0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Es werden also die $J_\varkappa = \overline{J_\varkappa}$, die ξ_σ und η_σ die durch (3) bestimmten Größen, während sich die $\overline{w_\varrho}$ von den w_ϱ nur um Größen unterscheiden, die in der ungestörten Bewegung konstant sind.

Entwickeln wir jetzt die Hamiltonsche Funktion (1) nach den ξ_σ und η_σ, so geht sie unter Berücksichtigung von (2) über in — wir lassen die Querstriche der Einfachheit halber wieder fort —

$$\left.\begin{aligned} H &= H_0 + \lambda H_1 + \lambda^2 H_2 + \cdots && (\varkappa = 1, \ldots s) \\ H_0 &= H_{00}(J_\varkappa, J_\sigma^0) + \sum_{\sigma\varrho} c_0^{\sigma\varrho}\, \xi_\sigma \xi_\varrho + \cdots && (\sigma, \varrho = s+1, \ldots r) \\ H_1 &= H_{10}(J_\varkappa, w_\varkappa, J_\sigma^0\, w_\sigma^0) + \sum_\sigma (a_1^\sigma \xi_\sigma + b_1^\sigma \eta_\sigma) + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} \tag{1a}$$

Dabei wird nach (3) und (5)

$$\left.\begin{aligned} c_0^{\sigma\varrho} &= \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 H_{00}}{\partial J_\sigma^0\,\partial J_\varrho^0}, \\ a_1^\sigma &= \frac{\partial H_{10}}{\partial J_\sigma^0} + \frac{1}{2!}\sum_\varkappa \frac{\partial H_{10}}{\partial w_\varkappa}\frac{\partial w_\sigma^0}{\partial J_\varkappa}, \\ b_1^\sigma &= \frac{\partial H_{10}}{\partial w_\sigma^0} - \frac{1}{2!}\sum_\varkappa \frac{\partial H_{10}}{\partial w_\varkappa}\frac{\partial J_\sigma^0}{\partial J_\varkappa}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

während die Ausdrücke H_{00}, $H_{10}\ldots$ aus den H_0, $H_1\ldots$ in (1) durch Einsetzen der J_σ^0, w_σ^0 an Stelle der J_σ, w_σ hervorgehen.

Dieses Problem läßt sich nun nach der Methode der Grenzentartung weiter behandeln. Letztere besteht darin, durch eine geeignete zweite Transformation solche neue Variablen $J_\varkappa^*$, $w_\varkappa^*$, ξ_σ^*, η_σ^* einzuführen, in denen die von den ξ_σ^*, η_σ^* freien Glieder nur von den J_σ^* abhängen, während in den ξ_σ^*, η_σ^* lineare Terme überhaupt nicht auftreten. Dann wird nämlich

$$\frac{\partial H}{\partial \xi^*}\Big|_{\xi^*,\ \eta^*=0} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial \eta^*}\Big|_{\xi^*=\eta^*=0} = 0,$$

und $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$ stellt also eine strenge Lösung der Bewegungsgleichungen mit dem Periodizitätsgrad $s < r$ dar, die für $\lambda = 0$ in die durch (2) charakterisierte des ungestörten Systems übergeht.

Hierzu führt die kanonische Transformation mit der Transformationsfunktion

$$S(J_\varkappa^*, \eta_\sigma^*, w_\varkappa, \xi_\sigma) = \sum_{\varkappa=1}^{s} J_\varkappa^* w_\varkappa + T + \sum_{\sigma=s+1}^{r}[\eta_\sigma^*(\xi_\sigma - A^\sigma) + \xi_\sigma B^\sigma]. \tag{4a}$$

Die T, A^σ, B^σ sind als Potenzreihen nach λ anzusetzen

$$\begin{aligned} T &= \lambda T_1 + \lambda^2 T_2 + \cdots \\ A^\sigma &= \lambda A_1^\sigma + \lambda^2 A_2^\sigma + \cdots \\ B^\sigma &= \lambda B_1^\sigma + \lambda^2 B_2^\sigma + \cdots, \end{aligned}$$

deren einzelne Koeffizienten, also die $T_\varkappa$, $A_\varkappa^\sigma$, $B_\varkappa^\sigma$, als Funktionen der $J_\varkappa^*$ und $w_\varkappa$ zu denken sind. Man hat dann

$$\left.\begin{aligned} \xi_\sigma^* &= \frac{\partial S}{\partial \eta_\sigma^*} = \xi_\sigma - A^\sigma, \quad \xi_\sigma = A^\sigma + \xi_\sigma^* \\ \eta_\sigma &= \frac{\partial S}{\partial \xi_\sigma} = B^\sigma + \eta_\sigma^* \\ J_\varkappa &= \frac{\partial S}{\partial w_\varkappa} = J_\varkappa^* + \frac{\partial T}{\partial w_\varkappa} + \sum_\sigma\left(\xi_\sigma^*\frac{\partial B^\sigma}{\partial w_\varkappa} - \eta_\sigma^*\frac{\partial A^\sigma}{\partial w_\varkappa}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Setzt man diese Entwicklungen in (1a) ein und entwickelt alles nach λ, so sind in jeder Näherung $1 + 2\sigma$ Funktionen frei, durch

deren geeignete Bestimmung man gerade die oben aufgestellten Forderungen befriedigen kann.

In der zitierten Arbeit des Verfassers ist nur der Fall behandelt, daß H_0 von den ξ_σ und η_σ ganz unabhängig ist. Hier treten allerdings die ξ_σ, jedoch nicht die η_σ, schon in H_0 auf, aber es fehlen wegen (2) die linearen Glieder, und die Methode bleibt anwendbar, da infolge dieses Umstandes auch $\left.\frac{\partial H_0}{\partial \xi^*}\right|_{\xi^*=0} = 0$ gilt.

Man bekommt hier durch Nullsetzen der Koeffizienten von ξ_σ^* und η_σ^* in H_1 die 2σ Bedingungen:

$$\sum_\varkappa \frac{\partial H_{00}}{\partial J_\varkappa^*}\frac{\partial B_1^\sigma}{\partial w_\varkappa} + a_1^\sigma + 2\sum_\varrho c_0^{\sigma\varrho} A_1^\sigma = 0 \quad (\varkappa = 1, \dots s) \qquad (8_1)$$

$$-\sum_\varkappa \frac{\partial H_{00}}{\partial J_\varkappa^*}\frac{\partial A_1^\sigma}{\partial w_\varkappa} + b_1^\sigma = 0 \qquad (\sigma, \varrho = s+1, \dots r). \qquad (8_2)$$

Aus ihnen lassen sich durch das in der Störungstheorie übliche Verfahren die A_1^σ und B_1^σ berechnen, indem man sie in einen konstanten und einen rein periodischen Teil zerlegt:

$$A_1^\sigma = \overline{A_1^\sigma} + A_1^{\sigma 1}, \qquad B_1^\sigma = \overline{B_1^\sigma} + B_1^{\sigma 1},$$

wo die $\overline{A_1^\sigma}$ und $\overline{B_1^\sigma}$ die Mittelwerte der A_1^σ und B_1^σ hinsichtlich der $w_\varkappa$ bedeuten (diese Mittelung bringen wir, wie gebräuchlich, durch den Querstrich zum Ausdruck). Es müssen dann die periodischen und die konstanten Terme in den linken Seiten der Gleichungen (8) für sich verschwinden, woraus, da natürlich die $\frac{\partial \overline{B_1^\sigma}}{\partial w_\varkappa} = 0$ sind, für die $\overline{A_1^\sigma}$ die linearen inhomogenen Gleichungen

$$2\sum_\varrho c_0^{\sigma\varrho}\,\overline{A_1^\sigma} + \overline{a_1^\sigma} = 0$$

folgen, während die $\overline{B_1}$ sich erst in der nächsten Näherung bestimmen lassen. Die Berechnung der $B_1^{\sigma 1}$ erfolgt wie üblich. Die $A_1^{\sigma 1}$ jedoch lassen sich aus (8_2) nur bestimmen, falls die $\overline{b_1^\sigma} = 0$ sind, da hier nicht, wie in (8_1) eine Konstante frei ist, die man so bestimmen kann, daß die Mittelwerte für sich verschwinden [1]), und das verlangt nach (6), da die w_σ^0 nur von den $J_\varkappa$ abhängen und die Mittelwerte der $\frac{\partial H_{10}}{\partial w_\varkappa}$ als

[1]) Vergleiche hierzu und für die Fortsetzbarkeit des Verfahrens die Ausführungen des Verfassers l. c., S. 326 ff. Man beachte jedoch, daß hier die Entwicklung der B^σ doch erst mit einem zu λ proportionalen Glied beginnt, trotzdem die $\overline{a_1^\sigma}$ nicht zu verschwinden brauchen. Es liegt dies an dem Auftreten des Gliedes mit A_1^ϱ in (8_1).

rein periodischer Funktionen ohne konstantes Glied verschwinden, die Bedingungen

$$\frac{\partial \overline{H_{10}}}{\partial w_\sigma^0} = 0. \tag{9}$$

Dies ist gerade sehr befriedigend, denn wir haben damit die nötigen Gleichungen zur Bestimmung der w_σ^0, die wir oben noch offen ließen, und zwar kommen wir gerade wieder zu der schon von Born und Heisenberg und dem Verfasser angegebenen ersten Näherung, da ja H_{10} in unserer Bezeichnung das H_1 des ursprünglich vorgelegten Problems ist. Hier lassen sich aber die höheren Näherungen ohne Schwierigkeiten hinzufügen, und es sind damit alle Folgerungen hinsichtlich der Phasenbeziehungen mathematisch jedenfalls gerechtfertigt.

Über die Änderungen des Torsionsmoduls eines Eurekadrahtes durch Ziehen.

Von G. B. Deodhar in Allahabad (Indien).

Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 31. Oktober 1923.)

1. Einführung. Der Torsionsmodul der Metalle wird mittels eines Drahtes des betreffenden Metalls nach bekannten Methoden bestimmt. Das Ziehen beeinflußt den Torsionsmodul der Metalle in verschiedener Weise, und es würde interessant sein zu studieren, wieweit die verschiedenen Faktoren die Elastizität des Drahtes verändern. Der Vorgang des Ziehens wird gewiß große Änderungen in den inneren Kräften und im Scherungsmodul des Drahtes hervorrufen, und es wäre wichtig, zu untersuchen, ob sich eine Gesetzmäßigkeit zwischen diesen Faktoren finden läßt. Natürlich müssen andere Einflüsse eliminiert oder konstant gehalten werden.

Trotz seiner Wichtigkeit hat das Problem nicht die verdiente Beachtung gefunden. J. E. Harris[1]) studierte die Änderungen der Schwingungsperiode eines Wismutdrahtes in Abhängigkeit von dem Durchmesser des Drahtes. Er hat aber die Änderungen des Torsionsmoduls nicht berücksichtigt. Die nächste beachtenswerte Untersuchung in dieser Richtung ist von L. P. Sieg[2]) in seiner Abhandlung über die Änderungen der Elastizität durch Ziehen unternommen worden, der zeigte, daß der Torsionsmodul eines 40proz. Platinum-Iridiumdrahtes nach und nach kleiner wird. In einer späteren Arbeit[3]) über den Effekt des Ziehens auf den Torsionsmodul eines biegsamen Wolframdrahtes stellte derselbe Forscher die Hypothese auf, daß durch das Ziehen eine Oberfläche mit höherem Torsionsmodul erzeugt wird, und stützt seine Theorie durch photomikrographische Aufnahmen[4]).

In der vorliegenden Arbeit ist der Einfluß des Ziehens auf eine Kupfer-Nickellegierung untersucht worden. Ein starker Eurekadraht wurde durch ein Zieheisen gezogen und dadurch zu vier Proben von abnehmendem Durchmesser verarbeitet. Die vier Proben wurden vor dem Ziehen bei gleicher Temperatur ausgeglüht. Die Längen der vier Drähte waren möglichst gleich, und während der Untersuchung wurden die Temperatur und die Luftreibung konstant gehalten. Es

[1]) Phys. Rev. **35**, 115, Aug. 1912.
[2]) Proc. Amer. Phys. Soc. 1913.
[3]) Phys. Rev. (2) **1**, 70, 1913.
[4]) Ebenda (2) **19**, 273, 1922.

wurde gefunden, daß der Torsionsmodul eines Eurekadrahtes mit abnehmendem Durchmesser nach einem logarithmischen Gesetz zunimmt. Ein Vergleich der Photomikrographien des Drahtes vor und nach dem Ziehen zeigte bemerkenswerte Unterschiede der Kristallstruktur.

2. Beschreibung der Versuche. Ein Stück Eurekadraht wurde zur Rotglut erhitzt und dann durch ein Zieheisen zu vier Proben von verschiedenem Durchmesser gezogen. Ein Stück des ursprünglichen Drahtes diente als fünfte Probe. Die Drahtproben wurden sorgfältig gestreckt und mit zwei 87 cm voneinander entfernten Strichen versehen, bei einer Probe war die Entfernung nur 84 cm. Der Durchmesser jeder Probe wurde mit einem Mikrometer auf 0,001 cm genau ermittelt. Die Proben wurden, wie Fig. 1 zeigt, aufgehängt. S_1 und S_2 sind zwei Schraubzwingen, die den Draht an P_1 und P_2 festhalten; die Länge P_1 und P_2 beträgt 87 bzw. 84 cm. AB ist ein vertikal stehender Stahlstab, der mit der Schraube C_2 einen zweiten Stab L horizontal trägt. Die Schraubzwinge S_1 ist durch die Schraube C_1 am Stabe befestigt. Die Schraubzwinge S_2 sitzt in der Mitte des hohlen Messingzylinders VV', wobei die Länge VV' etwa 46 cm beträgt. Der Zylinder VV' trägt zwei kleine Stäbe MM', die beliebig verschoben werden können. Der Zylinder VV' mit den zwei Stäben dient als ein in horizontaler Ebene schwingender Stab von konstantem Gewicht, dessen Schwingungsachse vertikal durch seinen Schwerpunkt geht. Durch Verschieben der Stäbe MM' kann das Trägheitsmoment des Zylinders VV' beliebig geändert werden. In der Mitte des Zylinders VV' befindet sich ein Hohlspiegel m, der das Bild einer Lichtquelle auf eine ein Meter entfernte Skale wirft, auf welcher die Schwingungen des Zylinders VV' abgelesen werden. Um Luftströmungen zu vermeiden, wurde die untere Hälfte des Apparates von einem kleinen Glasgehäuse umgeben. Zur Messung der Schwingungsdauer wurde der Zylinder VV' um einen 16 Skalenteilen entsprechenden Winkel abgelenkt und die Beobachtungen nach Abnahme der Amplituden auf 14 Skalenteile begonnen. Das Mittel aus mehreren Beobachtungen gab die Schwingungsdauer für ein gewisses Trägheitsmoment.

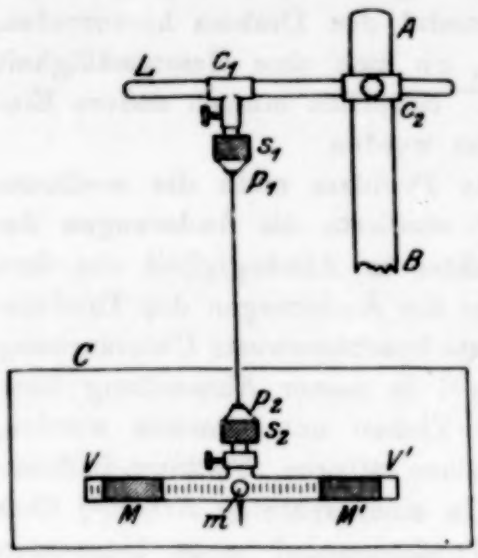


Fig. 1.

Die Massen MM' wurden dann in entgegengesetzter Richtung verschoben, so daß der Zylinder VV' noch genau in horizontaler Lage verblieb, und entsprechend dem geänderten Trägheitsmoment die Schwingungsdauer erneut beobachtet.

3. Beobachtungen und Berechnung der Resultate. Der Torsionsmodul wurde nach der Formel $\eta = \frac{8\pi L(I_1 - I_2)}{(T_1^2 - T_2^2)R^4}$ ermittelt,

Tabelle 1.

$R = 0{,}0912$ cm (Probe des ursprünglichen Drahtes), $L = 87{,}00$ cm, Temperatur $= 17{,}0^0$ C.

$T_1^2 - T_2^2$	$I_1 - I_2$ g.cm^2	$\eta . 10^{-11}$ Dyn/cm^2
2,2044	142,4 . 286,4	5,85
4,1853	268,8 . 286,4	5,82
5,9094	379,2 . 286,4	5,81
1,9809	126,4 . 286,4	5,78
3,7050	236,8 . 286,4	5,79
1,7241	110,4 . 286,4	5,80

Mittelwert:

$\eta = (5{,}81 \pm 0{,}007) . 10^{11}$ Dyn/cm^2.

Tabelle 2.

$R = 0{,}08585$ cm, $L = 87{,}0$ cm, Temperatur $= 17{,}0^0$ C.

$T_1^2 - T_2^2$	$I_1 - I_2$ g.cm^2	$\eta . 10^{-11}$ Dyn/cm^2
1,9768	97,4 . 286,4	5,68
3,7968	185,7 . 286,4	5,64
5,4033	265,1 . 286,4	5,66
1,8200	88,4 . 286,4	5,60
3,4265	167,7 . 286,4	5,64
1,6085	79,4 . 286,4	5,69

Mittelwert:

$\eta = (5{,}65 \pm 0{,}009) . 10^{11}$ Dyn/cm^2.

Tabelle 3.

$R = 0{,}07515$ cm, $L = 87{,}00$ cm, Temperatur $= 17{,}9^0$ C.

$T_1^2 - T_2^2$	$I_1 - I_2$ g.cm^2	$\eta . 10^{-11}$ Dyn/cm^2
4,8600	136,6 . 286,4	5,52
9,1377	257,2 . 286,4	5,53
12,8625	361,8 . 286,4	5,53
4,2777	120,6 . 286,4	5,54
8,0025	225,2 . 286,4	5,53
3,7248	104,6 . 286,4	5,52

Mittelwert:

$\eta = (5{,}53 \pm 0{,}002) . 10^{11}$ Dyn/cm^2.

Tabelle 4.

$R = 0{,}0625$ cm, $L = 84{,}00$ cm, Temperatur $= 17{,}5^0$ C.

$T_1^2 - T_2^2$	$I_1 - I_2$ g.cm^2	$\eta . 10^{-11}$ Dyn/cm^2
10,0726	140,0 . 286,4	5,51
18,9964	264,0 . 286,4	5,51
26,7965	372,0 . 286,4	5,50
8,9238	124,0 . 286,4	5,51
16,7239	232,0 . 286,4	5,50
7,8002	108,0 . 286,4	5,49

Mittelwert:

$\eta = (5{,}50 \pm 0{,}002) . 10^{11}$ Dyn/cm^2.

Tabelle 5.

$R = 0{,}0508$ cm, $L = 87{,}0$ cm, Temperatur $17{,}0^0$ C.

$T_1^2 - T_2^2$	$I_1 - I_2$ g.cm^2	$\eta . 10^{-11}$ Dyn/cm^2
23,1522	184,0 . 286,4	5,44
43,6793	252,0 . 286,4	5,43
61,2953	354,0 . 286,4	5,43
20,5271	118,0 . 286,4	5,41
38,1431	220,0 . 286,4	5,43
17,6159	102,0 . 286,4	5,45

Mittelwert:

$\eta = (5{,}43 \pm 0{,}003) . 10^{11}$ Dyn/cm^2.

Tabelle 6.

Radius R	Torsionsmodul η
0,0912 cm	$5{,}81 . 10^{11}$ Dyn/cm^2
0,08585 „	$5{,}65 . 10^{11}$ „
0,07515 „	$5{,}53 . 10^{11}$ „
0,0625 „	$5{,}50 . 10^{11}$ „
0,0508 „	$5{,}43 . 10^{11}$ „

wo R den Durchmesser des Drahtes, L die Länge des Drahtes, T_1 und T_2 die Schwingungsdauern entsprechend den Trägheitsmomenten I_1 und I_2 bedeuten. Die Tabellen 1 bis 5 enthalten die Werte von $T_1^2 - T_2^2$, $I_1 - I_2$ und η, während Tabelle 6 die Werte von η und R gibt.

4. Erörterung der Resultate. Aus den in den Tabellen gegebenen Resultaten ergibt sich, daß die abnehmenden Werte des Torsionsmoduls η sich nicht auf Grund des wahrscheinlichen Fehlers erklären lassen. Fig. 2 gibt in graphischer Darstellung das Verhältnis

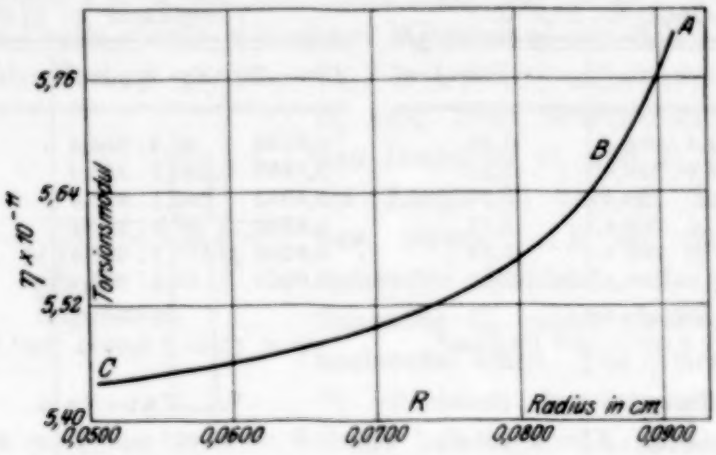


Fig. 2.

zwischen R und η. Man findet aus der Kurve, daß sich η zwischen den Werten $R = 0{,}0880$ cm (B) und $R = 0{,}0508$ cm (C) durch die empirische Formel $\eta = Ae^{\beta R}$ darstellen läßt, wo $A = 5{,}13 \cdot 10^{11}$ und $\beta = 1{,}129$ ist; der Torsionsmodul nimmt also logarithmisch ab. Zwischen A und B fällt η schneller ab.

Metalldrähte haben bekanntlich eine Kristallstruktur, deren Natur man, selbst durch stärkste Vergrößerung, noch nicht genau erforscht hat. Wird der Draht tordiert, so treten für die Bewegung der Kristalle auf der Oberfläche große Kräfte ins Spiel. Die so erzeugte Deformation bleibt auf die Oberfläche begrenzt; und wenn der Draht so starken Deformationen ausgesetzt wird, daß diese Kristallaggregate zertrümmert werden, so wird der Torsionsmodul des Drahtes abnehmen. Fig. 3 zeigt die Mikrophotographie des Eurekadrahtes vor dem Ziehen. Fig. 4 zeigt den Zustand der Oberfläche nach dem Ziehen. Man sieht deutlich die Zertrümmerung der Kristallaggregate. Das Ziehen zerstört also die Kristallhaut, die durch die Torsion die größte Deformation erleidet. Bei Wiederholung des Ziehens geht diese Deformation weiter.

Die Änderungen für kleinere Durchmesser als 0,0508 cm konnten aus praktischen Gründen nicht untersucht werden. Die Proben des Eurekadrahtes werden aufbewahrt, und es wird geprüft werden, ob

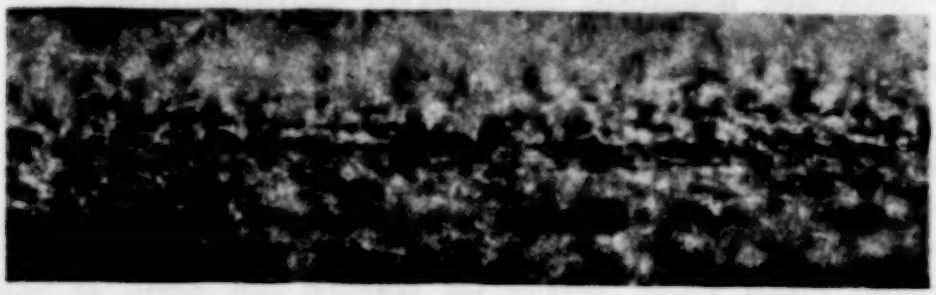


Fig. 3. Vor dem Ziehen.

Fig. 4. Nach dem Ziehen.

die Änderungen des Torsionsmoduls dauernde sind. Die Resultate sollen später mitgeteilt werden.

5. Zusammenfassung. Der Torsionsmodul η eines Eurekadrahtes nimmt durch Ziehen ab; innerhalb gewisser Grenzen können die Änderungen durch die Formel $\eta = Ae^{\beta R}$ dargestellt werden, wo $A = 5{,}13 : 10^{11}$ und $\beta = 1{,}129$ ist. Im ersten Stadium des Ziehens nimmt η schneller ab als der Formel entspricht. Die Abnahme des Torsionsmoduls wird auf Grund der durch das Ziehen verursachten veränderten Kristallstruktur der Oberfläche erklärt.

September 1923.

Über den Dunkelraum an der Kathode induzierter Entladungen.

Von **E. Goldstein** in Berlin.

(Eingegangen am 29. Dezember 1923.)

Im Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik behandelt Herr R. Seeliger[1]) die Schärfe der Grenze des Dunkelraumes an der Kathode in ausführlichen Erörterungen als ein noch ungelöstes „Rätsel". Ich glaube dieses Rätsel bereits vor längerer Zeit gelöst zu haben in der Erklärung, die ich für das Zustandekommen des Dunkelraumes überhaupt gegeben habe[2]). Da meine bezügliche Arbeit weder von Herrn Seeliger noch, soviel mir bekannt, von irgend einem anderen der zahlreichen Autoren, die den Gegenstand behandelt haben, jemals erwähnt worden ist, so sei es gestattet, meine Erklärung der fraglichen Erscheinung im Anschluß an meine damalige kurze Darstellung etwas näher zu skizzieren.

Der Dunkelraum und die Schärfe seiner Grenze beruhen auf drei Tatsachen:

1. Von der Kathode gehen die gewöhnlichen (primären) Kathodenstrahlen aus, deren eines Ende an der Kathode fest ist, während das andere Ende und die ganze Länge der Strahlen Kräften frei beweglich folgen (Hittorf[3]).

2. Jeder primäre Kathodenstrahl erleidet in dem von ihm durchstrahlten Gase eine Diffussion, wodurch sekundäre Strahlen gebildet werden [Lenard[4]), Goldstein[5])].

3. Die Kathode übt auf alle Kathodenstrahlen (primäre wie sekundäre) eine Abstoßung aus [Goldstein[6])].

In der unten zitierten Monographie habe ich diese Abstoßung hauptsächlich für den Fall starker Evakuationen behandelt, bei denen die primären Kathodenstrahlen da, wo sie die Glaswand treffen, auf der letzteren helles Phosphoreszenzlicht erregen. Bei hohen Dichten erregen sie nur die Gasteilchen zum Leuchten, von denen ihre Energie

---

[1]) R. Seeliger, Jahrb. d. Rad. u. Elektron. **19**, 222, 1923.

[2]) E. Goldstein, Verhandl. d. D. Phys. Ges. **2**, 142, 1900.

[3]) W. Hittorf, Pogg. Ann. **136**, 1 und 197, 1869.

[4]) Ph. Lenard, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1893, S. 3; Wied. Ann. **51**, 225, 1894.

[5]) E. Goldstein, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1897, S. 906; Wied. Ann. **67**, 84, 1899.

[6]) E. Goldstein, Monatsber. d. Berl. Akad. 1876, S. 276 und: Eine neue Form elektrischer Abstoßung. Berlin, Springer, 1881.

abgefangen wird. Entsprechend ist ihre Diffusion um so stärker, die Helligkeit der diffundierten Strahlen also um so größer, je dichter das Gas und je geringer gleichzeitig die Geschwindigkeit der primären Strahlen ist. Bei geringen Gasdichten steigt das Kathodenpotential bekanntlich zu hohen Werten an, die primären, aus abgeschleuderten Elektronen bestehenden Strahlen erlangen große Geschwindigkeiten, und die Diffusion wird schließlich unmerklich, wie auch die primären Strahlen infolge der verringerten Absorption auf ihrem Wege durch das Gas kaum noch erkennbar sind. Durch die der großen Geschwindigkeit und der geringen Absorption entprechende Energie der Strahlen wird dann das helle Leuchten der Glaswand veranlaßt, das bei hohen Dichten wegfällt. Die erwähnten Dunkelflächen auf der Glaswand treten daher nur bei geringen Gasdichten auf.

Die erwähnte Abstoßung selbst übt die Kathode aber auch auf die sekundären diffundierten Strahlen aus, die nicht an der Kathode mit einem Ende haften, sondern in ihrer ganzen Länge und mit beiden Enden frei im Raume verschiebbar sind. Unter diesen Bedingungen muß die Abstoßung zur Folge haben, daß der Bereich, in welchem die Abstoßungskraft für Strahlen der vorliegenden Geschwindigkeit einen merklichen Wert hat, von den diffusen Strahlen ganz entblößt wird, indem dieselben bis zu einer gewissen Grenze von der Kathode fortgetrieben werden. Somit bildet sich an der Kathode ein von diffusen Strahlen freier, also dunklerer Raum, das ist eben der sogenannte Crookessche Dunkelraum. Derselbe ist also ein Abstoßungsphänomen, und die Grenze bis zu der die diffusen Strahlen fortgestoßen werden, ist der scharfe Saum dieses Raumes. —

Aus der hier gegebenen Erklärung folgt zwanglos die Tatsache, daß der Umriß des Dunkelraumes einer Kathode stets äußerst nahe übereinstimmt mit der Gestalt der Dunkelfläche, welche dieselbe Kathode durch Ablenkung einer Schar unter sich paralleler, zur Achse dieser Kathode senkrechter primärer Strahlen erzeugt. — Auf die sich mit Leichtigkeit ergebende Erklärung verschiedener anderer Eigenschaften des Dunkelraumes hatte ich (l. c.) schon in meiner ersten Mitteilung hingewiesen.

Physikalisches Laboratorium der Sternwarte Berlin-Babelsberg.

Untersuchungen an Radiometern III[1].

Notiz zur Radiometertheorie von E. Einstein.

Von **Walther Gerlach** und **E. Madelung** in Frankfurt a. M.

(Eingegangen am 28. Dezember 1923.)

I. Die von Frl. E. Einstein[2]) gegebene Radiometertheorie führt zu einem Gesetz, nach welchem die Radiometerwirkung proportional dem Quadrat des Wärmeflusses ist. Bezeichnet man den Wärmefluß von der bestrahlten (Vorder-) Seite des Radiometers mit W_1, den von der Rückseite mit W_2, so soll sein — unter der Annahme, daß die bestrahlte Seite eine höhere Temperatur als die Rückseite hat —

$$R \sim (W_1^2 - W_2^2).$$

Dieses Ergebnis der Theorie scheint nicht vereinbar mit der strengen Gültigkeit der Proportionalität der Ausschläge eines Radiometers mit der absorbierten (oder auffallenden) Strahlungsenergie. Daß diese Proportionalität in sehr weiten Grenzen erfüllt ist, folgt neuerdings aus den schon veröffentlichten Messungen[3]) am „Kompensationsradiometer". Es wurde weiterhin durch besondere Versuche festgestellt, daß diese Proportionalität bei allen Drucken vorhanden ist, selbst bei so niedrigen Drucken, bei denen der Radiometereffekt nur noch von der Größenordnung des Strahlungsdrucks ist. Hierfür seien einige Belege gegeben, welche Messungen von Frl. A. Golsen[4]) entnommen sind:

Tabelle 1.

Strahlungsenergie	Gesamtausschlag α	Reiner Strahlungsdruck Σ	Radiometerausschlag R	Verh. $\frac{R_1}{R_2}$	Verh. $\frac{E_1}{E_2}$
E_1	68,0 ± 0,5	40,0	28,0	2,3	2,30
E_2	30,0 ± 0,5	18,0	12,0		2,30
E_1	57,5 ± 0,5	40,0	17,5	2,5	2,30
E_2	25,0 ± 0,5	18,0	7,0		2,30

[1]) Vorangehende Mitteilungen: I. ZS. f. Phys. **14**, 285, 1923. II. ZS. f. Phys. **15**, 1, 1923.

[2]) Edith Einstein, Diss. Zürich, 1922 (gedr. bei J. A. Barth, Leipzig) und Ann. d. Phys. **69**, 241, 1922. Vgl. auch G. Hettners Ausbau der Theorie, ZS. f. Phys **16**, 345, 1923, zur Erklärung der Westphalschen Radiometerkurven, ZS. f. Phys. **1**, 92, 431, 1920; **4**, 221, 1921.

[3]) W. Gerlach und H. Albach, ZS. f. Phys. **14**, 285, 1923.

[4]) W. Gerlach und A. Golsen, ZS. f. Phys. **15**, 1, 1923, wo der Beweis für die Unterscheidbarkeit von Radiometerausschlag und Strahlungsdruck gegeben ist; weitere Daten hierzu in den Ann. d. Phys. im Druck befindlich.

In Tabelle 1 bedeuten α die gemessenen Ausschläge bei den bolometrisch gemessenen Energien E_1 und E_2, Σ die bei tiefsten Drucken verbleibenden, dem reinen Strahlungsdruck zugehörenden Ausschläge, R die durch Differenzbildung $\alpha - \Sigma$ ermittelten, dem reinen Radiometereffekt zuzuordnenden Ausschläge. Die beiden Meßreihen sind bei zwei verschiedenen, zwischen 10^{-5} und 10^{-6} mm liegenden Drucken aufgenommen. Man sieht, daß R_1/R_2 und E_1/E_2 hinreichend gut übereinstimmen — so gut, als man bei der Schwierigkeit der Messungen bei solch niedrigen Drucken nur erwarten kann.

II. Zur besonderen Prüfung der Verhältnisse wurden noch weitere Versuche nach folgender Überlegung ausgeführt. In

$$R \sim (W_1^2 - W_2^2) = (W_1 + W_2)(W_1 - W_2)$$

bedeuten $(W_1 + W_2)$ die Summe, $(W_1 - W_2)$ die Differenz der beiden Wärmeströme von Vorder- und Rückseite. Diese beiden Faktoren können in folgender Weise unabhängig voneinander variiert werden. Der Radiometerflügel werde nicht nur von einer Seite, sondern von beiden Seiten bestrahlt. Man denke zunächst die beiden Strahlungsintensitäten so gewählt, daß keine Drehung des Radiometersystems eintritt. Unter idealen Verhältnissen (vollständige Symmetrie der beiden Seiten) sind dann jedenfalls die beiden Wärmeströme auf beiden Seiten gleich groß, also $W_1 - W_2 = 0$, während W_1 und W_2 für sich erheblich große Werte haben können. Nun vergrößern wir W_1 durch Hinzufügen einer weiteren Strahlungsquelle. Es resultiert dann ein Ausschlag. Nun werden die beiden ersten Strahlungsquellen entfernt, so daß die einseitige Zusatzstrahlung allein wirkt. Hierbei bleibt $(W_1 - W_2)$ sicherlich praktisch konstant, während $(W_1 + W_2)$ auf einen sehr viel kleineren Wert sinkt. Nach der Theorie von E. Einstein ist also eine wesentliche Verringerung des Ausschlags zu erwarten bei Wegnahme der beiden ersten Strahlungsquellen. Unsere Versuche ergaben im Gegensatz hierzu vollkommene Konstanz der Ausschläge.

III. Die Versuche wurden wie folgt ausgeführt: Ein Radiometerflügel aus beiderseitig blanker, 10μ dicker Nickelfolie war an einem normalen Radiometersystem angebracht. Die Gleichwertigkeit der beiden Seiten ergab sich aus der bis auf wenige Prozent gleichen Empfindlichkeit bei Bestrahlung einer der beiden Seiten. Zwei punktförmige Lichtquellen A und B — die von Herrn Pirani freundlichst zur Verfügung gestellten Wolframbogenlampen bewährten sich ausgezeichnet — werfen ihr Licht durch zwei gleiche Objektive annähernd parallelstrahlig auf die beiden Seiten des Radiometerflügels. Zur Erhöhung der Konstanz der Strahlung wurde das bei Belastungs-

schwankungen der Lampen besonders stark an Intensität variierende kurzwellige Licht von Grün ab durch Flüssigkeitsfilter absorbiert. Eine Wolframglühlampe lieferte die Zusatzstrahlung C. Der Ausschlag durch die Lampe A oder B sei in der folgenden Tabelle 2 mit α_0 bezeichnet. Bei Zustrahlung der beiden Lampen A und B wurde deren relative Intensität so abgeglichen, daß kein Ausschlag auftrat. Zu vergleichen ist der Ausschlag α_1 durch $A+B+C$ mit α_2 durch C allein. α_0 wurde durch gleichmäßige Änderung der Belastung der beiden Lampen A und B variiert. Die Ablesung erfolgte durch Spiegel und Skale (2 m Abstand).

Tabelle 2.

α_0	200 Skt.	$\sim$ 1000	$\sim$ 3500	∞ (Drehung d. Radiometers $>60^0$)		
α_1	158,5	153	146,5	145,3	181,3	147
α_2	159,0	154	147,5	150,0	190,0	150
$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1}$ . . .	0,3 Proz.	0,7 Proz.	0,7 Proz.	3,2	4,7	2

Die Tabelle gibt einige Messungen bei dem Drucke, bei dem der Radiometereffekt sein Maximum hat. Die Messungen der letzten Spalte mußten häufig wiederholt werden, weil hier bei der starken Belastung der Lampen A und B die geringsten Schwankungen der Netzspannung schon erhebliche Nullpunktsverschiebungen bedingt. Trotz der Unsicherheit dieser Messungen ist die geringe Differenz der Ausschläge α_1 und α_2 sichergestellt. Natürlich wurde geprüft, daß bei Änderung der Lage des Radiometerflügels die Kompensation der Strahlungen A und B ungeändert blieb. Gleiche Beobachtungen bei anderen Drucken ergaben dieselben Ergebnisse.

IV. Im Gegensatz zu unserem Befunde, daß $\alpha_1 = \alpha_2$, unabhängig von α_0, ist, würde die Einsteinsche Theorie einen großen Unterschied zwischen α_1 und α_2 erwarten lassen. Es würde nämlich angenähert sein — unter ABC jetzt die Strahlungsintensitäten der oben mit den gleichen Buchstaben bezeichneten Lampen verstanden —

$$(W_1 + W_2) \text{ prop. } A + B + C,$$
$$(W_1 - W_2) \text{ prop. } C,$$

also der Radiometereffekt

$$(W_1^2 - W_2^2) \text{ prop. } (A + B + C)\,C.$$

Es müßte also sein

$$\text{der Ausschlag } \alpha_1 \text{ prop. } (A + B + C)\,C,$$
$$\text{der Ausschlag } \alpha_2 \text{ prop. } C^2,$$

oder

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1 + \frac{A+B}{C}.$$

Da in unserem Falle $A+B$ ganz wesentlich größer als C war, scheint das Ergebnis des Experimentes $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ praktisch $= 1$ mit der Theorie nicht in Einklang zu bringen zu sein, auch nicht, wenn — wie zugegeben sein mag — die Proportionalität von $(W_1 - W_2)$ mit C nicht in solch weiten Grenzen allgemein als streng gültig angenommen wird. Die geringe Abweichung zwischen α_1 und α_2 bei sehr starker Strahlung $A+B$ dürfte auf jeden Fall nicht auf den Einsteinschen Effekt zurückzuführen sein, so daß der Radiometerausschlag proportional $(W_1 - W_2)$, nicht proportional $(W_1^2 - W_2^2)$ anzusetzen ist.

V. Bei Gelegenheit dieser Versuche wurden einige Beobachtungen gemacht, welche zur Beurteilung des Radiometereffekts nicht ohne Interesse zu sein scheinen: Wenn die Lampen A und B so kompensiert waren, daß das Radiometer in der gleichen Stellung sich befand, wie ohne Strahlung, und nun beide Lampen gemeinsam durch einen Schalter ausgeschaltet wurden, so erhielt das Radiometer einen kräftigen Stoß und schwang dann in die unverändert gebliebene Nullage zurück. Das ist natürlich nur zu verstehen durch die Annahme irgend einer offenbar unvermeidbaren Unsymmetrie. Wie auch aus anderen Versuchen bekannt, tritt die Einstellung bei Bestrahlung nicht momentan ein, sondern benötigt zu ihrer Ausbildung eine Zeit, die zwischen Sekunden und mehr als einer Minute beobachtet wurde. Ebenso dürfte nach Ausschalten der Strahlung der Radiometereffekt nicht plötzlich verschwinden. Wenn nun die Abklingungsgeschwindigkeit für beide Seiten des Radiometerflügels trotz gleicher Empfindlichkeit für stationären Ausschlag verschieden groß ist, so muß der beobachtete Effekt auftreten [1]).

Frankfurt a. M., Phys. Institut, 24. Dezember 1923.

---

[1]) Anmerkung: Auch andere Erscheinungen, welche bei einer noch im Gang befindlichen radiometrischen Untersuchung beobachtet wurden, scheinen für die Theorie des Radiometereffektes wichtig: Systeme, welche „negativen Effekt" zeigen (W. Gerlach und W. H. Westphal, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 218, 1919), erhalten bei Zulassung der Strahlung zunächst einen Stoß in positiver Richtung, kehren dann um und stellen sich konstant auf negativen Ausschlag ein. Nach Abschaltung der Strahlung erhält das System einen Stoß in negativer Richtung und kehrt dann um und in die Ruhelage zurück. Bei anderen Systemen tritt genau das Gegenteil ein. Auch das „Mittel" dieser beiden Erscheinungen wird beobachtet: Bei Zulassung der Strahlung bleibt das Radiometer zuerst eine meßbare Zeit in Ruhe und setzt sich erst dann mit normaler Schwingungsdauer in Bewegung. Näheres hierüber in einer späteren Mitteilung.

Über die Verwendbarkeit von Radium- und Urannormallösungen für Emanationsmessungen. II.

Von **P. Ludewig** und **E. Lorenser** in Freiberg (Sachsen).

(Aus dem Radium-Institut der Bergakademie Freiberg, Sachsen.)

Mit einer Abbildung. (Eingegangen am 5. Januar 1924.)

In unserer ersten Mitteilung [1]) haben wir über Messungen berichtet, die an einer Anzahl von Radium- und Urannormallösungen während des ersten Jahres nach dem Beginn der Meßreihe ausgeführt worden sind. Die Lösungen sind inzwischen während eines zweiten Jahres kontrolliert worden. Im folgenden soll abschließend über das Ergebnis berichtet werden.

Bei der Berechnung der Tabellen in der früheren Mitteilung haben wir eine Korrektur auf Druck angebracht. Wir haben inzwischen die verwendete Apparatur näher daraufhin untersucht, welchen Einfluß der Druck auf die γ-Strahlung eines Radiumpräparates und auf die α-Strahlung von Radiumemanation ausübt und haben bei der Berechnung der im folgenden mitgeteilten Tabellen die ermittelte Druckabhängigkeit in Rechnung gesetzt.

Die Abhängigkeit des γ-Strahleneffektes vom Druck. Die in Fig. 2 unserer vorigen Mitteilung dargestellte Apparatur wurde in der Weise zu den Versuchen verwendet, daß auf das Holztischchen (bzw. auf ein anderes Gestell, bei dem das Radiumpräparat eine geringere Entfernung vom Ionisationsraum hatte) ein Radiumpräparat von 0,977 mg Ra-Element gelegt und der Voltabfall für Drucke zwischen 400 bis 1000 mm Quecksilber bestimmt wurde. In der Tabelle 1 sind die erhaltenen Werte zusammengestellt, und zwar enthält die erste Vertikalreihe die Drucke, die zweite die direkt gemessenen Volt pro Stunde, die dritte den Normalverlust (s. unten) und die vierte die Volt pro Stunde minus Normalverlust. Diese Werte wurden in ein Koordinatensystem eingetragen, in dem als Abszisse der Druck, als Ordinate die Zahlen der 4. Spalte eingetragen wurden. Man erhält so innerhalb eines großen Druckbereiches eine gerade Linie, die der Gleichung

$$J_{760} - b = (J_p - b) \cdot \frac{760}{p}$$

entspricht. Rechnet man mit dieser Gleichung die gemessenen Ionisationswerte auf 760 mm um, so erhält man die Werte in Spalte 5,

[1]) P. Ludewig und E. Lorenser, ZS. f. Phys. **13**, 284, 1923.

deren Abweichungen voneinander in Spalte 6 angegeben und, wie man sieht, sehr gering sind. Setzt man die Ionisation dagegen dem Druck direkt proportional, so ergeben sich die Werte in Spalte 7, die einen deutlichen Gang zeigen. Die in Tabelle 2 zusammengestellten γ-Strahlenkontrollen wurden daher mit Hilfe der obigen Gleichung auf Druck korrigiert.

Der Normalverlust darf in diesem großen Druckbereich nicht als ganz konstant angenommen werden, weil der Voltverlust im Ionisationsraum sich mit dem Druck ändert. Der Gesamtnormalverlust (z. B. 79 Volt pro Stunde bei 718 mm Druck) setzt sich in diesem

Tabelle 1.

Abhängigkeit der γ-Strahlenionisation vom Druck.

Druck in mm Hg	Volt/St.	N.-V.	Volt/St.−N.-V. $= J_p$	J_{760}	Abweichung vom Mittel in Proz.	J_{760} (alter Wert)
408	829	68	761	1321	− 1,02	1417
473	945	70	875	1338	+ 0,26	1405
545	1063	73	990	1337	+ 0,18	1381
609	1178	75	1103	1336	+ 0,11	1377
673	1278	77	1201	1341	+ 0,48	1357
718	1347	79	1268	1336	+ 0,11	1343
772	1444	80	1364	1344	+ 0,71	1342
842	1558	82	1476	1343	+ 0,63	1332
946	1708	84	1624	1327	− 0,56	1305
1020	1822	86	1736	1322	− 0,86	1294
			Mittel . . .	1334,5		

Tabelle 2. γ-Strahlenkontrollen.

$J_{760} - b = (J_p - b) \cdot \frac{760}{p} [1 + \alpha (t - 20)]$, darin ist $b = 112$.

Datum	Barom. p	Temp. t	Volt/St. direkt gemessen	Volt/St. umgerechnet	Abweichung vom Mittel in Proz.
1. Dez. 1921 . .	727	20	1291	1342	+ 0,51
18. Jan. 1922 . .	724	20	1273	1331	− 0,31
20. Febr. „ . .	719	20	1307	1331	− 0,31
3. März „ . .	732	21	1288	1338	+ 0,21
24. Mai „ . .	729	21	1282	1336	+ 0,06
28. Juni „ . .	724	22	1284	1350	+ 1,11
8. Juli „ . .	732	23	1275	1332	− 0,24
13. Okt. „ . .	737	22	1293	1338	+ 0,21
20. Okt. „ . .	730	20,5	1288	1336	+ 0,06
28. Nov. „ . .	729	18	1300	1337	+ 0,13
5. Dez. „ . .	731,5	20	1287	1335	− 0,01
9. Mai 1923 . .	720,5	21	1280	1348	+ 0,96
12. Nov. „ . .	729	18	1295	1337	+ 0,13
17. Nov. „ . .	725	19	1271	1325	− 0,76
			Mittel . . .	1335,2	± 0,4

Falle zusammen aus dem Isolationsverlust und dem Ionisationsverlust im Elektrometer ohne γ-Strahlung (zusammen 13,1 Volt/St.), dem Ionisationsverlust im Elektrometer infolge der γ-Strahlung des Radiumpräparates (34,3 Volt/St.) und schließlich dem Ionisationsverlust im Hauptionisationsraum beim Druck p ohne die zusätzliche γ-Strahlung (31,6 Volt/St. bei 706 mm). In der Tabelle 1 ist infolge der Abhängigkeit des letzten Summanden vom Druck kein konstanter, sondern ein mit dem Druck veränderlicher Normalverlust in Rechnung gesetzt worden.

Druckabhängigkeit der Ionisation der α-Strahlung von Radiumemanation im Hauptionisationsraum. Zur Bestimmung

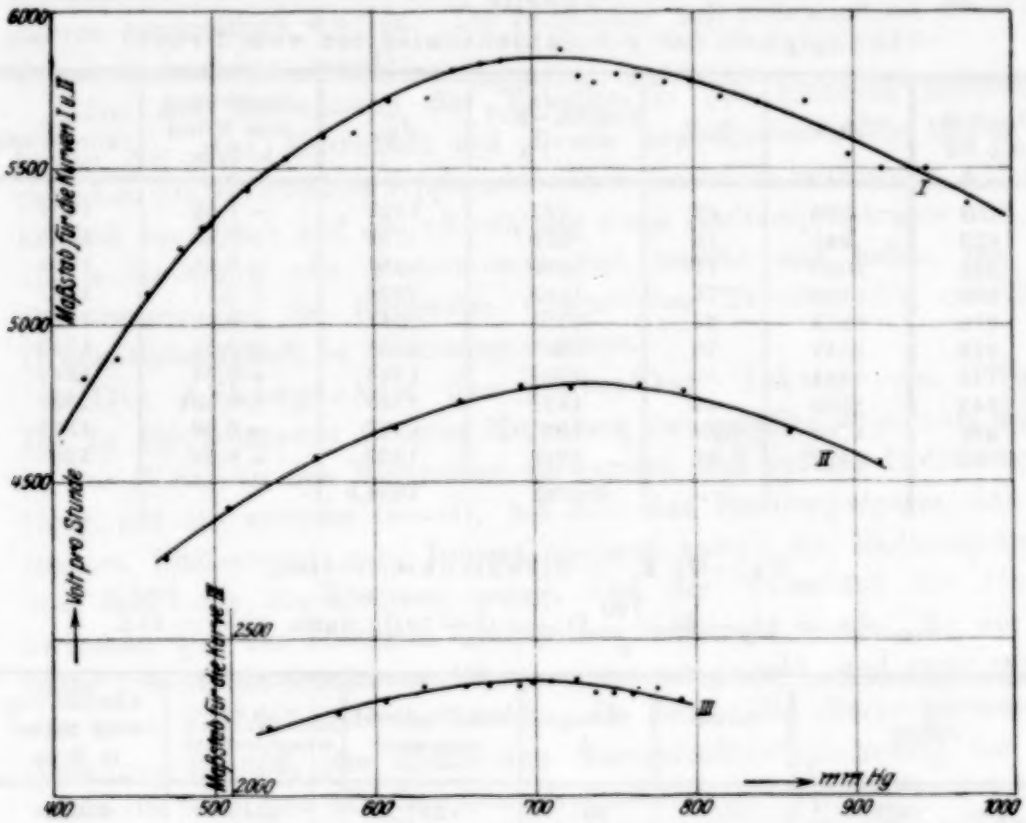


Fig. 1.

dieser Druckabhängigkeit wurde eine bestimmte Menge Radiumemanation in den Ionisationsraum der früher beschriebenen Apparatur gebracht und der Druck zwischen 400 und 1000 mm Quecksilbersäule geändert. Es wurde sorgfältig darauf geachtet, daß ein Emanationsverlust im Laufe der Messung nicht eintreten konnte. Gemessen wurde in der Zeit zwischen der 3. und 5. Stunde nach der Einführung der Emanation in den Ionisationsraum. Der Zerfall der Emanation in dieser Zeit wurde in Rechnung gesetzt. Die Fig. 1 zeigt das Er-

gebnis der Messungen für drei verschiedene Emanationsmengen. Wie man sieht, hat in allen Fällen der gemessene Effekt ein Maximum, das um so stärker ausgeprägt ist, je größer die Emanationsmenge ist. Das Maximum ist daraus zu erklären, daß bei niedrigen Drucken die Ionisation der α-Strahlen um so weniger ausgenutzt wird, je kleiner

Tabelle 3. Radiumnormallösungen.

Nr. der Lösung	Datum der Messung	Barometer	Temperatur	Volt/St.	Mittelwert	Abweichungen in Proz.
1001	1. Dez. 1921	735	20	2653	2622	+ 1,18
	16. Jan. 1922	713	21	2564		− 2,20
	1. März „	724	20	2607		− 0,57
	5. Juli „	727	23	2607		− 0,57
	13. Okt. „	737	22	2635		+ 0,50
	1. Dez. „	731	20	2642		+ 0,76
	4. Mai 1923	731	21,5	2615		− 0,26
	15. Nov. „	722	19	2651		+ 1,10
1002	7. Dez. 1921	729	20	2631	2626	+ 0,19
	18. Jan. 1922	724	20	2651		+ 0,95
	2. März „	722	20	2617		− 0,34
	18. Mai „	727	20	2624		− 0,07
	14. Okt. „	738	21,5	2619		− 0,26
	2. Dez. „	730	20	2623		− 0,11
	5. Mai 1923	730	20	2590		− 1,37
	16. Nov. „	716	19	2652		+ 1,00
1010	20. Jan. 1922	725	19	2653	2634	+ 0,72
	24. Febr. „	733	20	2657		+ 0,87
	19. Mai „	732	21	2631		− 0,11
	6. Juni „	722	24,5	2603		− 1,17
	16. Okt. „	729	22	2647		+ 0,49
	4. Dez. „	734	19	2651		+ 0,64
	7. Mai 1923	728	21	2596		− 1,44
1011	24. Jan. 1922	730	20	2665	2664	+ 0,03
	3. März „	732	21	2639		− 0,94
	26. Mai „	729	20	2666		+ 0,07
	7. Juli „	729	20	2660		− 0,15
	17. Okt. „	728	21	2690		+ 0,98
1013	26. Jan. 1922	729	20	2650	2623	+ 1,03
	7. März „	718	21	2610		− 0,49
	29. Mai „	736	23,5	2626		+ 0,14
	8. Juli „	732	23	2606		− 0,65
1014	30. Jan. 1922	714	20	2655	2670	− 0,56
	6. März „	725	21	2619		− 1,91
	24. Mai „	729	21	2673		+ 0,11
	10. Juli „	731	21,5	2662		− 0,30
	19. Okt. „	732	22	2674		+ 0,15
	5. Dez. „	732	21	2683		+ 0,48
	8. Mai 1923	727	22	2692		+ 0,82
	22. Nov. „	722	17	2702		+ 1,20
1051	11. Mai 1923	721	20	2663	2683	− 0,75
	24. Nov. „	729	18	2703		+ 0,75
				Mittel . . .	2640	

der Druck und je größer deshalb die Zahl der α-Strahlen ist, die vorzeitig auf die Wandung aufprallen; das spätere Wiederabnehmen der Ionisation rührt von der verstärkten anfänglichen Wiedervereinigung der Ionen bei hohen Drucken her. Die Kurve III entspricht einer Emanationsmenge, wie sie bei der Kontrolle der Normallösungen in Frage kam. Man sieht aus der Kurve, daß in dem Bereich, in dem der Druck in Freiberg praktisch schwankt (715 bis 735 mm), eine die Meßgenauigkeit übersteigende Änderung des Ionisationseffektes nicht vorhanden ist, so daß praktisch eine Korrektur auf Druck bei dieser α-Strahlung nicht nötig ist.

Untersuchung der Radium- und Urannormallösungen. In der ersten Mitteilung waren 6 Radiumlösungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt und 3 selbstbereitete Urannormallösungen während eines Jahres in vier bis sechs aufeinander folgenden Messungen in ihrer Konstanz kontrolliert worden. Im Laufe des Jahres 1923 wurden diese Lösungen noch je zweimal gemessen. In den Tabellen 3 und 4 sind alle Werte mit Berücksichtigung der oben dargelegten Druckabhängigkeit zusammengestellt. Die Lösungen sind danach auch bei 8- bis 9facher Benutzung nicht unbrauchbar geworden und zeigen eine Übereinstimmung sowohl für die einzelne Lösung wie

Tabelle 4. Urannormallösungen.

Nr. der Lösung	Datum der Messung	Barometer	Temperatur	Volt/St.	Mittel	Abweichung in Proz.
1	15. Nov. 1921	—	—	2909	2898	+ 0,38
	11. Jan. 1922	718	20	2863		− 1,20
	20. Febr. „	718	20	2886		− 0,41
	30. Mai „	731	20	2882		− 0,55
	28. Juni „	724	22	2840		− 2,00
	10. Okt. „	730	20	2914		− 0,55
	20. Nov. „	721	18	2965		+ 2,30
	14. Juni 1923	722	18	2926		+ 0,96
	12. Nov. „	729	18	2900		+ 0,07
2	17. Nov. 1921	718	20	2872	2904	− 1,10
	13. Jan. 1922	722	20	2882		− 0,76
	23. Febr. „	727	20	2878		− 0,90
	1. Juni „	728	20	2881		− 0,76
	3. Juli „	730	20	2909		+ 0,17
	11. Okt. „	728	21,5	2920		+ 0,55
	21. Nov. „	736	19	2885		− 0,65
	15. Juni 1923	726	20	2972		+ 2,34
	13. Nov. „	724	18	2939		+ 1,20
3	12. Okt. 1922	732	20	2963	2939	+ 0,81
	22. Nov. „	739	17	2882		− 1,94
	16. Juni 1923	723	21	2973		+ 1,15
	14. Nov. „	718	21	2940		+ 0,03

auch untereinander innerhalb der Grenzen von 1 bis höchstens 2 Proz. Vor jeder Messung wurde wie früher die Apparatur durch die γ-Strahlung des oben genannten Radiumpräparates auf die Konstanz der Empfindlichkeit geprüft. Die gemessenen Werte wurden in der angegebenen Weise auf Druck korrigiert. Die Abweichung der γ-Strahlenkontrolle vom Mittelwert beträgt im Mittel nur 0,4 Proz. Die Apparatur hat sich demnach auch während des zweiten Jahres als konstant erwiesen.

Zusammenfassung.

1. Die in unserer früheren Mitteilung beschriebene Untersuchung von Radium- und Urannormallösungen wurde während eines zweiten Jahres fortgesetzt. Es ergab sich, daß die Lösungen auch bei einer 9fachen Benutzung nicht an Brauchbarkeit eingebüßt hatten und untereinander bis auf 2 Proz. übereinstimmten. Sie haben sich also im Laufe von zwei Jahren bis auf 2 Proz. konstant erhalten.

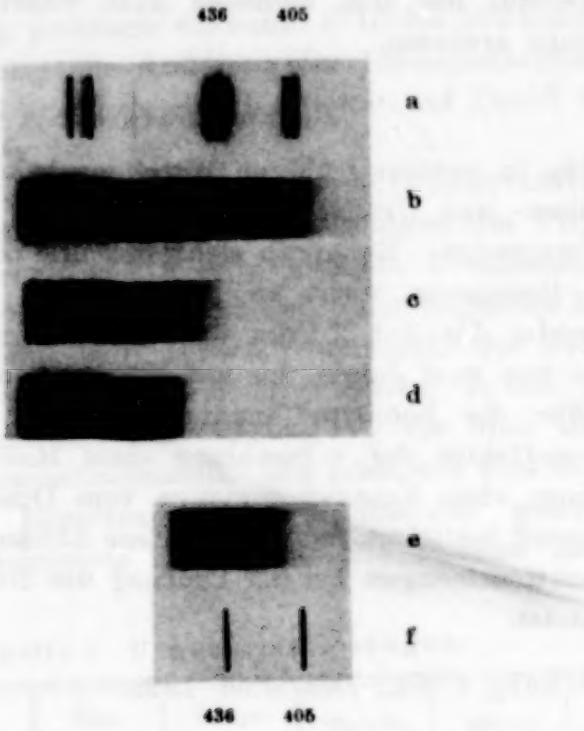
2. Für die benutzte Apparatur wurde die Abhängigkeit des Ionisationseffektes der γ-Strahlung eines Radiumpräparates und der α-Strahlung einer Emanationsmenge vom Druck im Ionisationsgefäß experimentell bestimmt und die erhaltene Abhängigkeit zur Berechnung der Emanationsmengen bei der Prüfung der Normallösungen in Rechnung gesetzt.

Freiberg i. Sa., Dezember 1923.

Berichtigung zu der Arbeit: „Zur Prüfung des Äquivalentgesetzes an Trockenplatten".

Von **J. Eggert** und **W. Noddack.**

Die Fig. 3 zu der oben genannten Arbeit [1]) (S. 306) ist durch ein Versehen entstellt, da die Linien 436 und 405 mμ nicht untereinander stehen. Erst aus der folgenden Figur, bei der dieser



Fehler korrigiert ist, erkennt man unmittelbar, was die Spektrogramme beweisen sollen: Die photographische Empfindlichkeit der Bromsilberplatte (*c*) beginnt an derselben Stelle — 460 mμ — wie die Absorption der Bromsilberschmelze (*d*) und nicht wie die der Bromsilberplatte (*c*).

Berichtigung

zu der Arbeit von V. Dolejšek: Bemerkungen über die *N*-Serie der *X*-Spektren [2]).

Die Figuren sind teilweise nicht richtig eingesetzt:

Fig. 1 wird Fig. 3. Fig. 3 wird Fig. 4. Fig. 4 wird Fig. 1.

Berichtigung

zu der Arbeit von Hans Kienle: Die Absorption des Lichtes und die Grenze des Sternsystems [3]).

S. 389, Unterschrift der Figur lies Sternsystems statt Spektrums.

S. 391, Formel III untere Grenze des zweiten Integrals lies $h_m r^2$ statt $h_m r$.

---

[1]) ZS. f. Phys. **20**, 299—314, 1924. — [2]) Ebenda **21**, 111—119, 1924. — [3]) Ebenda **20**, 388—393, 1923.

Eine spektroskopische Bestätigung der Bohrschen Besetzungszahlen bei Cäsium.

Von **E. Fues** in Stuttgart [1]).

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 17. Dezember 1923.)

§ 1. Einleitung. In früheren Arbeiten [2]) hat der Verfasser gezeigt, daß man die empirischen Termwerte einiger Dublettspektren rechnerisch durch die Annahme begründen kann, das Leuchtelektron bewege sich auf allen seinen Bahnen stets unter dem Einfluß desselben statischen Zentralfeldes. Diese Voraussetzung ist begründet in dem von Bohr [3]) mit Hilfe seines Korrespondenzprinzips aus der Auswahlregel für die Termkombinationen gezogenen Schluß, daß die Elektronenbewegung auch in komplizierten Atomen angenähert eine Zentralbewegung sein muß. Sie geht aber darüber vielleicht nicht unerheblich hinaus. Wenn nämlich das Wechselspiel der Elektronen beim Zustandekommen der Zentralbewegung eine wesentliche Rolle spielt und dies in ungleicher Weise bei verschiedenen Bahnen tut, so kann es sein, daß man streng genommen für jeden Bahntypus ein eigenes Zentralkraftfeld setzen müßte, um gerade diese Form der Zentralbewegung zu erklären. Besonders leuchtet ein, daß die Vorstellung eines ein für allemal konstanten Zentralfeldes nur eine Annäherung sein kann bei Prozessen, die den Röntgentermen entsprechen, also der Wiederbindung eines einer inneren Gruppe des Atoms entrissenen Elektrons.

Wenn man trotzdem mit dem Verfasser annimmt, ein und dasselbe Kraftfeld genüge zur Erklärung der mannigfachen möglichen Bewegungen im Atom, so liegt darin ein Verzicht auf Berücksichtigung des Wechselspiels solcher Elektronen, die durch einen gemeinsamen Bewegungsrhythmus sich gegenseitig in ihrer Bahn erhalten. Und man vernachlässigt die Rückwirkung auf die übrige Atomkonfiguration, welche mit einem Wiedereinfangungsvorgang ins Atominnere notwendig verbunden ist. Die Größenordnung der letzten Vernachlässigung läßt sich glücklicherweise abschätzen, auch geschieht

---

[1]) Als Habilitationsschrift an der Technischen Hochschule Stuttgart eingereicht.

[2]) E. Fues, Die Berechnung wasserstoffunähnlicher Spektren aus Zentralbewegungen der Elektronen, Teil I, ZS. f. Phys. **11**, 364, 1922 und Teil II, ZS. f. Phys. **12**, 1, 1922; ferner: Die Verwandtschaft des Bogenspektrums von Natrium mit dem ersten Funkenspektrum von Magnesium und dem zweiten Funkenspektrum von Aluminium. ZS. f. Phys. **13**, 211, 1923.

[3]) Vgl. z. B. die Arbeit in Ann. d. Phys. **71**, 228, 1923.

die Miteinbeziehung der Röntgenterme in unsere Betrachtung nur vorbehaltweise und ohne Anspruch auf ebenso gute rechnerische Übereinstimmung. Wie schwer dagegen der erstgenannte Verzicht ins Gewicht fällt bei der Durchrechnung des Spektrums eines Atoms, kann nur die Erfahrung zeigen, es scheint, daß man sich begnügen muß, die Termwerte bis auf einige Prozente genau zu erhalten. Darin liegt aber so lange noch ein Fortschritt, als der Einfluß des Wechselspiels sich schon im einfachsten Fall, bei Helium, trotz vielfacher Bemühung unserer Kontrolle entzieht. Auch ist es vielleicht nicht aussichtslos, aus den Schwierigkeiten, die sich unserer vereinfachten Rechnung entgegenstellen, Rückschlüsse auf das Wechselspiel zu ziehen.

Der Verfasser hat früher beschrieben, wie man aus dem Spektrum eines Elements das Atomfeld finden kann. Auf Natrium I angewandt, ergibt sich ein Feld, das die Spektralterme mit der erwähnten Genauigkeit zu berechnen erlaubt. Auch ist es möglich, die Verwandtschaft der Spektren Na I, Mg II, Al III in einfacher Weise zu übersehen.

Die frühere Rechnung bedurfte in mehrfacher Hinsicht einer Ergänzung. Die Tragfähigkeit der Methode, vor allem die Berechtigung der Miteinbeziehung der Röntgenterme, konnte nur geprüft werden an einem Atom mit mannigfaltig ausgebildetem Atomrumpf, weshalb das Cäsiumbogenspektrum in Angriff genommen wurde. Dazu war es aber notwendig, die benutzten Formeln erst auf relativistische Rechnung zu erweitern, deren Einfluß (wie man an den „relativistischen“ Röntgendubletts sieht) hier schon recht groß ist.

§ 2 enthält eine kurze Ableitung der zugrunde liegenden Formeln mit dieser Erweiterung. Aus der Darstellung geht hervor, daß von universellen Konstanten nur die Rydbergsche Zahl und Sommerfelds Feinstrukturkonstante in die Rechnung eingehen. Der Zusammenhang zwischen gefundenem Potential und wachsender Kernabschirmung (dem Bindeglied zur Modellvorstellung) wird in einer für die praktische Rechenarbeit geeigneten Weise formuliert.

§ 3 gibt die Ergebnisse der Berechnung von Cs I. Ein Atomfeld wird angegeben, in welchem Bahnen existieren, die einerseits energetisch den Termen des Cäsiumspektrums, andererseits den Quantenregeln (Ganzzahligkeit der Quantenzahlen k und n') entsprechen. Damit ist erwiesen, daß sich die angegebene Methode auch auf Elemente mit sehr kompliziertem Atomrumpf ausdehnen läßt, und § 4 zeigt, daß sie sogar an Überzeugungskraft für solche Atome gewinnt. Außer der Erweiterung auf ein

kompliziertes Element schien es weiterhin nützlich, auch die Durchrechnung eines solchen Atoms vorzunehmen, bei dem von vornherein ein starker Einfluß des Wechselspiels der beiden äußeren Elektronen zu erwarten war.“ Deshalb wird in demselben Paragraphen auch über die Berechnung des Bogenspektrums von Magnesium berichtet.

§ 4 endlich zeigt, wie man sich die gefundenen Zentralfelder modellmäßig deuten kann, noch ohne bestimmte Vorstellungen über das Wechselspiel der Elektronen. Der Wunsch nach einer solchen Deutung liegt nahe. Er ist in diesem Zusammenhang aber auch methodisch begründet. Die früheren Arbeiten des Verfassers hatten absichtlich von modellmäßigen Voraussetzungen abgesehen und versuchten auf rein spektroskopischem Wege den Verlauf des Atomfeldes zu begründen. Nur unbeabsichtigt, sozusagen als Nebenprodukt, stellten sich Aussagen über die absolute Größe der Bahnen im Atom ein; die Bohrschen Besetzungszahlen für die einzelnen Elektronengruppen aber kamen in der Feldberechnung gar nicht vor. Von spektroskopischen Tatsachen ausgehend fragt man ja nur: Welches Zentralfeld ermöglicht Bahnen, deren Energie den Spektraltermen gleichkommt und für welche die Quantenregeln erfüllt sind? Von modellmäßigen Voraussetzungen geht in die Rechnung nichts ein; nicht einmal die Kernladung spielt darin eine Rolle, und auch die wasserstoffähnliche Fernwirkung des Atomrumpfes wird selbst wieder aus spektroskopischen Daten, nämlich der Wasserstoffähnlichkeit der höheren Serien, gestützt. Man hätte also, von spektroskopischen Tatsachen ausgehend, den Feldverlauf im Cäsiumatom in gleicher Weise berechnen müssen, auch wenn unsere allgemeinen Vorstellungen über den Aufbau der inneren Schalen des Atoms z. B. eine Vertauschung der Anzahl von *K*- und *L*-Elektronen verlangten. Es ist aber einleuchtend, daß — vollends bei festgelegten Bahndimensionen — eine solche Vertauschung der Besetzungszahl eine gewaltige Änderung des Atomfeldes im Innern hervorrufen müßte. Hier liegt also die Möglichkeit einer inneren Kontrolle des gefundenen Atomfeldes vor, die um so erwünschter ist, als das zuerst eingeschlagene Verfahren das Feld im Innern nur durch eine mühsame Interpolation und nur mit einer gewissen Unsicherheit liefert.

In § 4 ist deshalb beschrieben, wie sich der Verfasser die Konstruktion eines statischen Ersatzmodells denkt, ausgehend von der Annahme, daß die spektroskopische Feldberechnung mit ähnlicher Genauigkeit, mit der sie die Spektralterme darzustellen gestattet, uns Aufschluß gibt über die wahren Abmessungen der

Atomschalen, und weiter ausgehend von den Bohrschen Besetzungszahlen der einzelnen Bahngruppen. Aus diesem Modell ergibt sich bei sehr naheliegenden Annahmen über die Elektronenverteilung ein zweiter Feldverlauf, der nun wirklich in guter Übereinstimmung ist mit dem ersten ohne Modellvorstellung gewonnenen. Diese Übereinstimmung bedeutet eine Bestätigung der Bohrschen Besetzungszahlen aus spektroskopischen Daten. Es ist zu erwarten, daß solche Ersatzmodelle auch für andere Zwecke brauchbar sein werden. Unsere Methode zur Bestimmung des Atomfeldes hat dadurch jedenfalls an Bequemlichkeit und Zuverlässigkeit sehr gewonnen; man kann in späteren Fällen, nach einer ersten rohen Abschätzung der Atomdimensionen auf spektroskopischem Wege, das außerhalb des Atoms zuverlässig berechnete Feld mit großer Sicherheit ins Atominnere hinein verfolgen, dadurch, daß man sich das betreffende Modell konstruiert und ausrechnet, wie bei ihm die Abschirmungszahl mit wachsendem Kernabstand ansteigt.

§ 2. Wir setzen zunächst voraus, die Zentralkraft, durch welche die Wirkung von Kern und inneren Elektronen ersetzt gedacht wird, sei schon bekannt und besitze das Potential V, welches natürlich eine Funktion des Kernabstandes R ist. Diesen messen wir wie früher in Einheiten von der Größe des innersten Wasserstoffradius ($a_0 = 0{,}532 \cdot 10^{-8}$ cm)

$$R = \frac{r}{a_0}, \tag{1}$$

was einerseits die Rechnung vereinfacht, andererseits einen leichten Überblick über die Atomdimensionen gestattet, wenn wir uns merken, daß die Strecke $R = 1$ ungefähr die Hälfte einer Ångström-Einheit bedeutet.

$$V \text{ ist} = \int_{\infty}^{r} \frac{e^2 Z_{\text{eff}}(r)}{r^2}\, dr = \frac{e^2}{a_0} \int_{\infty}^{R} \frac{Z_{\text{eff}}(R)}{R^2}\, d\,R.$$

Mit Einführung der „Abschirmungszahl“ s wird

$$Z_{\text{eff}\,(R)} = Z - s_{(R)},$$

und ferner, unter Abspaltung eines wasserstoffähnlichen Feldes mit p anziehenden Kernladungseinheiten [1])

$$Z_{\text{eff}\,(R)} = p + (Z - p - s_{(R)}).$$

[1]) In großer Entfernung wird ja das Feld jedes Atomrumpfes wasserstoffähnlich. Beim neutralen Atom bleibt nach Abzug des Leuchtelektrons $p = 1$, beim einfachen Ion $p = 2$ usf.

Demgemäß spaltet sich auch das Potential in einen wasserstoffähnlichen Anteil V_1 und einen anderen für das Atom charakteristischen Anteil V_2:

$$V = V_1 + V_2,$$

wobei
$$V_1 = -\frac{p e^2}{a_0} \cdot \frac{1}{R} \tag{2}$$

und
$$V_2 = \frac{e^2}{a_0} \int_{\infty}^{R} \frac{Z - p - s_{(R)}}{R^2} \, dR.$$

Zur graphischen Darstellung benötigen wir eine daraus hervorgehende Funktion

$$Q_{(R)} = \frac{a_0}{e^2} R^2 V_2 = R^2 \int_{\infty}^{R} \frac{Z - p - s_{(R)}}{R^2} \, dR. \tag{3}$$

Gleichzeitig ergibt sich, daß aus gefundenem Q die Funktion $s_{(R)}$ wie folgt berechnet wird:

$$Z - p - s_{(R)} = -\frac{2Q}{R} + \frac{dQ}{dR}. \tag{4}$$

Formel (4) erlaubt den Übergang von der aus spektroskopischen Daten berechneten Funktion Q zu einer modellmäßigen Auffassung von $s_{(R)}$. Der umgekehrten Formel (3) entsprechend wird in § 4 von einer gewissen Ladungsverteilung ausgegangen und eine Nachkonstruktion von Q versucht.

Um bei der praktischen Rechnung eine bequeme Integration zu ermöglichen, muß der Verlauf Q abschnittweise durch Parabelbogen ersetzt werden

$$Q = a R^2 + b R + c. \tag{5}$$

Dem entspricht wegen (4) eine Beschreibung des Abschirmungsverlaufs im gleichen Intervall durch

$$s_{(R)} = (Z - p - b) - \frac{2c}{R}, \tag{6}$$

d. h. die Abschirmungszahl s steigt vom Wert $s_1 = (Z - p - b) - \frac{2c}{R_1}$ an der unteren Grenze R_1 des betreffenden Abschnitts bis zum Wert $s_2 = (Z - p - b) - \frac{2c}{R_2}$ an der oberen Grenze R_2 in hyperbolischer Weise an. Um also ein Atomfeld für praktische Rechenzwecke geeignet zu beschreiben, genügt es, die Werte der Abschirmungszahl für einzelne Kernabstände (die Grenzen der aneinanderstoßenden Integrationsintervalle) anzugeben; diese Werte sind durch hyperbolische Funktionen (6) verbunden zu denken.

In dieser Weise ist z. B. in Fig. 1, § 3, das Feld des Cäsiumatoms angegeben, wie es sich aus spektroskopischen Daten gewinnen läßt. Die entstandene zackige Kurve muß natürlich zum Schluß noch geglättet werden.

Wie aber findet man aus einer Reihe spektroskopisch gegebener Termwerte T[1]) die Funktion Q? Die Antwort lautet: Das Feld Q muß so beschaffen sein, daß in ihm Bahnen denkbar sind, deren Energiewerte einerseits den Termen T, deren Wirkungsintegrale andererseits den Quantenregeln entsprechen.

Nun kann als gesichert gelten, daß allen Termen einer Serie dieselbe azimutale Quantenzahl k zukommt, und es kann auch über das ganzzahlige Anwachsen von k in der Reihe der Serien kein Zweifel mehr bestehen. Offen bleibt höchstens die Frage, ob die Werte von k der Reihe der ganzen oder der halben Zahlen zu entnehmen sind, wenn auch Bohr und Coster[2]) den Gründen, die für eine Halbzahligkeit von k sprechen[3]), schwerwiegende Gründe für die Ganzzahligkeit entgegengesetzt haben.

Die stabilen Bahnen im Feld werden weiter ausgezeichnet durch die „radiale Quantenzahl“

$$n' = \frac{1}{h} \oint p_r \, dr \tag{7}$$

(Bohrs Hauptquantenzahl n ist $= k + n'$, d. h. gleich der Summe zweier Wirkungsintegrale über verschiedene Zeitintervalle; sie wird allgemein zur Termbezeichnung n_k gebraucht). (7) formen wir in üblicher Weise mit Benutzung des Energiesatzes um

$$W = T + V = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\varphi^2}{r^2}\right) + V_1 + V_2. \tag{8}$$

Unter Benutzung von (1), (3) der azimutalen Quantenbedingung $k = \frac{1}{h}\int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi p_\varphi}{h}$, und den bekannten Formeln

$$W = -thc, \qquad a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m e^2}, \qquad R_y = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3 c}$$

[1]) Wir verstehen darunter im folgenden nicht die in der spektroskopischen Literatur meist angegebenen Termzahlen t, sondern die auf die Rydbergsche Zahl als Einheit bezogenen Werte $T = t/Ry$.

[2]) N. Bohr und D. Coster, ZS. f. Phys. **12**, 367, 1923, N. Bohr, Ann. d. Phys. **71**, 266, 1923.

[3]) Vgl. z. B. eine der Landéschen Arbeiten über Zeemaneffekte (z. B.: ZS. f. Phys. **15**, 189, 1923), in welcher Landé halbzahlige Werte K benutzt, allerdings ohne eine Entscheidung, ob neben dieser magnetisch bestimmten Größe ein mechanisch bestimmtes ganzzahliges k existiert.

entsteht aus (7) und (8)

$$n' = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{\sqrt{P-Q}}{R}\,dR, \tag{9}$$

wobei $$P = -\frac{T}{2}R^2 + pR - \frac{k^2}{2}.$$

Man sieht, daß in der Berechnung von n' der auf die Rydbergsche Zahl bezogene Termwert T, die in großer Entfernung noch wirksame überschüssige Kernladung p und die angenommene azimutale Quantenzahl k eingehen, außerdem natürlich die Funktion Q, welche je nach dem Standpunkt erst aus der Ganzzahligkeit der Werte n' erschlossen oder aus Annahmen über die Ladungsverteilung hergeleitet wird. Praktisch empfiehlt es sich, künftig beide Gesichtspunkte zur schrittweisen Annäherung an die wirklichen Verhältnisse zu kombinieren.

In einfacher Weise können diese Formeln auf den Fall relativistischer Rechnung erweitert werden. An die Stelle des Energiesatzes in der einfachen Form (8) tritt, wie Sommerfeld[1]) gezeigt hat, die Beziehung

$$W = T + V = m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) + V, \tag{8'}$$

woraus

$$p_r^2 = 2m_0 W - 2m_0 V - \frac{p_\varphi^2}{r^2} + \frac{1}{c^2}(W-V)^2$$

in (7) einzusetzen ist. Mit der alten Bedeutung von Q und mit Benutzung der Abkürzungen

$$\sigma = \frac{-W}{2mc^2} = 1{,}209\,.\,10^{-10}\,t = 1{,}102\,.\,10^{-5}\,T$$

$$\alpha^2 = \frac{e^2}{m a_0 c^2} = 5{,}315\,.\,10^{-5}$$

(α ist Sommerfelds Feinstrukturkonstante $= \frac{2\pi e^2}{hc}$) entsteht

$$n' = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{dR}{R}\left\{-\frac{T}{2}R^2(1-\sigma) + pR(1-2\sigma) - \frac{k^2}{2}\left(1-\frac{p^2}{k^2}\alpha^2\right)\right.$$
$$\left. - Q(1-2\sigma) - p\alpha^2\frac{Q}{R} - \frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{-Q^2}{R^2}\right)\right\}^{1/2}. \tag{10}$$

Weil die Genauigkeit der Rechnung aber nur bis zu einigen Prozenten reicht, sieht man, daß mindestens für alle optischen Terme die Größe

[1]) Vgl. z. B. Atombau und Spektrallinien, 3. Aufl., Zusatz 16, S. 735, Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn Akt.-Ges., 1922.

σ gegen 1 zu vernachlässigen ist und daß auch der Faktor von $k^2/2$ gleich 1 gesetzt werden darf. In Betracht kommen nur die letzten zwei Glieder, weil in großer Kernnähe $\frac{-Q}{R}$ sich der Zahl $(Z-p)$ nähert, also für schwere Elemente beträchtliche Werte annehmen kann. Man hat also bei relativistischer Rechnung an Stelle der alten Funktion Q die neue

$$Q' = Q + \alpha^2\left(\frac{Q}{R} - \frac{1}{2}\frac{Q^2}{R^2}\right) \tag{3'}$$

einzuführen, was einer verstärkten Kernanziehung entspricht (so daß im Punkt $R=0$ $Q' = -\alpha^2\left(Z-p+\frac{(Z-p)^2}{2}\right) \neq 0$ und $Z_{\text{eff}} = \infty$ wird). Mit dieser Erweiterung finden wir wiederum

$$n' = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{R_{\min}}^{R_{\max}} \frac{\sqrt{P-Q'}}{R}\,dR, \tag{9'}$$

wobei P die alte Bedeutung aus (9) behält.

Im Fall großer Kernladung und äußerst kleiner k-Werte ($^1/_2$?) genügen freilich auch diese Betrachtungen nicht, weil dann die endliche Masse des Kerns berücksichtigt werden muß [1]). Für die anderen Fälle aber reichen die entwickelten Formeln zu.

§ 3. Fig. 1 gibt ein Bild des Atomfeldes von Cäsium, wie man es annehmen muß, um für dessen Bogenspektrum die Werte der radialen Quantenzahlen einigermaßen ganzzahlig zu erhalten.

Dabei ist vorausgesetzt, daß k der Reihe der ganzen Zahlen folgt. Weiter ist — bei der ausgezogenen Kurve I — mit Bohr [2]) angenommen, der Term $3\mathfrak{D}$ entspreche einer relativ weit außen liegenden 3_3-Kreisbahn, oder — dies ist die Grundannahme für die gestrichelte Kurve II — er entspreche einer 5_3-Tauchbahn. Nach der zweiten Vorstellung müßten alle $\mathfrak{D}$-Terme Tauchbahnen entsprechen. Dem Verfasser war nicht bekannt ob vielleicht Messungen des Starkeffekts die eine oder andere Auffassung von vornherein befürworten. In Fig. 1 scheint es, daß mit der Auffassung der $\mathfrak{D}$-Bahnen als Außenbahnen die Vorstellung eines einheitlichen Feldes für alle

[1]) Aus der Korrektur des Gliedes mit $k^2/2$ in (10) oder einer ähnlichen Betrachtung kann deshalb auch nicht geschlossen werden, daß das Elektron in den Kern stürze, sobald p/k bzw. $\frac{Z}{k} > \frac{1}{\alpha}$ ($\simeq 137$). Vgl. die diesbezügliche Bemerkung von Sommerfeld in den Berichten der Münchener Akademie, November 1916.

[2]) Z. B. Göttinger Vorträge 1922.

Bahnen nur unter einem gewissen Zwang vereinbar sei, der sich in der starken Knickung der Kernladungskurve anzeigt.

Die Felder wurden auf ähnliche Weise erhalten, wie dies früher (ZS. f. Phys. **12**, 1, 1922) für Natrium beschrieben worden ist. Ausgegangen wird von der Forderung, daß bei Kreisbahntermen die Librationsgrenzen der Bahn in den einen Bahnradius R_0 zusammenfallen, die Kurven P und Q (vgl. z. B. Fig. 2 in § 4) sich also für

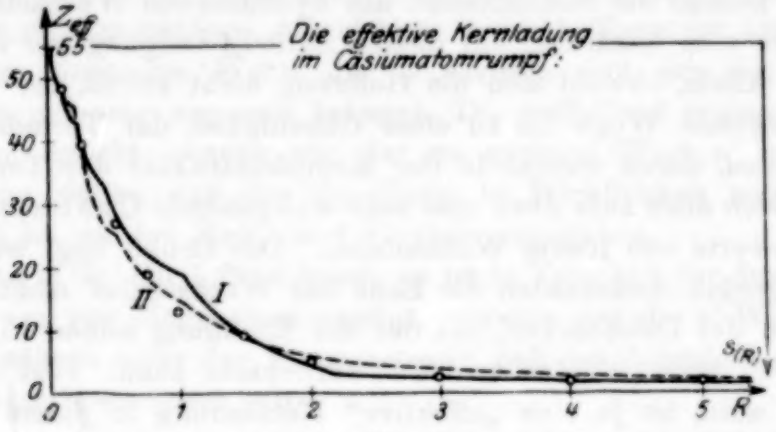


Fig. 1.

$R = R_0$ berühren und der radiale Impuls verschwindet. Damit ist Anfang und Ende von Q festgelegt, und es braucht nur so ergänzt zu werden, daß die n'-Werte einzelner herausgegriffener Spektralterme genau ganzzahlig werden, oder daß ihre mittleren Abweichungen für alle Terme möglichst gering werden.

Die Tabelle 1 enthält die mit den eben beschriebenen Feldern aus den Cäsiumtermen [1]) berechneten Werte n' [in der oberen Zeile (n'_{I})

Tabelle 1.

Term	K	L_{I}	M_{I}	N_{I}	O_{I}	1 S	2 S	3 S	4 S
	1_1	2_1	3_1	4_1	5_1	6_1	7_1	8_1	9_1
n'_{I}	− 0,03	0,95	2,01	3,05	3,96	5,10	6,06	7,03	8,03
n'_{II}	− 0,03		1,93			5,22			8,01
Term		L_{III}	M_{III}	N_{III}	O_{III}	2 P	3 P	4 P	5 P
		2_2	3_2	4_2	5_2	6_2	7_2	8_2	9_2
n'_{I}		− 0,03	1,01	2,03	2,72	3,90	4,82	5,81	6,80
n'_{II}		− 0,04	0,94			4,09			6,94
Term			M_{V}	N_{V}	3 D	4 D	5 D	6 D	7 D
			3_3	4_3	3_3 5_3	4_3 6_3	5_3 7_3	6_3 8_3	7_3 9_3
n'_{I}			0,03	1,04	0	0,91	1,88	2,87	3,86
n'_{II}			− 0,14		2,05	2,81	3,77	4,76	5,75

[1]) Die Terme des optischen Spektrums sind entnommen aus Paschen-Götze, Seriengesetze der Linienspektren, Berlin, Springer, 1922; die des Röntgengebiets aus Bohr und Coster, ZS. f. Phys. **12**, 350, 1923.

die Auffassung des $3\mathfrak{D}$ als eines 3_3-Terms, in der unteren (n'_{II}) als eines 5_3-Terms]. Die erwartete Ganzzahligkeit ist in beiden Fällen ziemlich gut erfüllt und damit aufs neue gezeigt, es lassen sich einheitliche Zentralfelder finden, für welche alle spektroskopisch vorgeschriebenen Bahnen die Quantenregeln einhalten.

Die geringen Abweichungen zeigen einen systematischen Gang derselben Art wie bei dem früher berechneten Spektrum Natrium I. In ihnen kommt die Besonderheit des dynamischen Wechselspiels der Elektronen zum Ausdruck, auf dessen Berücksichtigung wir verzichten mußten. Allein, obwohl sich die Hoffnung nicht erfüllt, auf dem hier eingeschlagenen Wege bis zu einer Genauigkeit der Termdarstellung vorzudringen, deren Grenze in der Komplexstruktur der Terme läge, bestätigt sich doch aufs neue eine sehr weitgehende Unabhängigkeit der Termwerte von jenem Wechselspiel. Der Grund liegt wohl darin, daß auf großen Außenteilen der Bahn das Wechselspiel nicht wirksam ist, und in der Dehnbarkeit, mit der die Rechnung seinen Einfluß auf den inneren Bahnschleifen zum Teil aufnehmen kann. Was empirisch gefunden wird, ist ja eine „effektive" Kernladung in jedem Abstand, deren Deutung offen bleibt. Auch der „polarisierende Einfluß" des Leuchtelektrons auf den Atomrest prägt sich in der gefundenen Funktion mit aus.

Tabelle 1 begegnet ferner dem Bedenken, ob die Miteinbeziehung der Röntgenterme gerechtfertigt ist. Sind es nicht andere Kraftwirkungen, die ein kurz eintauchendes drittes Elektron im K-Bereich erfährt, als diejenigen, unter welchen bei der Emission der K-Serie das herausgerissene zweite K-Elektron seinen Platz dauernd wieder einnimmt? Gewiß ist in der Energiebilanz der Wiederbindung eines K-Elektrons eine dauernde merkbare Ausdehnung aller äußeren Schalen enthalten, während das periodische Eintauchen eines von außen kommenden Elektrons höchstens ein leichtes Pulsieren des Rumpfes erzeugen wird. Auch ist es nicht gleichgültig, ob das zweite K-Elektron seinen Platz wieder einnimmt oder ein drittes überzähliges in den K-Bereich taucht. Trotzdem läßt sich von vornherein sagen, daß jedenfalls der K-Term in unsere Rechnung ohne Korrektur einbezogen werden darf, denn bei ihm beträgt die innere Abschirmungszahl nur ungefähr 1 Proz., die äußere sicher weniger als 10 Proz. der Kernladung 55, und von beiden Abschirmungszahlen wäre nur eine kleine Änderung zu berücksichtigen, die man wohl mit 3 Proz. von Z noch zu hoch einschätzt. Der äußerste der Röntgenterme kann also bei der zu erwartenden Genauigkeit unserer Berechnungsart unterworfen werden, andererseits ist sie den optischen Termen geradezu angepaßt.

Bei den übrigen Röntgentermen ist die begangene Ungenauigkeit nicht so leicht abzuschätzen, man kann aber sagen, daß die ihnen zugrunde liegenden Prozesse Zwischenglieder darstellen zwischen dem K-Vorgang einerseits, dem Hereinfallen des Leuchtelektrons auf eine Außenbahn andererseits. Es erscheint also die Erwartung nicht unberechtigt, daß die Fehler, welche bei der Miteinbeziehung der Röntgenterme in unsere Rechnung entstehen, nur wenige Prozente betragen, und diese Erwartung findet ihre Bestätigung in den Zahlen der Tabelle 1. Auf die einzige größere Abweichung beim 5_2-Term ist kein Gewicht zu legen, denn die Werte des O-Niveaus sind aus den Röntgenspektren nur sehr ungenau bekannt. Die auffallend geringe Differenz $O_{\mathrm{I}}-O_{\mathrm{III}}$ spricht ebenso wie der zu geringe Wert n' aus unserer Rechnung dafür, daß der O_{III}-Term in Wirklichkeit ungefähr halb so groß ist, als bei Bohr und Coster angegeben.

Wie in Tabelle 1 für Cäsium, so ist in Tabelle 2 für das Triplettspektrum von Magnesium gezeigt, wieweit sich die n'-Werte ganzen Zahlen nähern unter der Voraussetzung, daß das Atomfeld des Magnesiumatoms beschrieben wird

durch	$Z_{\mathrm{eff}} =$	11,1	10,1	8,5	5,28	2,34	1,31	0
für	$R =$	0,1	0,2	0,5	1	3	7	25

(Für die drei Niveaus eines Tripletts sind entsprechend unserer Genauigkeit mittlere Werte genommen.)

Tabelle 2.

Term . . .	$2s$	$3s$	$4s$	$5s$	$2p$	$3p$	$4p$	$5p$	$6p$
n'	3,08	4,06	5,06	6,05	0,97	1,93	2,92	3,91	4,91
Term . . .	$3d$	$4d$	$5d$	$6d$	$7d$	$8d$		$4b$	
n'	0	1,03	2,05	3,06	4,06	5,06		0	

Von vornherein war es wahrscheinlich, daß bei den Erdalkalien der Einfluß des zweiten äußeren Elektrons die Festlegung eines einheitlichen Zentralfeldes stark stören würde. Wie man sieht, kommt das aber in den Zahlen des Triplettspektrums noch nicht zum Ausdruck. Tabelle 2 weist keine stärkeren Abweichungen von der Ganzzahligkeit auf, als bei den Alkalispektren vorkommen.

Dagegen ist es unmöglich, eine einheitliche Darstellung des Einfachlinienspektrums von Mg zu geben, ohne auf das Wechselspiel der beiden äußersten Elektronen Rücksicht zu nehmen. Die erste Nebenserie dieses Spektrums hat einen ganz ungewöhnlichen Verlauf, der höchstens durch sehr abweichende Annahmen über das Atomfeld auf unsere Weise zu erklären wäre. Unmöglich ist es, die

Annahmen so zu gestalten, daß gleichzeitig die Reihe der S-Terme sich befriedigend berechnen läßt. Bemerkenswert ist, daß man bei dem Versuch, ein einheitliches Zentralfeld für das Einfachlinienspektrum aufzustellen, dahin geführt wird, eine sehr undurchdringliche Rumpfkonfiguration anzunehmen. In den betreffenden Atomzuständen erschwert offenbar das zweite Elektron dem ersten sein Eintauchen in den Rumpf. Das ist ganz dasselbe, was sich schon in den P-Termen von Helium angedeutet findet, die bekanntlich als einzige Terme unter allen bekannten einen negativen Quantendefekt aufweisen. Andererseits reiht es sich der von Bohr[1]) ausgesprochenen Vermutung an, daß bei manchen Elementen der zweiten Spalte (Zn, Cd, Hg) die Bahnen mit $k \geqq 2$ gar nicht mehr in den Rumpf eindringen. Jedenfalls aber bewirkt das Mitspielen des zweiten äußeren Elektrons in manchen Fällen eine besonders starke Abschirmung, fast Abstoßung des ersten, und wir möchten annehmen, daß dieses Verhalten schon in den eigentlichen Erdalkalien sich vorbereitet. Dabei sind die Triplettspektren im Sinne größerer Einfachheit bevorzugt, allein auch bei ihnen kommen in den schwereren Elementen solche Anormalitäten vor[2]).

§ 4. Die Integrale (7) bzw. (9) und (9′) sind zu führen über das Intervall zwischen zwei Nullpunkten des Integranden. Die Integrationsgrenzen sind daher ausgezeichnet durch die Gleichheit der Funktionen P und Q bzw. durch den Schnitt ihrer Kurvenbilder. Der Verfasser hat früher schon beschrieben, wie man aus einer graphischen Darstellung der Funktionen P und Q die Bahnabmessungen gewinnen kann, bezeichnen doch die eben genannten Schnittpunkte auch die Librationsgrenzen der Bahn. Eine leichte Integration würde dazu die Bahnformen ergänzen.

Es soll hier gezeigt werden, daß in diesem Bild des Atoms, auch wenn es hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Bahnen, der Phasen-

---

[1]) Ann. d. Phys **71**, 282, 1923.

[2]) G. Wentzel hat (ZS. f. Phys. **19**, 53, 1923) neuerdings einen vom Verf. schon in seiner ersten Arbeit (ZS. f. Phys. **11**, 376, 1923) ausgesprochenen Gedanken näher verfolgt, indem er darauf hinwies, daß sehr wohl die ersten Bahnen einer Serie den Atomrumpf noch kaum streifen können, während die exzentrischeren Bahnen derselben Serie von einem bestimmten Glied an tief in den Rumpf eintauchen müssen. Er hat dies mit demselben Beispiel belegt, das der Verf. a. a. O. schon in diesem Zusammenhang nannte, nämlich die unstetig verlaufende Hg-P-Serie. Falls diese Deutung zutreffend ist, darf man wohl annehmen, daß hier ein ebensolcher Einfluß des zweiten Elektrons vorliegt, wie wir ihn oben für Mg und He angenommen haben, denn die Betrachtungen über die Größe des Atomrumpfes können für Quecksilber kaum hinreichen, die Außenlage der ersten P-Bahnen zu erklären.

beziehungen und der Abweichungen infolge des Wechselspiels unvollständig ist, doch bereits eine hohe innere Harmonie liegt. Man kann den Abschirmungsverlauf, wie er sich aus spektroskopischen Daten ergibt (vgl. Fig. 1), nachkonstruieren, indem man sich ein statisches Ersatzmodell des Atoms baut, zu welchen gerade die oben bezeichneten Abmessungen und die Bohrschen Besetzungszahlen der Bahntypen verwendet werden müssen.

Fig. 2 enthält als graphische Darstellung der Cs-Röntgenterme die Parabeln P_{n_k} [nach Formel (9)] und die Kurven Q, aus denen $Z_{\text{eff}(R)}$ in Fig. 1 nach (4) hervorgegangen ist. Nun ist z. B. aus dem

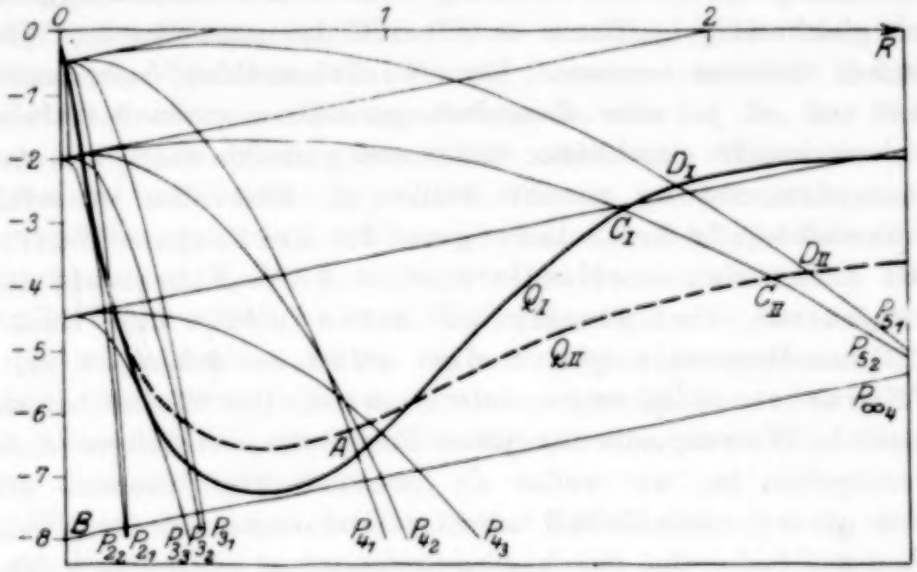


Fig. 2.

Schnitt A von P_{4_1} mit Q der Wert $R_{\max} = 0{,}9$ der 4_1-Bahnen im Cäsiumrumpf zu entnehmen. Mit dem maximalen Kernabstand auf einer Bahn hängt aber der zeitlich mittlere Kernabstand

$$R_0 = \frac{\oint R\,dt}{\oint dt} = \frac{\oint \frac{R^2 dR}{\sqrt{P-Q}}}{\oint \frac{R\,dR}{\sqrt{P-Q}}}$$

in einfacher Weise zusammen. Während für Kreisbahnen $R_0 =$ dem Bahnradius ist, nähert sich R_0 bei Keplerellipsen mit wachsender Exzentrizität dem Wert $R_0 = 0{,}75\ R_{\max}$, und erfahrungsgemäß erhält man auch für die Schleifenbahnen im Atominnern eine gute Abschätzung, wenn man $R_0 = 0{,}8$ bis $0{,}75\ R_{\max}$ ansetzt. Wir werden daher z. B. die ruhenden sechs Ersatzladungen, durch welche wir die abschirmende Wirkung der sechs Bohrschen 4_1-Elektronen

im Cäsiumatom ersetzen wollen, im Kernabstand $R_0 = 0{,}75 \cdot 0{,}9 = 0{,}7$ annehmen und müssen uns nur noch entscheiden über die räumliche Verteilung gegenüber dem Fahrstrahl zum Aufelektron, die wir den Ersatzladungen zuweisen wollen. Hierüber ist zunächst nichts Bestimmtes zu sagen, bei den wirklichen Atomen wird sicherlich das rhythmische Wechselspiel der Elektronen die Verteilung mitbestimmen. Ohne Kenntnis desselben kann man wenigstens zwei extreme Fälle von vornherein ausschließen: den Zusammenstoß beim Eindringen des Leuchtelektrons in den Rumpf einerseits, das gleichzeitige völlige Ausweichen der sechs Ladungen diametral zum Leuchtelektron andererseits. Vielmehr wird die Vorstellung einer leicht durchdringlichen, ziemlich gleichmäßig im Raum verteilten Elektronenwolke der Wirklichkeit am nächsten kommen. Die zwei Fahrstrahlen, zum Leuchtelektron und zu je einer Ersatzladung, müssen einen mittleren Winkel miteinander einschließen, und es muß weiterhin die Symmetrie der Rumpfanordnung gewahrt bleiben [1]). Dies alles ist erfüllt, wenn man sich jede Ersatzladung auf die Ecken eines Würfels verteilt denkt, der so orientiert ist, daß der Fahrstrahl zum Leuchtelektron eine vierzählige Achse bildet und dessen halbe Raumdiagonale gleich dem oben berechneten mittleren Kernabstand R_0 angenommen wird. Der Würfel hat eine abschirmende Wirkung, die für jeden Punkt der vierzähligen Achse leicht anzugeben ist, wir wollen sie „würfelartig" nennen. Man kann aber unschwer den Einfluß beliebiger Deformationen des Würfels übersehen und findet, daß der Abschirmungsverlauf gegenüber solchen Deformationen in einem ziemlich weiten Bereich wenig empfindlich ist. Starke Änderungen treten erst bei Annäherung an die vorhin abgelehnten Fälle (Zusammenstoß oder völliges Ausweichen) ein, die nicht in Frage kommen.

Baut man sich auf die beschriebene Weise, durch würfelartige Verteilung der Ersatzladungen in einem Abstand, der jedesmal dem mittleren Kernabstand des betreffenden Bahntypus gleich ist, ein Ersatzmodell des Atomrumpfes, so wird man von ihm dieselbe Kraftwirkung auf das Leuchtelektron erwarten, wie sie ohne Benutzung der Bohrschen Besetzungszahlen und ohne irgendwelche Voraussetzungen über die Größe des Atoms rein aus spektroskopischen Daten erschlossen wurde. Diese Erwartung ist berechtigt, wenn unser Bild des Atoms die ihm zugeschriebene innere Harmonie

[1]) Unter Verzicht auf Berücksichtigung des polarisierenden Einflusses des Leuchtelektrons auf den Rumpf.

besitzt. Tatsächlich findet man bei eingehender Durchrechnung des Cäsium-Ersatzmodells in verschiedenen Kernabständen die mit 0 in Fig. 1 bezeichneten Werte der effektiven Kernladung, und es darf wohl festgestellt werden, daß die Übereinstimmung mit den spektroskopischen Abschirmungskurven eine befriedigende ist, und daß unsere modellmäßige Deutung der Fig. 2 darin eine starke Stütze findet.

Wir sehen in ihr ein zuverlässiges Bild des Atoms auch in vielen Einzelzügen. Wir bemerken, daß die Elektronengruppen derselben Hauptquantenzahl sich in auffallender Weise in wirklichen Schalen vereinigen, besitzen doch z. B. die drei mit 4_1, 4_2, 4_3 bezeichneten Bahngruppen nahezu denselben Wert von R_{max}, also auch von R_0 (s. Fig. 2). Abgesehen von kurzen Besuchen einzelner Elektronen im Gebiet der inneren Schalen halten also die K-, L-, M-, N-Elektronen jeweils ziemlich getrennte Bereiche ein. Wir sehen ferner ein, warum bei Cs zwar 5_k- und 6_k-Bahnen zu den Elementen des Atomrumpfes gehören, daß aber noch keine Möglichkeit für das Auftreten einer 4_4-Bahn vorliegt. Der Repräsentant einer solchen Bahn in Fig. 2 wäre eine vom Punkt B ausgehende Parabel, welche die Kurve Q berühren müßte. Q müßte aber dazu die von B ausgehende Grenzgerade aller n_4-Parabeln überschneiden. Das ist für Cs noch nicht der Fall, aber man versteht, daß schon wenige Elemente später diese Möglichkeit eintritt.

Wegen der schon besprochenen Unsicherheit des O_{III}-Niveaus ist aus Fig. 2 nicht zu entnehmen, ob die 5_1- oder die 5_2-Bahnen die äußersten des Atomrumpfes sind. Tabelle 1 macht es wahrscheinlich, daß der O_{III}-Term erheblich kleiner ist, was die Punkte C in Fig. 2 über die Punkte D hinausrücken läßt. Der äußerste Kernabstand der Rumpfbahnen wird dann ungefähr 3 R-Einheiten groß, d. h., der Halbmesser des Cäsiumrumpfes beträgt danach 1,5 Å. In dem zusammenfassenden Bericht von Herzfeld[1]) über die Methoden zur Bestimmung der absoluten Größe der Atome und Ionen werden für das Cs-Ion Radien angegeben, die zwischen 0,83 und 2,22 Å-Einheiten liegen. Nachdem sich die in Fig. 2 enthaltenen Vorstellungen über die Atomdimensionen spektroskopisch so gut bewährt haben, möchten wir annehmen, daß das in dieser Arbeit beschriebene Verfahren sich an Zuverlässigkeit jenen anderen mindestens einreiht. Es besitzt zudem noch den Vorzug, daß wir als Größe des Atoms nicht einen irgendwie definierten Wirkungsquerschnitt erhalten, sondern bestimmte

[1]) Jahrb. d. Rad. u. El. **19**, 259, 1923.

Angaben über die Elektronenbahnen, sowie über das Abklingen der elektrostatischen Kraftwirkung des Atoms nach außen.

Die angeführten Einzelheiten mögen zeigen, daß solche Betrachtungen, wie wir sie an Fig. 2 angeschlossen haben, trotz ihrer Unvollständigkeit geeignet sind, unsere Vorstellung von den Atomen zu entwickeln. Es ist dabei nichts zu erwarten, was nicht in den von Bohr gegebenen Bildern schon enthalten wäre, aber die innere Harmonie der Bohrschen Vorstellung kommt anschaulich zum Ausdruck.

Der Verfasser hat die Übereinstimmung des rein spektroskopisch berechneten Feldes mit dem andern, auf dem Umwege über Modellvorstellungen gewonnen, in vier Fällen bestätigt gefunden. Man kann annehmen, daß die vorgeschlagenen Ersatzmodelle auch für andere Zwecke geeignet sind, die vom Atomrumpf ausgehenden Kraftwirkungen in Annäherung zu beschreiben.

Zusammenfassung: Die Arbeit enthält eine kurze für praktische Zwecke eingerichtete und auf relativistische Rechnung erweiterte Formulierung des Zusammenhangs zwischen dem Spektum eines Atoms und dem in ihm wirksamen Zentralkraftfeld. Die Ergebnisse der Berechnung des Cäsium- und Magnesiumbogenspektrums werden mitgeteilt. Es wird gezeigt, wie man den spektroskopisch erschlossenen Abschirmungsverlauf mit Hilfe eines Ersatzmodells deuten kann und daß die Zusammensetzung dieses Modells in notwendiger Übereinstimmung mit den Bohrschen Vorstellungen über die Besetzungszahlen der Atombahnen ist.

Über das Wahrscheinlichkeitsgesetz in Anwendung auf die radioaktive Strahlung des Poloniums [1]).

Von **Walther Kutzner** in Berlin.

Mit fünf Abbildungen. (Eingegangen am 21. Dezember 1923.)

Im Jahre 1910 hat Bateman [2]) gezeigt, daß auf die zeitliche Verteilung der von radioaktiven Präparaten emittierten Strahlung die Wahrscheinlichkeitsgesetze anwendbar seien. Teilt man einen längeren Beobachtungszeitraum in gleichlange Zeitabschnitte, so ist durch

$$E(l_x) = s\,\frac{m^x e^{-m}}{x!}\quad\text{(Batemansche Formel)}$$

die erwartungsmäßige Zahl der Zeitabschnitte gegeben, in denen $0, 1, 2 \ldots x$ Teilchen auftreten. Dabei ist s die Gesamtzahl der Zeitabschnitte, über die sich die Beobachtung erstreckt hat, m die experimentell festgestellte mittlere Teilchenzahl pro Zeitabschnitt, also $= L/s$, wenn L die gesamte zur Zählung gelangte Teilchenzahl ist, e die Basis der natürlichen Logarithmen und x die Reihe der ganzen Zahlen. Dieselbe Formel für die Verteilung ist auch von L. v. Bortkiewicz [3]) aufgestellt worden.

Stellt man nun den nach obiger Formel zu erwartenden Zahlen die Zahlen gegenüber, die sich empirisch durch eine einfache Gruppierung der Zeitabschnitte, in denen $0, 1, 2 \ldots x$ Teilchen registriert sind, ergeben, so hat man damit ein Mittel in der Hand, um zu prüfen, ob die Strahlung in der Tat rein zufällig vonstatten geht. Eine völlige Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment ist von vornherein natürlich nicht zu erwarten. Es fragt sich nur, ob sich eventuell zeigende Abweichungen systematisch wiederholen und immer im selben Sinne liegen. Sollte dies tatsächlich der Fall sein, dann ist man aber notwendig gezwungen, die volle Gültigkeit obiger Formel in bezug auf ihre Anwendbarkeit auf die radioaktive Strahlung zu verneinen, und muß notwendig der Strahlung den Charakter reiner Zufälligkeit unter Umständen absprechen.

Über die Größe und den Sinn sich zeigender Abweichungen von der Batemanschen Formel kann man sich ein objektives Urteil

---

[1]) Auszug aus der Berliner Dissertation.

[2]) Bateman, Phil. Mag. (6) **20**, 698—707, 1910.

[3]) L. v. Bortkiewicz, Die radioaktive Strahlung als Gegenstand wahrscheinlichkeitstheoretischer Untersuchungen. Berlin 1913.

bilden, wenn man den von Lexis[1]) in die theoretische Statistik eingeführten Divergenzkoeffizienten, Q^2, betrachtet. Diese Größe ergibt sich zu

$$Q^2 = \frac{\sum_0^x l_x x^2}{L} - m.$$

Dabei bedeutet L die gesamte gezählte Teilchenzahl, m die mittlere Teilchenzahl pro Zeitabschnitt, l_x die Besetzung jeder Gruppe von 0 bis x. x die Reihe der ganzen Zahlen.

Je mehr dieser Divergenzkoeffizient Q^2 sich der Einheit nähert, um so besser ist die Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment. Wir haben dann eine normale Dispersion der betreffenden Zahlenreihe vor uns. Bleibt dagegen der Divergenzkoeffizient merklich hinter 1 zurück, oder überschreitet er die Einheit wesentlich, so haben wir eine unternormale bzw. übernormale Dispersion. Eine unternormale Dispersion z. B. würde sich dadurch zu erkennen geben, daß die Zeitabschnitte, in denen Teilchenzahlen registriert sind, die dem Mittelwert nahe liegen, häufiger, die Zeitabschnitte dagegen mit viel oder wenig Teilchen seltener vorkommen, als der Theorie entspricht.

In der Tat zeigen nun die bisherigen Untersuchungen[2]) ein derartiges Verhalten. Die Gültigkeit der Batemanschen Formel ist also noch keineswegs in allen Fällen sichergestellt und damit ebensowenig die Annahme reiner Zufälligkeit für die Emission der Teilchen. Es schien daher von Interesse zu sein, dieses Problem noch einmal eingehend zu untersuchen, zumal sich daran eine Reihe weiterer wichtiger Probleme anschließt.

Methode und Versuchsanordnung. Für die Untersuchung, die auf eine genaue zeitliche Registrierung hinausläuft, kann selbstverständlich nur eine völlig objektive Methode in Frage kommen. Zu einer solchen kann man die Geigersche Zählmethode[3]), die auf Erregung von Spitzenentladungen beruht, benutzen. Diese wurde daher auch bei den weiter unten beschriebenen Zählungen zur Anwendung gebracht. Die Versuche wurden mittels der Geigerschen Kammer, in Verbindung mit einem Saitengalvanometer zur photographischen Registrierung gemacht, so daß jeder subjektive Fehler

[1]) Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinungen in der menschlichen Gesellschaft. Freiburg i. Br. 1877.

[2]) E. Rutherford und H. Geiger, Phil. Mag. (6) **20**, 698—707, 1910. Hess u. Lawson, Wien. Ber. **125** [2a], 1215, 1916. Kovarik, Phys. Rev. **13**, 272—280, 1919.

[3]) H. Geiger, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 534, 1913.

ausgeschlossen ist. Die nähere Anordnung zeigt Fig. 1. Die Schaltung geht aus der Figur hervor. Die eigentliche Zählkammer K war aus 0,2 mm starkem Kupferblech gepreßt. Sie war vorn halbkugelförmig, im übrigen ein Zylinder. Der Durchmesser dieses Zylinders betrug 2,6 cm, die Länge 4 cm. Die vordere Halbkugel hatte einen 4 mm breiten horizontalen Schlitz, dessen Ränder gut gerundet waren, und der mit einer Al-Folie von etwa 1 cm Luftäquivalent für α-Strahlen verschlossen war. Durch vorgesetzte Blenden konnte ein beliebiger Zählraum ausgeblendet werden. Bei einer anderen Kammer war vorn lediglich ein Loch von 1 mm Durchmesser, das mit sehr dünner Al-Folie verschlossen war. Die Spitzen bestanden aus Platin, das

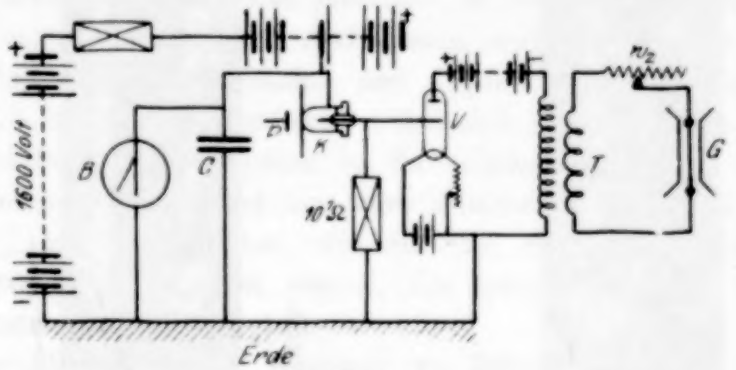
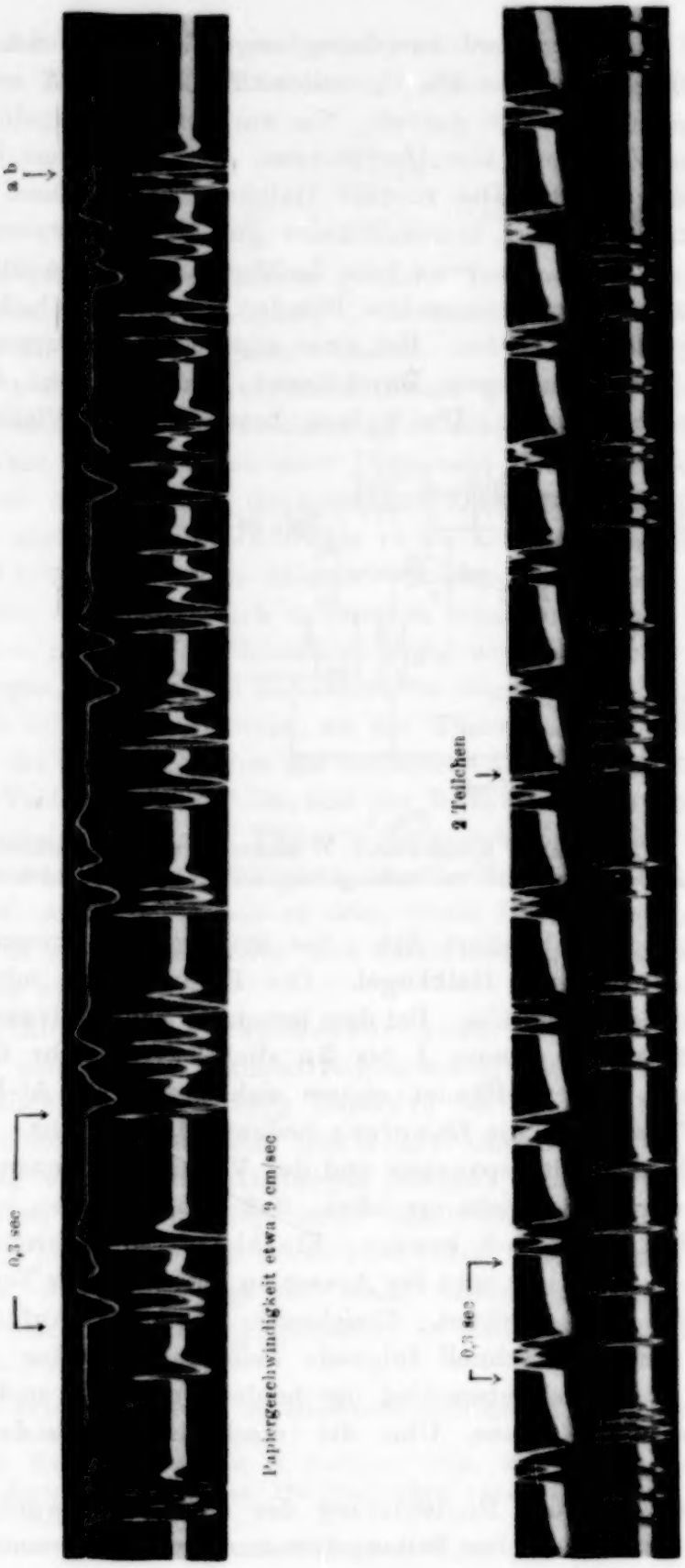


Fig. 1.

K Zählkammer, P Präparat, C Kondensator, B Elektrometer, V Verstärkerröhre, T Transformator, w_2 Widerstand vor Saitengalvanometer, G Saitengalvanometer.

sich ganz vorzüglich bewährt hat. Sie standen im Krümmungsmittelpunkt der vorderen Halbkugel. Die Kammer war mit Luft von Atmosphärendruck gefüllt. Bei dem benutzten Saitengalvanometer bestand die Saite aus einem 1 bis 2 μ dicken, ungefähr 0,5 mm breiten Al-Band. Diese Bänder eignen sich besser als Al-Drähte oder gar Pt-Fäden, weil die Dämpfung bedeutend größer ist. Durch geeignete Wahl der Saitenspannung und des Vorschaltwiderstandes w_2 (s. Fig. 1) kann man es leicht erreichen, daß sich die Saite, wie die Fig. 2 zeigt, fast aperiodisch bewegt. Ein kleines Überschreiten der Ruhelage ist belanglos. Es wird der Ausschlag eines jeden α-Teilchens doch noch sehr gut gezeichnet. Gleichzeitig zeigen die Aufnahmen, wie deutlich sich zwei schnell folgende Teilchen erkennbar geben. So beträgt z. B. der Zeitunterschied der beiden Teilchen a und b des Streifens I nur etwa $^1/_{1000}$ sec. Über die verschiedene Größe der Ausschläge siehe weiter unten.

Gleichzeitig mit der Registrierung der α-Teilchen wurde eine Zeitmarke mittels eines zweiten Saitengalvanometers aufgenommen. Als



Zur Aufnahme der Zeitmarke diente bei Streifen I ein Pt-Faden von 3 μ Dicke
" " " II " Al-Band " 1—2 μ Dicke

Fig. 2.

Zeitmarken wurden die Schläge eines Uhrwerks benutzt, die mit Hilfe eines Mikrophons auf die Saite übertragen wurden. Verwendet wurden drei verschiedene Uhrwerke, um vor eventuellen Einflüssen aus Unregelmäßigkeiten der Uhrwerke sicher zu sein. Durch die gleichzeitige Aufnahme der Zeitmarken ist man auch unabhängig von einem etwa ungleichmäßigen Laufen des photographischen Registrierstreifens.

Die Aufnahmen wurden nun folgendermaßen ausgeführt. Infolge der Einrichtung der Aufnahmeapparatur konnte nicht beliebig lange Zeit eine zusammenhängende Aufnahme gemacht werden, sondern es mußte nach Ablauf von je 12 bis 15 m Registrierpapier die zur Aufnahme der exponierten Streifen dienende Kassette entleert werden. Meistens arbeitete dabei die Kammer in den daher erforderlichen Pausen weiter. Bei einigen Aufnahmen wurde auch die Spannung für die Zeit des Auswechselns des Papiers von der Kammer abgeschaltet. Irgend ein Unterschied hat sich nicht ergeben. Die einzelnen Streifen wurden später in der Reihenfolge der Aufnahmen hintereinandergesetzt. Dies ist ohne weiteres gestattet, weil für die Zeit von 1 bis $1^1/_2$ Stunden, die für die einzelnen Aufnahmen zu einer Messung erforderlich waren, die benutzten Po-Präparate als völlig konstant anzusehen sind.

Bevor überhaupt die Kammer zu Zählungen verwandt wurde, wurden zunächst einige Reihen von Beobachtungen über diejenige Spannung gemacht, von der an die Teilchenzahl sich nicht mehr ändert. Natürlich wird durch derartige Versuche noch nicht bewiesen, daß die gezählte Teilchenzahl nun wirklich der wahren Teilchenzahl entspricht. Die bisher einzige Möglichkeit, in dieser Hinsicht eine Prüfung der Zuverlässigkeit der Zählung auszuführen, liegt in dem Vergleich mit Zählungen durch Szintillationsbeobachtungen. Solche Vergleichszählungen, die an Schirmen von Zinksulfid und an Dünnschliffen von weißem Willemit [1]) gemacht wurden, hatten das Ergebnis, daß die Zahlen, die sich bei verschiedenen Beobachtern aus Szintillationsbeobachtungen ergaben, stets etwa 5 Proz. kleiner waren als die, die die Kammer ergab. Es liegt dieses sicher daran, daß bei der Beobachtung der Szintillationen ein beträchtlicher Teil der Teilchen, eben jene etwa 5 Proz., dem beobachtenden Auge entgehen, weil teils zu schnell aufeinanderfolgende Szintillationen nicht mehr gesondert wahrgenommen werden, teils sehr lichtschwache überhaupt nicht gezählt werden, und weil außerdem bei der Beobachtung der Szintillationen

[1]) Für die Überlassung dieser Dünnschliffe möchte ich auch an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. Belowsky vom Mineralogischen Institut der Universität nochmals meinen besten Dank aussprechen.

die Empfindlichkeit des Auges sehr schnell abnimmt. Die Vergleichszählungen mit der Kammer wurden teils mit dem Saitengalvanometer (subjektive und objektive Beobachtung), teils so gemacht, daß an die Stelle des Saitengalvanometers ein Telephon gesetzt wurde. Diese Zählungen ergaben untereinander völlige Übereinstimmung.

Die Po-Präparate, die zu den Zählungen benutzt wurden, wurden aus Radioblei hergestellt, das in liebenswürdiger Weise von Herrn Prof. Dr. Hahn[1]) zur Verfügung gestellt war. Sie wurden in bekannter Weise teils auf Wismut, das auf Hochglanz poliert war, durch Eintauchen desselben in eine Po-haltige $BiCl_3$-Lösung, teils durch Elektrolyse auf Pt-Blechen niedergeschlagen. Sämtliche benutzten Präparate waren von vorzüglicher Reinheit, wie durch Versuche eigens festgestellt wurde.

Messungen. Eine Reihe von Vorversuchen (Versuche $a - f$ der Tabelle 2) an verhältnismäßig pro Quadratmillimeter sehr kräftigen Präparaten hatte durchweg das Ergebnis, daß man es in der Tat bei der Strahlungsemission mit einer unternormalen Dispersion zu tun hat. Tabelle 1 und Fig. 3 geben z. B. das Resultat der Messung „Versuch f" wieder.

Tabelle 1.

x	Zahl der Zeitabschnitte mit x Teilchen		$l_x - E(l_x)$	x	Zahl der Zeitabschnitte mit x Teilchen		$l_x - E(l_x)$
	l_x(exp.)	$E(l_x)$(theor.)			l_x(exp.)	$E(l_x)$(theor.)	
0	1	3,7	− 2,7	8	300	262,7	+ 37,3
1	11	23,9	− 12,9	9	185	187,0	− 2,0
2	48	76,7	− 28,7	10	110	119,8	− 9,8
3	141	163,8	− 22,8	11	53	69,7	− 16,7
4	249	262,2	− 13,2	12	28	37,2	− 9,2
5	374	335,9	+ 38,1	13	6	18,3	− 12,3
6	390	358,6	+ 31,4	14	3	8,4	− 5,4
7	362	328,1	+ 32,9	15	1	3,5	− 2,5

Man erkennt deutlich die typische Abweichung, die sich stets im selben Sinne mehr oder weniger stark wiederholt. Der Divergenzkoeffizient Q^2 berechnet sich zu $Q^2 = 0{,}776$.

Um nun ein Maß für die Zuverlässigkeit der Messungen zu gewinnen, und um sicher zu sein, daß dieses auf jeden Fall beachtenswerte Resultat nicht auf Zufall beruht, wurden mit einem Po-Präparat zwei Aufnahmen unter vollkommen gleichen Bedingungen gemacht. Derselbe Versuch wurde mit einem zweiten Präparat wiederholt.

[1]) Herrn Prof. Dr. Hahn danke ich auch an dieser Stelle verbindlichst für die Überlassung des Radiobleis.

Versuch I. Die beiden Po-Präparate (in Tabelle 2, Präparat 1 und 2) waren auf kreisrunden Wismutflächen von 1 mm Durchmesser niedergeschlagen. Ihre Stärke war nicht gleich, sondern die Präparate verhielten sich, elektroskopisch gemessen, etwa wie 1 : 1,75. Zur Zählung waren die beiden Präparate nacheinander exakt an dieselbe Stelle vor die Kammer gebracht. Ihr Abstand von der vorderen Öffnung der Kammer, die eine Blende von 1 mm Durchmesser besaß, betrug 5 mm. Die Messungen wurden in folgender Weise gemacht. Es wurde zunächst das eine Präparat gezählt. Nach Verlauf von $2^1/_2$ Stunden, in denen an der Aufnahmeapparatur nichts geändert wurde, wurde dann eine zweite Zählung des gleichen Präparats vorgenommen, wobei, um ganz sicher zu gehen, darauf geachtet wurde, daß selbst die Zeiten, die für das Entleeren der Kassette notwendig waren, d. h. die Zeiten der Unterbrechungen der Zählungen gleich waren. In derselben Weise wurde dann das zweite Präparat gezählt. Das Resultat zeigt Tabelle 2, Versuch Ia bis Id. Hieraus geht folgendes hervor: Unter sich zeigen die sich ergebenden Größen Q^2 der Messungen Ia und Ib, und Ic und Id der Präparate 1 und 2 in sich so gute Übereinstimmung, daß man wohl mit Recht behaupten kann, daß die Zählungen einen hohen Grad der Zuverlässigkeit haben. Daneben scheint aber der Vergleich der Werte von Q^2 bei den Präparaten 1 und 2 darauf hinzudeuten, daß die Flächendichte, d. h. die Aktivität der Präparate pro Quadratmillimeter einen Einfluß auf die Werte von Q^2 hat. Denn die beiden Präparate sowie die ganzen Versuchsbedingungen waren, wie die Tabelle zeigt, gleich, mit Ausnahme davon, daß das Präparat 2 eine fast doppelt so große Flächenaktivität (1 : 1,75) besaß. Die Werte von Q^2 sind bei dem Präparat 2 offensichtlich bedeutend kleiner als bei Präparat 1 (0,904 bzw. 0,897 und 0,926 bzw. 0,929). Die Versuche a — f können zum Vergleich nicht herangezogen werden; denn sie sind unter ganz verschiedenen Verhältnissen unternommen worden. Nur so viel ist sicher,

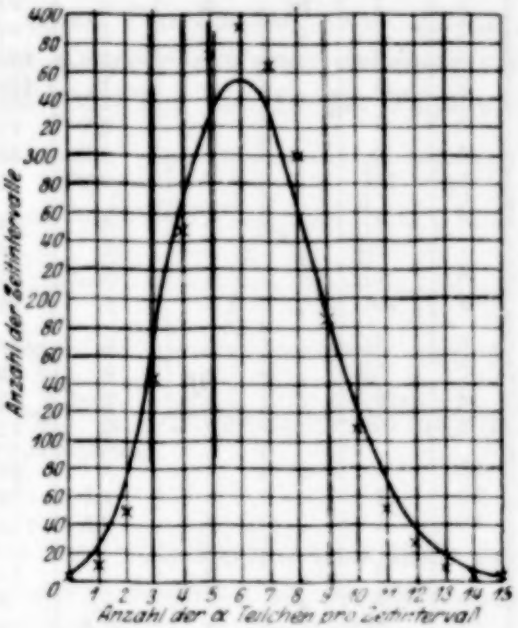


Fig. 3.

Tabelle 2.

Nr. des Versuchs	Nr. des Präparats	Durchmesser des Präparats mm	Unterlage des Präparats	Abstand des Präparats von der Kammer mm	Durchmesser der Kammerblende mm	Gesamte gezählte Teilchenzahl	Anzahl der Zeitintervalle	Länge eines Zeitabschnitts sec	Mittlere Teilchenzahl pro Zeitabschnitt	Q^1	Bemerkungen
a	—	—	Pt	—	2,2	6743	800	0,375	8,429	0,748	Vorversuche s. Tabelle 1 und Fig. 3
b	—	—	Bi	—	2,2	2014	954	0,375	2,111	0,786	
c	—	—	Bi	—	2,2	3674	730	0,375	5,033	0,632	
d	—	—	Pt	—	2,2	3908	1194	0,375	3,274	0,794	
e	—	—	Bi	—	2,2	4382	758	0,375	5,781	0,701	
f	—	—	Bi	—	2,2	14489	2262	0,375	6,405	0,776	
Ia	1	1	Bi	5	1	9349	3786	0,3	2,469	0,926	
Ib	1	1	„	5	1	6913	2812	0,3	2,458	0,929	
Ic	2	1	„	5	1	13566	3322	0,3	4,084	0,904	
Id	2	1	„	5	1	13997	3430	0,3	4,081	0,897	
IIa	3	1	„	7	2,2	7153	998	0,5	7,167	0,808	
IIb	4	5	„	7	2,2	6870	968	0,5	7,097	0,885	
IIc	5	10	„	7	2,2	5579	779	0,5	7,162	1,042	
IIIa	6	1	„	5	1	7514	2607	0,3	2,882	0,878	
IIIb	7	2,5	„	5	1	4651	2630	0,3	1,769	0,919	Messung vom 5. April 1923
IIIc	8	5	„	5	1	9587	2644	0,3	3,626	0,855	
IIId	9	10	„	5	1	8983	2792	0,3	3,218	0,948	
IVa	6	1	„	5	1	3327	1723	0,3	1,931	0,934	
IVb	7	2,5	„	5	1	1977	1652	0,3	1,197	0,940	Messung vom 22. Juni 1923
IVc	8	5	„	5	1	4222	1734	0,3	2,435	0,922	
IVd	9	10	„	5	1	4213	1932	0,3	2,181	0,949	
Va	10	1	„	5	1	4879	989	0,3	4,933	0,824	
Vb	10	1	„	5	1,5	7990	1144	0,3	6,984	0,746	
Vc	10	1	„	5	2,5	11595	1053	0,3	11,011	0,761	
VIa	11	5	„	5	1	1102	1540	0,3	0,716	0,925	
VIb	11	5	„	5	1,5	918	700	0,3	1,311	0,913	
VIc	11	5	„	5	2,5	3844	1369	0,3	2,808	0,943	
VIIa	3	1	„	5	1	3278	2587	0,3	1,267	0,922	Stellung 1
VIIb	3	1	„	5	1	1653	3788	0,3	0,436	0,952	„ 2
VIIIa	6	1	„	5	1	7514	2607	0,3	2,882	0,878	
VIIIb	9	10	„	5	1	8983	2792	0,3	3,218	0,948	
VIIIc	12	Sektor	„	5	1	8104	2818	0,3	2,876	0,888	

daß diese Präparate eine noch größere Flächenaktivität hatten als das Präparat 2.

Bei den weiteren Versuchen nun wurde peinlichst darauf geachtet, daß die Versuchsbedingungen immer eindeutig festgelegt waren, um miteinander vergleichbare Resultate zu ergeben. Die weiterhin zur Beobachtung verwendeten Präparate waren ihrer räumlichen Ausdehnung nach sehr genau hergestellt. Sie waren sämtlich auf kreisrunden auf Hochglanz polierten Wismutflächen niedergeschlagen, und möglichst gleichmäßig so aktiviert, daß sie bei den Aufnahmen

gleiche mittlere Teilchenzahl ergaben. Es wurde außerdem exakt dafür gesorgt, daß die Präparate für eine Versuchsserie stets an derselben Stelle vor der Kammer standen.

Einfluß der Präparateigenschaften. Da, wie oben schon erwähnt (Versuch I), eine Abhängigkeit der Werte von Q^2 von der Flächendichte vorhanden zu sein schien, so wurde zunächst dieser Umstand einer eingehenderen Untersuchung unterzogen.

Versuch II. Zu diesem Zweck wurden die α-Teilchen dreier Präparate (Präparat 3, 4, 5) von den Durchmessern 1 mm, 5 mm und 10 mm gezählt, die so aktiviert waren, daß die mittlere Teilchenzahl fast die gleiche war. Die Blende direkt vor der Kammer aus 0,2 mm starkem Messingblech hatte dabei einen Durchmesser von 2,2 mm. Die Präparate standen 7 mm von der Kammer entfernt, zentrisch zur Blende und Spitze. Das Resultat ist unter IIa bis IIc der Tabelle 2

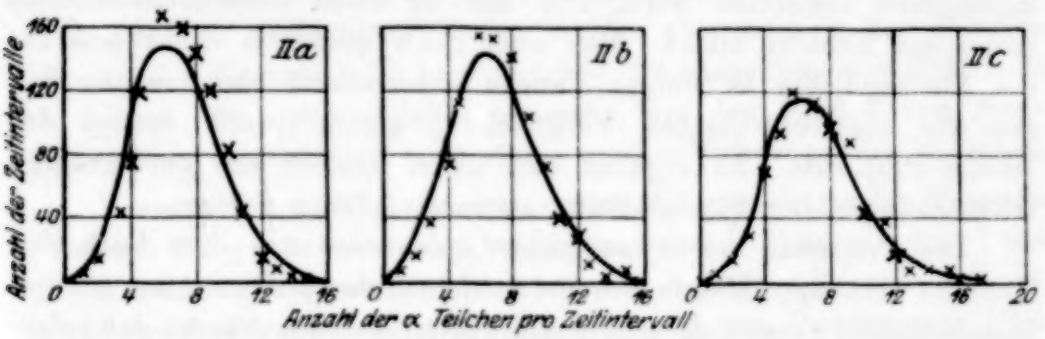


Fig. 4.

wiedergegeben. Wie man sieht, war fast vollständige Gleichheit der Mittelwerte erzielt. Trotzdem zeigen die Aufnahmen ein verschiedenes Verhalten. Sie bestätigen die schon oben ausgesprochene Vermutung. Denn das Präparat mit der größten Flächendichte (Präparat 3, 1 mm Durchmesser) ergibt ein bedeutend kleineres Q^2 als das Präparat mit der kleinsten Flächendichte (Präparat 5, 10 mm Durchmesser). Oder, mit anderen Worten: die Abweichungen von der Batemanschen Formel sind bei dem Präparat mit größerer Flächendichte beträchtlicher als bei dem Präparat mit kleiner Flächendichte. Fig. 4 zeigt die drei Aufnahmen noch einmal nebeneinander. Die Kurve ist die theoretische, die Kreuze sind die experimentell gefundenen Zahlen.

Versuch III. Da bei diesen Versuchen jedoch die Flächendichte nicht gemessen worden war, so wurde der Versuch noch einmal wiederholt, und zwar mit vier neu hergestellten Präparaten (Präparate 6, 7, 8, 9). Die elektroskopische Vergleichung dieser vier Präparate hatte das in Tabelle 3 wiedergegebene Resultat; dabei ist die Flächenaktivität des Präparats von 1 mm Durchmesser gleich 100 gesetzt.

Tabelle 3.

Nummer des Präparats	Durchmesser des Präparats mm	Aktivität pro qmm	Nummer des Präparats	Durchmesser des Präparats mm	Aktivität pro qmm
6	1	100	8	5	8,9
7	2,5	14,8	9	10	2,5

Voraussetzung für einen derartigen Vergleich ist natürlich eine gleichmäßige Verteilung des Poloniums auf der Fläche. Ob dieses genau der Fall ist, halte ich nicht für sehr wahrscheinlich. Ich neige vielmehr der Ansicht zu, daß das Polonium sich bei der spontanen Abscheidung aus der aktiven Lösung auf den Wismutflächen, auch wenn diese sehr sorgfältig poliert und völlig sauber sind, in kleinen diskreten Klümpchen festsetzen wird, und daß es keine zusammenhängende homogene Schicht bildet. Daß aber doch qualitativ die Werte für die Flächendichte in obiger Tabelle 3 zutreffend sind, ergibt sich aus der elektroskopischen Vergleichung gleich großer Stellen des 10 mm-Präparats. Es ergaben sich dabei nämlich nur geringfügige Abweichungen der Flächendichte an verschiedenen Stellen.

Die Präparate waren auf einer exzentrisch vor dem Loch der Kammer drehbaren Messingscheibe in kleinen durch einen 2 mm starken Messingdeckel verschließbaren Messingbuchsen so angebracht, daß jedesmal durch eine Vierteldrehung der Scheibe der Mittelpunkt des jeweilig zur Beobachtung gelangenden Präparats zentrisch vor der Kammer stand. Während der Aufnahme eines der vier Präparate waren die anderen Präparate durch Aufsetzen der Deckel auf die anderen Buchsen abgeblendet. Deutlich ist auch bei dieser Versuchsreihe (Tabelle 2, Versuche IIIa bis IIId) ein Gang der Werte von Q^2 in dem Sinne zu erkennen, daß das Präparat mit der größten Flächendichte die bei weitem stärkste Abweichung des Q^2 von der Einheit zeigt. Je kleiner aber die Flächendichte wird, um so mehr nähert sich das Q^2 der Einheit [1]).

Versuch IV. Dieselbe Anordnung wurde noch zu einem anderen Versuch verwandt. Falls in der Tat die Flächendichte einen maßgebenden Einfluß hat, so müssen sich die Q^2-Werte ändern, wenn ein Präparat durch Abklingen schwächer wird. Es wurde daher die ganze Anordnung, die zu dem zuletzt beschriebenen Versuch III gedient hatte,

[1]) Für das Herausfallen des Wertes IIIc ist vielleicht der Grund der, daß die Fläche möglicherweise nicht an allen Stellen ganz sauber war, so daß in Wirklichkeit ein kleineres Präparat mit größerer Flächendichte vorlag.

78 Tage lang stehen gelassen. Die Präparate waren durch die aufgesetzten Messingkappen gegen äußere Einflüsse geschützt. Auch war dafür gesorgt worden, daß die Präparate nicht durch mechanische Erschütterungen beeinflußt werden konnten. Die Aufnahmen, die dann wieder in derselben Weise wie vorher gemacht wurden, hatten das Ergebnis Tabelle 2, IVa bis IVd. Es zeigt sich deutlich eine Annäherung der Werte für Q^2 an die Einheit, mit Ausnahme bei dem Präparat 9 von 10 mm Durchmesser, bei dem das Q^2 dasselbe geblieben ist (siehe weiter unten).

Einfluß der Blenden. Betrachtet man die voranstehenden Versuchsreihen I bis IV, so fällt unabhängig von der mittleren Teilchenzahl bei allen, wie schon mehrfach hervorgehoben, die Abhängigkeit der Größe Q^2 von der Flächendichte auf.

Eine zweite Ursache für die Verschiedenheit der Werte, die ebenfalls nicht zu vernachlässigen ist, scheint aber auch in der Blendenöffnung der Kammer, also in der Größe des ausgeblendeten Zählraums zu liegen. Es wurden daher nunmehr, um den Einfluß von dieser Seite her zu untersuchen, noch einige weitere Versuchsreihen angestellt.

Versuch V und VI. In dem ersten der nun folgenden Versuche (Versuch V) wurde ein sehr kräftig aktiviertes Präparat von 1 mm Durchmesser (Präparat 10) benutzt, im zweiten (Versuch VI) ein schwächeres Präparat auf einer Fläche von 5 mm Durchmesser (Präparat 11). Beide Versuchsreihen wurden unter gleichen Bedingungen ausgeführt, nur wurde die Blende gewechselt. Wie man aus der Tabelle 2, Va bis VIc, entnehmen kann, ist ein Einfluß der Blendenöffnung auf die Größe Q^2 vorhanden, wenn sich auch keine eindeutigen Beziehungen ergeben haben. Andererseits zeigt aber auch bei diesen beiden Versuchreihen sich wiederum ein Gang in demselben Sinne wie vorher. Das flächenstärkere Präparat (Versuch V) gibt in jedem Fall: Blende 1 mm, 1,5 mm und 2,5 mm ein bedeutend kleineres Q^2 als das flächenschwächere Präparat (Versuch VI).

Durch Änderung der Blende wird aber gleichzeitig der Strahlengang in der Kammer geändert.

Versuch VII. Um nun festzustellen, ob der Verlauf der Strahlen in der Kammer einen Einfluß auf die Werte Q^2 hat, wurde ein weiterer Versuch mit Präparat 3 (Durchmesser 1 mm) ausgeführt, wobei das Präparat einmal in zentrischer Stellung vor der Kammer, die bei diesem Versuch eine Blende von 1 mm Durchmesser hatte, stand, das andere mal 5 mm zur Seite verschoben wurde, so daß die in die Kammer eintretenden Strahlen unter solchen Winkeln eintraten, wie sie den

Randstrahlen eines Präparats von 10 mm Durchmesser entsprechen [1]) (siehe Fig. 5). Das Resultat zeigt Tabelle 2, Versuch VII a und VII b. Wie man sieht, ist ein Einfluß des Strahlenganges in der Kammer offenbar vorhanden, und zwar in dem Sinne, daß die Werte für Q^2 bei wachsenden Winkeln der Strahlen mit der Kammerachse ansteigen.

Man könnte also hieraus schließen, daß die sämtlichen Unterschiede in den Werten von Q^2 bei den früheren Versuchen mit verschieden großen Präparaten durch die Veränderung des Strahlenganges bedingt sind, wenn auch die hier gefundenen Unterschiede zwischen den Q^2-Werten nicht sehr groß sind. Gegen diesen Schluß sprechen aber schon sehr deutlich die Versuche III und IV. Denn vergleicht man Versuch III a mit IV a, III b mit IV b usw., so findet man überall, obgleich doch der Strahlengang derselbe geblieben ist, eine Annäherung der Q^2-Werte an die Einheit. Dabei handelte es sich überdem um dieselben Präparate, die sich nur in ihrem Alter unterschieden.

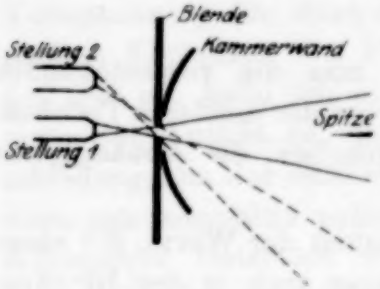


Fig. 5.

Versuch VIII. Trotzdem wurde, um diese Frage zu klären, ein weiterer Versuch angestellt. Hier wurde angestrebt, zwei Präparate herzustellen, die gleichen Strahlengang ergeben bei stark verschiedener Flächendichte. Zu diesem Zweck wurde ein kreisförmiges Präparat von 10 mm Durchmesser (Präparat 9) und ein aktivierter Kreissektor (Präparat 12) von demselben Radius hergestellt, beide von etwa gleicher mittlerer Teilchenzahl. Dieses letztere Präparat wurde so gemacht, daß eine Wismutfläche von 10 mm Durchmesser mit Ausnahme jenes Sektors lackiert und dann die freie Wismutfläche aktiviert wurde. Schließlich wurde der Lack sehr sorgfältig wieder entfernt, so daß nunmehr als strahlende Fläche nur noch der Sektor in Frage kam.

---

[1]) Hierbei möchte ich folgendes bemerken: Bei dem schrägen Eintritt der Strahlen in die Kammer und der räumlichen Anordnung der Nadelspitze zur Kammerwandung, ist es aus geometrischen Gründen völlig ausgeschlossen, daß überhaupt noch ein eintretendes α-Teilchen in der Nähe der Spitze vorbeifliegen kann. Es ist daher offenbar gar nicht erforderlich, daß, um eine Entladung hervorzurufen, das Teilchen der Spitze sehr nahe kommen muß. Eigene Versuche über den zählenden Raum der Kammer haben sogar das Ergebnis gehabt, daß selbst an der Spitze vorbeifliegende Teilchen keine Entladung hervorrufen, wenn man die Teilchen senkrecht zur Spitze in die Kammer hineinschickt. Auch bemerke ich noch, daß die offensichtlich verschieden großen Ausschläge des Galvanometerfadens von den Winkeln abhängen, unter denen die Teilchen in die Kammer eintreten. Über alle diese Eigentümlichkeiten der Kammer wird in einer folgenden Arbeit demnächst berichtet werden.

Zur Kontrolle wurde noch ein drittes Präparat von 1 mm Durchmesser (Präparat 6) und derselben mittleren Teilchenzahl wie der Sektor hergestellt, dessen Fläche fast gleich der Sektorfläche war. Bei dem Präparat von 1 mm Durchmesser war die mittlere Teilchenzahl 2,887, bei dem von 10 mm Durchmesser 3,218 und bei dem Sektor 2,876. Die Präparate standen 5 mm vor der Kammer. Es war mit der größtmöglichen Genauigkeit dafür Sorge getragen, daß Spitze, Kammerbohrung und Mitte des zu zählenden Präparats bzw. Spitze des Sektors genau zentriert waren. Durch diese Anordnung wurde erreicht, daß das Präparat von 10 mm Durchmesser und der Sektor Strahlen unter gleichen Winkeln in die Kammer sandten. Es mußten sich hier Unterschiede zeigen zwischen dem Präparat von 10 mm Durchmesser und dem Sektor, und zwischen dem Präparat von 10 mm Durchmesser und dem von 1 mm Durchmesser einerseits, dagegen mußten die Präparate von 1 mm Durchmesser und der Sektor sich fast gleich verhalten. Wie die Tabelle 2, Versuch VIIIa bis VIIIc, zeigt, ist dieses tatsächlich der Fall.

Hiermit ist demnach bewiesen, daß durch den Strahlengang allein, der allerdings einen gewissen Einfluß auf die Werte von Q^2 hat, die starken Abweichungen für Präparate verschiedener Flächendichte nicht hervorgerufen sein können. Es muß also auf jeden Fall ein Teil der Abweichungen von den Wahrscheinlichkeitsgesetzen bei der Emission der α-Teilchen verursacht werden, ganz unabhängig von der Beobachtungsmethode. Übrigens berechnet sich aus dem Zahlenmaterial von Rutherford und Geiger das Q^2 zu 0,951, aus dem von Hess und Lawson zu $Q^2 = 0{,}900$.

Diskussion der Ergebnisse. Es liegt nach diesem Resultat die Frage nahe, welches nun die eigentliche Ursache für dieses überaus beachtenswerte Ergebnis bei der Strahlung des Poloniums ist.

Da eine unternormale Dispersion nur „bei einem unregelmäßigen Spiel, bei dem durch absichtliche Einwirkung die Ergebnisse der einzelnen Versuchsreihen dem Mittelwerte näher gerückt werden, als es bei einem Zufallsspiel mit konstanten Chancen zu erwarten wäre“[1]), sich ergeben kann, aber sich auch notwendig ergeben muß, so muß man unbedingt einen solchen Einfluß annehmen. Welcher Art dieser Einfluß ist, muß zunächst noch dahingestellt bleiben. Meines Erachtens kommen aber nur zwei Ursachen in Frage, die die Größe der Q^2-Werte bestimmen können. Einmal kann es ein Zusammenwirken von Streuung

[1]) Lexis, Zur Theorie der Massenerscheinnungen in der menschlichen Gesellschaft (Freiburg i. Br. 1877), S. 34.

und Absorption und dergleichen der α-Teilchen sein, andererseits könnte man aber eine zufällige gegenseitige Beeinflussung zwischen zwei radioaktiven Atomen annehmen in dem Sinne, daß ein α-Teilchen zufällig beim Austritt, oder, wenn es die strahlende Schicht passiert, andere Atome zu einem etwas früheren Zerfall bringt, als diese nach ihrer Lebensdauer eigentlich zerfallen würden. Mit anderen Worten: man hätte eine Atomzertrümmerung an Atomen sehr großen Atomgewichts, wie dieselbe Rutherford[1]) im Jahre 1919 an leichten Atomen festgestellt hat. Beide Annahmen zusammen sind mit den in der vorliegenden Arbeit gefundenen Abweichungen der Strahlung von den Wahrscheinlichkeitsgesetzen verträglich.

Daß die erste Ursache (Durchgang der Strahlen durch Materie) einen Einfluß auf die Ergebnisse hat, zeigt folgender Versuch. Es wurde ein und dasselbe Präparat untersucht, einmal unbedeckt, das andere Mal mit einer dünnen Al-Folie von weniger als 1 μ Dicke bedeckt. Das Resultat zeigt nachstehende Tabelle 4.

Tabelle 4.

	Durchmesser des Präparats mm	Abstand von der Kammer mm	Durchmesser der Kammerblende mm	Gesamte gezählte Teilchenzahl	Anzahl der Zeitintervalle	Länge eines Zeitabschnitts sec	Mittlere Teilchenzahl	Q^2
Ohne Al	1	5	1	9883	2001	0,3	4,939	0,767
Mit Al	1	5	1	9968	2086	0,3	4,779	0,752

Wie die Tabelle zeigt, ist der Wert von Q^2 für das Präparat mit der Al-Folie nicht unwesentlich kleiner. Man könnte also demnach die Abweichungen von den Wahrscheinlichkeitsgesetzen auf solche Streuungserscheinungen zurückführen, denn die Präparate haben immerhin endliche Dicke, ferner kann die Schichtdicke durch Oxydation, Rückstoßerscheinungen und dergleichen mit der Zeit vergrößert werden[2]). Diese Annahmen aber widersprechen den Beobachtungen in den Versuchen III und IV, bei denen die Präparate längere Zeit sich selbst überlassen waren. Sicherlich ist die Schichtdicke nicht dünner geworden, sondern eher dicker. Trotzdem steigen die Werte von Q^2 mit der Zeit an und nähern sich der Einheit. Nimmt man aber an, daß die Streuung hervorgerufen wird durch Oxydation der Präparate an der

[1]) Rutherford, Phil. Mag. (6) **37**, 571, 1919.

[2]) Vielleicht ist hierin auch die Ursache dafür zu suchen, daß in den Versuchen III d und IV d für das Präparat von 10 mm Durchmesser das Q^2 sich nicht geändert hat, insofern, als die eigentlich zu erwartende Annäherung des Q^2 an die Einheit in Versuch IV d gerade aufgehoben wird.

Luft, so müssen frisch hergestellte Präparate Q^2-Werte zeigen, die näher der Einheit liegen als die Werte, die dieselben Präparate nach längerem Stehenlassen ergeben. Gerade das Umgekehrte ist jedoch der Fall, wie die Versuche III und IV zeigen. Hier speziell handelte es sich um vier ganz frisch hergestellte Präparate (Messung vom 5. April 1923), die nach 78 Tagen (Messung vom 22. Juni 1923) Werte für Q^2 ergaben, die beträchtlich näher der Einheit liegen als die entsprechenden Werte vom 5. April. Die gleichen Gründe sprechen auch gegen einen Einfluß, hervorgerufen durch langsame Diffusion des Poloniums in das Metall der Unterlage hinein (Rückstoßerscheinung). Eine solche Diffusion muß sich in derselben Weise äußern, wie eine Oxydation der Oberfläche. Man müßte also auch hier ein Kleinerwerden der Q^2-Werte im Laufe der Zeit haben.

Mit den Versuchen III und IV ist nur vereinbar, wenn man die zweite oben angegebene Ursache, die gegenseitige zufällige Beeinflussung annimmt. Denn dann müssen die Q^2-Werte mit schwächer und schwächer werdenden Präparaten sich der Einheit nähern, da die Wahrscheinlichkeit einer gegenseitigen Beeinflussung immer kleiner wird. Auch alle anderen Beobachtungen sind völlig damit verträglich. Vor allem folgt sofort notwendig die Abhängigkeit der Q^2-Werte von der Flächendichte in dem Sinne, wie sie sich bei den vorliegenden Versuchen ergeben hat.

Wie diese Beeinflussung nun vor sich geht, darüber kann man verschiedene Annahmen machen, die aber schließlich auf ein und dasselbe hinausführen: nämlich auf die Atomzertrümmerung.

Z. B. kann es beim Austritt eines α-Teilchens aus dem Präparat vorkommen, daß zufällig ein α-Teilchen so durch andere Atome hindurchgeht oder auf diese auftrifft, daß es diesen den Anstoß zum Zerfall gibt; oder es könnten durch die sicherlich großen Kräfte, die bei dem radioaktiven Zerfall durch die Umgruppierung der Elementarbestandteile des Atomkomplexes in der Nähe des zerfallenden Atomes auftreten, zufällig andere kurz vor dem eigenen Zerfall stehende Atome zu einem etwas schnelleren Zerfall angeregt, d. h. ihre Lebensdauer verkürzt werden.

Welche dieser beiden Annahmen auch die zutreffende sein mag, aus beiden folgt jedenfalls, daß man eigentlich eine, wenn auch geringe, Verschiedenheit der Zerfallskonstanten bei Präparaten verschiedener Flächendichte, d. h. Präparaten, bei denen die einzelnen Atome in verschieden großen Abständen von einander entfernt sind, finden muß, und daß die Zerfallskonstante eines Präparats sich mit der Zeit, jedenfalls im Anfang, von großen Werten an zu kleineren bewegen muß.

Denn die Wahrscheinlichkeit, daß ein zerfallendes Atom oder ein α-Teilchen auf seiner Bahn ein anderes Atom beeinflussen oder treffen kann, ist selbstverständlich umso größer, je näher die Atome einander in dem betrachteten Präparate liegen.

Berechnet man aus den Messungen III und IV die Zerfallskonstante und Halbwertszeit, so findet man in der Tat keine Gleichheit. Nachstehende Tabelle 5 zeigt die Werte.

Tabelle 5.

Durchmesser des Präparats in mm	Messung vom 5. April 1923			Messung vom 22. Juni 1923			Zerfallskonstante	Halbwertszeit Tage
	Gesamte gezählte Teilchenzahl	Anzahl der Zeitintervalle	Mittlere Teilchenzahl	Gesamte gezählte Teilchenzahl	Anzahl der Zeitintervalle	Mittlere Teilchenzahl		
1	7514	2607	2,882	3327	1723	1,931	0,005134	135,0
2,5	4651	2630	1,769	1977	1652	1,197	0,005008	138,4
5	9587	2644	3,626	4222	1734	2,435	0,005105	135,8[1])
10	8983	2792	3,218	4213	1934	2,181	0,004989	138,9

Allerdings kann aus diesen Messungen noch kein sicherer Schluß gezogen werden. Erstens bezieht sich die Beobachtuug nur auf einen Zeitraum von 78 Tagen, und zweitens sind auch die Beobachtungszeiten, über die sich die Zählungen erstreckt haben, jedenfalls bei der Aufnahme vom 22. Juni zu kurz. Denn eine kleine Änderung des Mittelwertes, die bei der Berechnung der Batemanschen Kurve nur sehr wenig ausmacht, übt auf die Zerfallskonstante einen sehr großen Einfluß aus. Erwähnt sei jedoch, daß als Wert für die Halbwertszeit des Po die Zeit von 136,5 Tagen angenommen wird, daß aber die früheren Messungen zwischen 134,5 und 143 Tagen (J. W. Waters findet sogar 148 Tage?) schwanken.

Sollte sich wirklich zeigen, daß eine Beziehung besteht zwischen Flächendichte und Zerfallskonstante, so muß man allerdings das Exponentialgesetz für den radioaktiven Zerfall nur als gute Annäherung an den wirklichen Vorgang betrachten.

Wenn Rutherford[2]) bei der Untersuchung der Zerfallskonstanten der Ra-Emanation in Dichten, die sich wie 1:2000 verhielten, keine Abhängigkeit der Zerfallskonstanten von der Dichte beobachtet hat, so braucht dieses ja nicht für alle radioaktiven Substanzen zu gelten. Polonium z. B. könnte sich sehr wohl anders verhalten. Im übrigen sind auch von verschiedenen Beobachtern kleine Unregelmäßigkeiten

[1]) Vergleiche die Anmerkung S. 290.

[2]) Rutherford, Radioaktive Substanzen und ihre Strahlungen (Leipzig 1913), S. 307. Wien. Ber. **120** [2a], 303, 1911.

im Abfall der Ra-Emanation während der ersten Zeit nach Abtrennung derselben beobachtet worden. So haben z. B. Rutherford und Tuomikoski[1]) im Jahre 1909 in Versuchen, die allerdings vor den oben zitierten angestellt wurden, bei der Abklingung der Ra-Emanation gefunden, daß der Zerfall während der ersten fünf Tage mit einer durchschnittlichen Periode von 3,58 Tagen, zwischen 5 und 20 Tagen mit einer durchschnittlichen Periode von 3,75 Tagen und zwischen 20 und 40 Tagen mit einer durchschnittlichen Periode von 3,85 Tagen erfolgt. Die Verfasser schlossen daraus, daß die Ra-Emanation in dem Sinne eine nicht homogene Substanz sei, daß die physikalischen und chemischen Eigenschaften ihrer Atome bis zu einem gewissen Grade mit ihrer Lebensdauer variieren. Ferner hat Mme. Curie[2]) geringe Unregelmäßigkeiten beim Zerfall der Ra-Emanation zwischen 4 und 20 Stunden beobachtet.

Um diese allerdings noch hypothetischen Betrachtungen zu klären, sind eine Reihe von Versuchen an Polonium beabsichtigt mit wohldefinierten an Flächenaktivität stark verschiedenen Präparaten.

Zusammenfassung.

Es wird die Gültigkeit der Wahrscheinlichkeitsgesetze speziell der Batemanschen Formel bei der α-Strahlung des Poloniums untersucht. Dabei hat sich herausgestellt:

1. Die α-Strahlung des Poloniums folgt der Batemanschen Wahrscheinlichkeitsformel für einen Vorgang rein zufälligen Charakters nicht immer.

2. Es ergeben sich systematische Abweichungen im Sinne einer unternormalen Dispersion, d. h. es kommen die Zeitabschnitte, in denen Teilchenzahlen auftreten, die in der Nähe des Mittelwerts liegen, häufiger, solche dagegen mit viel oder wenig Teilchen seltener vor, als nach den Wahrscheinlichkeitsgesetzen zu erwarten ist.

3. Es wird gefunden, daß die unternormale Dispersion umso beträchtlicher ist, je größer die Aktivität der Präparate pro Quadratmillimeter ist.

4. Durch Abklingenlassen der Präparate wird die Übereinstimmung zwischen Wahrscheinlichkeitsgesetz und Experiment besser.

5. Es wird diskutiert, welches die Ursache für dieses Verhalten des Po ist. Dabei wird darauf hingewiesen, daß Streuungserscheinungen, Oxydation der Oberflächen und Diffusion des Poloniums in die Metall-

[1]) Rutherford u. Tuomikoski, Mem. Manchester Soc. **53**, No. 12, 1909.
[2]) Mme. Curie, Le Radium **7**, 33—38, 1910.

unterlage hinein wohl die Größe der unternormalen Dispersion beeinflussen können, daß aber damit allein die unter 4. erwähnte Erscheinung nicht erklärt werden kann.

6. Zur Erklärung dieses Ergebnisses wird die Annahme einer gegenseitigen Beeinflussung der einzelnen radioaktiven Polonium-Atome oder die Annahme eines Einflusses der einzelnen α-Teilchen auf andere Atome gemacht (Atomzertrümmerung).

Hingewiesen sei noch darauf, daß sich natürlich auch bei der Betrachtung der zeitlichen Aufeinanderfolge der einzelnen α-Teilchen Abweichungen von den Wahrscheinlichkeitsgesetzen ergeben. Hier zeigt sich durchweg das Resultat, daß die kleineren Zeitabstände zwischen zwei sukzessiven Teilchen häufiger, die größeren dagegen seltener vorkommen als nach den Wahrscheinlichkeitsgesetzen zu erwarten ist[1]).

Die vorstehende Arbeit wurde im Institut für Physik an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. v. Baeyer für sein reges Interesse an der Arbeit und für seine wertvollen Ratschläge bei Ausführung derselben meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Ebenso möchte ich nicht verfehlen, dem Japanausschuß der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft für die mir aus der Hoshi-Stiftung zum Ankauf von photographischem Registrierpapier gewährte Unterstützung an Geldmitteln, ohne die die Arbeit nicht hätte vollendet werden können, zu danken.

Institut für Physik an der Landwirtschaftlichen Hochschule zu Berlin.

[1]) Marsden u. Baratt, Proc. Phys. Soc. London **23**, 367—378, 1911. Mme. Curie, Journ. de phys. et le Radium **1**, 20, 1920.

Über die Energiekomponenten in Hilberts Theorie der Materie.

Von **Adalbert Bokowski** in Lüneburg.

(Eingegangen am 19. Dezember 1923.)

1. In seiner Arbeit „Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie“ [1]) hat Herr F. Klein durch Benutzung der klassischen Methoden der Variationsrechnung den Hilbertschen Entwicklungen in dessen erster Note über „die Grundlagen der Physik“ [2]) eine anschauliche elegante Interpretation gegeben. Die vorliegende Mitteilung hat den Zweck, die Kleinschen Ausführungen durch eine ganz spezielle Rechnung [3]) zu ergänzen. Unter Anlehnung an die Bezeichnungsweise [4]) von Hilbert und Klein werde ich die infinitesimale Transformation der Weltparameter w^τ ($\tau = 1, 2, 3, 4$)

$$\delta w^\tau = p^\tau, \tag{1}$$

auf das vierfache Integral

$$J_2 = \iiiint L \, d\omega, \tag{2}$$

wo $d\omega$ das invariante Raumelement

$$d\omega = \sqrt{g}\, dw^1 \ldots dw^4 = dS, \tag{3}$$

und L in üblicher Weise den „elektrischen“ Bestandteil der Weltfunktion bedeutet, anwenden. Es entstehen so eine Reihe von Differentialbeziehungen, denen L identisch genügt. Mit ihrer Hilfe kann man die sogenannten „Energiekomponenten des elektromagnetischen Feldes“ definieren. Der erhaltene Ausdruck gestattet zunächst keine physikalische Interpretation, dagegen läßt sich seine Richtigkeit im Falle der speziellen Relativitätstheorie nachweisen.

2. Es bezeichne in bekannter Weise q_ϱ ($\varrho = 1, 2, 3, 4$) das Viererpotential, und es sei

$$\lambda_{\varrho\sigma} = \frac{\partial q_\sigma}{\partial w^\varrho} - \frac{\partial q_\varrho}{\partial w^\sigma} = q_{\sigma,\varrho} - q_{\varrho,\sigma}, \tag{4}$$

der schiefsymmetrische elektromagnetische Sechservektor. Die in (4) angewandte abgekürzte Schreibweise der Differentiationen werde im

---

[1]) Gött. Nachr., Math.-phys. Kl. 1918, S. 171—189; wieder abgedruckt in Kleins Ges. math. Abh. Bd. I, S. 568—585. Berlin, Springer, 1921.

[2]) Gött. Nachr., Math.-phys. Kl. 1915, S. 395—407.

[3]) Herr Handrek (Göttingen) war so freundlich, die Formeln nachzurechnen.

[4]) Man wolle dazu deren Arbeiten vergleichen.

folgenden beibehalten. Als für unseren Zweck wichtige Invarianten, die sich aus den q_ϱ (bzw. in Verbindung mit $g^{\mu\nu}$) bilden lassen, notieren wir die folgenden:

$$\mathfrak{P} = \lambda_{12}\lambda_{34} + \lambda_{13}\lambda_{42} + \lambda_{14}\lambda_{23}, \tag{5}$$

bzw.

$$\frac{\mathfrak{P}}{\sqrt{g}} = P, \tag{6}$$

ferner

$$\mathfrak{Q} = \sqrt{g}\, Q, \tag{7}$$

wo

$$Q = (g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\varrho})\, \lambda_{\mu\nu} \lambda_{\varrho\sigma} \text{ [1]} \tag{8}$$

ist. Die Größen

$$\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial g^{\mu\nu}} = \mathfrak{T}_{\mu\nu} = \sqrt{g}\, T_{\mu\nu} \tag{9}$$

bezeichnen wir nach Hilbert (S. 407 seiner Note) als Energiekomponenten des Maxwellschen Feldes. Wird noch zur Abkürzung gesetzt

$$\mathfrak{Q}^\varrho = -\frac{\partial \dfrac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial q_{\varrho\sigma}}}{\partial w^\sigma}, \tag{10}$$

so sind die Gleichungen

$$\mathfrak{Q}^\varrho = 0, \tag{11}$$

in den Koordinaten w geschrieben, die den physikalischen Voraussetzungen entsprechenden verallgemeinerten Maxwellschen Gleichungen.

3. Wir wenden uns nun gleich zur Berechnung der Variation des Viererpotentials, bestimmen also die Größen δq_ϱ und $\delta q_{\varrho,\sigma}$, die der infinitesimalen Transformation (1) der w entsprechen. Setzen wir zuvor statt (1)

$$w^\mu = w^\mu + p^\mu, \tag{12}$$

und beachten wir ferner, daß wir mit dem Vektor p und seinen auftretenden Differentialquotienten fernerhin immer so zu rechnen haben, daß nur lineare Glieder berücksichtigt werden, so ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung, die wir hier unterdrücken,

$$\delta q_\varrho = q_{\varrho\tau} p^\tau + q_\tau p^\tau_\varrho = p_\varrho, \tag{13}$$

$$\delta q_{\varrho,\sigma} = \delta \frac{\partial q_\varrho}{\partial w^\sigma} = \frac{\partial}{\partial w^\sigma} \delta q_\varrho = \frac{\partial}{\partial w^\sigma} (q_{\varrho,\tau} p^\tau + q_\tau p^\tau_\varrho)$$

$$= q_{\varrho,\tau\sigma} p^\tau + q_{\varrho,\tau} p^\tau_\sigma + q_{\tau,\sigma} p^\tau_\varrho + q_\tau p^\tau_{\varrho,\sigma} = p_{\varrho,\sigma} \tag{14}$$

---

[1]) Es gilt hier und im folgenden mit Einstein, daß über Indizes, die in einem Glied doppelt vorkommen, summiert wird.

Die Anwendung auf das Integral (2) gestaltet sich nun folgendermaßen: L werde bis auf einen konstanten Faktor[1]) gleich Q gesetzt, bzw. $Q\sqrt{g} = \mathfrak{Q}$, dann geht (2) über in

$$J_2 = \iiiint \mathfrak{Q}\, dS, \tag{15}$$

und für unsere infinitesimale Transformation ergibt sich

$$\delta J_2 = \delta \iiiint \mathfrak{Q}\, dS = -\iiiint \left(\frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial g^{\mu\tau}} p^{\mu\tau} + \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial q_{\varrho,\sigma}} p_{\varrho,\sigma} \right) dS$$
$$+ \iiint (\mathfrak{Q}\, p^1\, dw^2\, dw^3\, dw^4 + \cdots + p^4\, dw^1\, dw^2\, dw^3); \tag{16}$$

das dreifache Integral ist in vektorieller Weise über den Rand des Integrationsgebietes von J_2 zu erstrecken. Beschränkende Voraussetzungen über das Verhalten der p^τ und ihrer Differentialquotienten am Rande existieren nicht. Durch partielle Integration geht (16) über in

$$\delta J_2 = -\iiiint p^\tau \left(\mathfrak{T}_{\mu\tau} g_\tau^{\mu\tau} + 2 \frac{\partial \mathfrak{T}_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma} + \mathfrak{Q}^\varrho q_{\varrho\tau} - \frac{\partial \mathfrak{Q}^\varrho q_\tau}{\partial w^\varrho} \right) dS +$$
$$+ \iiint (2\mathfrak{T}_\tau^1 p^\tau + \zeta^1)\, dw^2\, dw^3\, dw^4 + \cdots + (2\mathfrak{T}_\tau^4 p^\tau + \zeta^4)\, dw^1\, dw^2\, dw^3, \tag{17}$$

wo noch zur Abkürzung gesetzt ist

$$\zeta^\sigma = \mathfrak{Q} p^\sigma - \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial q_{\varrho,\sigma}} q_\tau p_\varrho^\tau + \mathfrak{Q}^\sigma q_\tau p^\tau, \tag{18}$$

für $\sigma = 1, 2, 3, 4$.

Das in (17) auftretende vierfache Integral bezeichnen wir unter Weglassung des Minuszeichens mit Integral A. Sodann können wir durch elementare Divergenzbildung den restlichen Bestandteil von (17) in ein zweites vierfaches Integral wie folgt umformen:

$$\text{Rest von (17)} = \iiiint \frac{\partial}{\partial w^\sigma} (2\mathfrak{T}_\tau^\sigma p^\tau + \zeta^\sigma)\, dS. \tag{19}$$

Wir nennen diesen Ausdruck das Integral B, dann folgt

$$\delta J_2 = -A + B\ ^2). \tag{20}$$

---

[1]) Die Konstante ist gemäß der Auffassung von Einstein gleich der mit $\frac{8\pi}{c^2}$ multiplizierten Gravitationskonstanten zu nehmen.

[2]) Durch Zerlegung von

$$\delta J_2 = \bar{\mathfrak{Q}}(\bar{w}) - \mathfrak{Q}(w)$$

(in verständlicher Abkürzung) in

$$\delta J_2 = \bar{\mathfrak{Q}}(\bar{w}) - \mathfrak{Q}(w) - \{\mathfrak{Q}(w) - \mathfrak{Q}(w)\}$$

ließe sich übrigens (16) von vornherein bequemer schreiben. Dann erscheint in (17) das zweite Integral gleich in Divergenzgestalt.

Es ist bemerkenswert, daß im Falle konstanter p^τ, die wir mit $\overset{0}{p}{}^\tau$ bezeichnen wollen, $A = B$ wird. Man kann sich davon leicht überzeugen. Aus $A = B$ ist aber hinsichtlich der Willkür des Integrationsgebietes der Schluß berechtigt

$$\text{Integrand von } A = \text{Integrand von } B. \tag{21}$$

Klein hat diese Identität bei der Durchführung der Variation am Integral J_1 den „Hauptsatz" genannt. Wir schreiben ihn in unserem Falle gleich explizite in folgender Form: Wird $\overset{0}{\xi}{}^\sigma$ als Funktion der $\overset{0}{p}{}^\tau$ in der Weise angeschrieben, daß

$$\overset{0}{\xi}{}^\sigma = 2\,\overset{0}{\mathfrak{B}}{}^\sigma_\tau \overset{0}{p}{}^\tau, \tag{22}$$

wo

$$2\,\mathfrak{B}^\sigma_\tau = \Omega\,\delta^\sigma_\tau + \Omega^\sigma q_\tau, \tag{23}$$

und δ^σ_τ in üblicher Weise 1 oder 0 bedeutet, je nachdem $\sigma = \tau$ oder $\sigma \neq \tau$ ist, so geht (21) über in

$$\mathfrak{T}_{\mu\tau}\,g^{\mu\nu}_\tau + 2\left(\frac{\partial \mathfrak{T}^\sigma_\tau}{\partial w^\sigma} + \Omega^\varrho q_{\varrho\tau} - \frac{\partial \Omega^\varrho q_\tau}{\partial w^\varrho}\right)\overset{0}{p}{}^\tau = \overset{0}{p}{}^\tau\left(2\frac{\partial \mathfrak{T}^\sigma_\tau}{\partial w^\sigma} + 2\frac{\partial \mathfrak{B}^\sigma_\tau}{\partial w^\sigma}\right). \tag{24}$$

4. Wir wollen nun untersuchen, welche Identitäten sich ergeben, wenn wir die Einschränkung fallen lassen, daß die p^μ Konstante sind. Wählen wir zuerst die p^μ so, daß sie am Rande des Integrationsgebietes verschwinden, aber sonst völlig willkürlich, so folgt, daß das Integral $B = 0$ ist. Daraus folgt, daß A und, wegen der Willkürlichkeit von p^μ, auch der Integrand von $A = 0$ sein muß, d. h.

$$\mathfrak{T}_{\mu\tau}\,g^{\mu\tau}_\tau + 2\frac{\partial \mathfrak{T}^\sigma_\tau}{\partial w^\sigma} + \Omega^\varrho q_{\varrho\tau} - \frac{\partial \Omega^\varrho q_\tau}{\partial w^\varrho} = 0. \tag{25}$$

Demzufolge verschwindet jetzt A bei beliebigem p^μ; also muß auch stets B verschwinden und das ergibt wegen der Willkürlichkeit von p^μ, p^μ_τ, $p^\mu_{\tau\sigma}$ drei neue Serien von Identitäten, da man die Koeffizienten jeder Ableitung einzeln Null setzen darf. Das ergibt

$$2\frac{\partial(\mathfrak{T}^\sigma_\tau + \mathfrak{B}^\sigma_\tau)}{\partial w^\sigma} = 0, \tag{26}$$

$$2\,\mathfrak{T}^\sigma_\tau + 2\,\mathfrak{B}^\sigma_\tau - \frac{\partial\left(\frac{\partial \Omega}{\partial q_{\varrho,\sigma}} q_\tau\right)}{\partial w^\varrho} = 0, \tag{27}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial q_{\varrho,\sigma}} + \frac{\partial \Omega}{\partial q_{\sigma,\varrho}} = 0\ ^1). \tag{28}$$

---

[1]) Die Identitäten sind nicht voneinander unabhängig. Aus (26) und (27) folgt nämlich schon (28).

Benutzt man die bekannte Beziehung

$$\frac{\partial \mathfrak{Q}^{\varrho}}{\partial w^{\varrho}} = 0, \tag{29}$$

und die Maxwellschen Gleichungen (11), so wird aus (25)

$$\mathfrak{T}_{\mu\tau} g_{\tau}^{\mu\tau} + 2\frac{\partial \mathfrak{T}_{\tau}^{\sigma}}{\partial w^{\sigma}} = 0. \tag{30}$$

Infolge der Maxwellschen Gleichungen geht (27) über in

$$2\mathfrak{T}_{\tau}^{\sigma} + 2\mathfrak{B}_{\tau}^{\sigma} - \frac{\partial \Omega}{\partial q_{\varrho,\sigma}} q_{\tau\varrho} = 0. \tag{31}$$

Durch Einsetzen des Wertes von $\mathfrak{B}_{\tau}^{\sigma}$ und unter Berücksichtigung der Bedingung (28), welche besagt, daß die $q_{\varrho,\sigma}$ nur in der Verbindung (4) der $\lambda_{\varrho\sigma}$ vorkommen, ergibt sich für (31) auch

$$\mathfrak{T}_{\tau}^{\sigma} = -\frac{1}{2}\Omega\delta_{\tau}^{\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda_{\varrho\sigma}}\lambda_{\varrho\tau}. \tag{32}$$

Dadurch ist $\mathfrak{T}_{\tau}^{\sigma}$ definiert.

5. Wir wollen zum Schluß unser Ergebnis an der speziellen Relativitätstheorie nachprüfen, wo

$$\Omega = \Sigma \lambda_{\varrho\sigma}^{2}. \tag{33}$$

Durch Nachrechnen überzeugen wir uns von der Richtigkeit. Die Identitäten (30) liefern, da in unserem Falle $g_{\tau}^{\mu\nu} = 0$ ist, direkt die Erhaltungssätze

$$\frac{\partial \mathfrak{T}_{\tau}^{\sigma}}{\partial w^{\sigma}} = 0. \tag{34}$$

Ferner wird in der Tat $\mathfrak{B}_{\tau}^{\sigma}$ ein Ausdruck, dessen Divergenz identisch verschwindet, wie es sein muß.

Über die Präzisionsmessung der Radiumemanation.

Von **A. Becker** in Heidelberg.

Mit zwei Abbildungen. (Eingegangen am 3. Januar 1924.)

Während die große Mehrzahl der älteren, vornehmlich den praktischen Interessen der Quellenuntersuchung dienenden Emanationsmessungen durch das Bedürfnis nach bequemer Durchführbarkeit ausreichend geleitet zu sein glaubte und die Frage nach Exaktheit zurückstellte, hat sich heute wohl allgemein die Erkenntnis durchgesetzt, daß eine wesentliche Bedeutung für die nutzbringende Auswertung der Meßergebnisse über den Wert einer Orientierung hinaus gegenwärtig nur mehr jeder Kritik standhaltenden Präzisionsmessungen zukommt. Die ursprünglich vorwiegend durch rein physikalische Interessen vertretene Forderung der Präzision wird damit auch für die unter balneologischen, geologischen, radiochemischen und medizinischen Gesichtspunkten angestellten Untersuchungen Richtung gebend, und es entsteht die Frage, wieweit beim Stand der gegenwärtigen Kenntnis dieser Forderung allgemein zu genügen ist unter möglichster Wahrung der Vorteile der einfachen Meßweise. Es werde daher im folgenden kurz auf die prinzipiellen Bedingungen einer einwandfreien Emanationsmessung [1]) und deren praktische Realisierung näher eingegangen.

1. Allgemeines Meßprinzip.

Der unmittelbaren Messung unterliegt in jedem Fall die in einem abgeschlossenen, mit der betreffenden Emanation beschickten Luftraum erzeugte Leitfähigkeit. Sie wird bestimmt entweder aus dem Ladungsverlust eines aufgeladenen Systems mittels eines Elektrometers für hohe Spannung oder aus der Ladungsaufnahme eines ursprünglich ungeladenen Systems mittels eines Elektrometers für niedere Spannung. Die so erhaltenen Werte bilden die Grundlage für die Maßangabe der Emanationsmenge. Man kann ihnen hierfür entweder absolute oder nur relative Bedeutung beimessen. Der erste Weg ist der ältere, bis vor kurzem fast ausschließlich begangene. Er erstrebt die Verwirklichung der Forderung, daß die Emanationsmenge durch den bei voller Ausnutzung der α-Strahlung der isolierten Emanation auftretenden Sättigungsstrom gemessen werde. Nachdem man sich der praktisch kaum überwindbaren, dem entgegenstehenden

[1]) Mit Benutzung der α-Strahlung.

Schwierigkeiten, die ich an früherer Stelle eingehend besprochen habe [1]), bewußt geworden ist und in ihnen die Ursache für die großen Unstimmigkeiten in der älteren Literatur erkannt hat, kommt nunmehr nur noch der zweite Weg in Betracht. Die gemessene Leitfähigkeit hat nur Bedeutung relativ zu derjenigen einer bekannten Emanationsmenge; die Maßangabe wird auf eine Eichung des Meßinstruments zurückgeführt, wodurch in der Tat die Mehrzahl der oben erwähnten Schwierigkeiten wegfällt. Obwohl dieser Weg bereits auf dem internationalen Kongreß für Radiologie und Elektrizität in Brüssel im Jahre 1910 mit der Festlegung des Radiumäquivalents der gemessenen Emanation — d. h. derjenigen Radiummenge, für welche die gemessene Emanation die Gleichgewichtsmenge ist — als Emanationsmaß vorgezeichnet war, blieb er doch auch in der Folgezeit fast völlig unbeschritten. Denn wenn es auch feststand, daß es hierzu lediglich einer Eichung des benutzten Meßapparats mit einer Emanationsmenge bekannten Radiumäquivalents bedürfe, war einerseits die Durchführbarkeit einer einwandfreien Eichung überhaupt bei den gebräuchlichen Apparaten kaum gesichert, während andererseits die Herstellbarkeit eines zuverlässigen, mit der Zeit völlig unveränderlichen Eichpräparats noch in Frage stand.

2. Das Eichverfahren.

Die Zuverlässigkeit des Eichverfahrens hängt zunächst von der Erfüllung der Bedingung ab, daß die Messung der zu untersuchenden Emanationsmenge unter genau den gleichen Verhältnissen erfolgt wie diejenige der bekannten Emanationsmenge. Ob dann die beobachteten Wirkungen ausschließlich diejenigen der Emanation oder noch hinzukommender Zerfallsprodukte derselben sind, ob der Sättigungsstrom erreicht wird oder nicht, ob eine mehr oder weniger vollständige Ausnutzung der emittierten α-Strahlen im Apparat stattfindet, bleibt belanglos, wenn nur alle Verhältnisse für Messung und Eichung dieselben sind. Erforderlich ist besonders, daß in beiden Fällen der Untersuchungsraum im gleichen radioaktiven Zustand ist und daß auch die elektrischen Verhältnisse genau die gleichen sind.

Während die üblichen, aus der Quellenpraxis stammenden älteren Meßverfahren sich für die Durchführung dieser Forderungen wenig

[1]) A. Becker, Über Emanations- und Radiummessungen nach den meist gebräuchlichen Methoden und mit dem Emanometer. Heidelberg, C. Winter, 1914. Die hier im einzelnen mitgeteilten Gesichtspunkte finden sich viel später auch bei P. Ludewig, Jahrb. f. d. Berg- u. Hüttenwesen in Sachsen 1921, S. 10, und Strahlentherapie **13**, 163, 1921.

geeignet erwiesen, suchte ihnen das als zuverlässigstes angesehene Laboratoriumsverfahren durch Messung der Emanation im radioaktiven Gleichgewicht mit ihren Zerfallsprodukten, d. h. nach etwa $3^1/_2$ Stunden nach ihrer Einführung in den Meßraum, und durch Festhalten der benutzten Meßspannungen zu genügen. Ist damit in der Tat auch die verlangte Fehlerfreiheit des Meßverfahrens erreichbar, so enthält es aber andererseits einen weitgehenden Verzicht auf Schnelligkeit der Messung. Denn der Untersuchungsraum ist für eine einzige Messung nicht nur während der Dauer der Einstellung des radioaktiven Gleichgewichts, sondern auch während der längeren Zeit der Abklingung der sehr erheblichen Infektion desselben okkupiert.

Diese Erwägungen führten schon frühzeitig zur Konstruktion eines neuen, den Forderungen des Eichverfahrens besonders angepaßten Meßinstruments, des Emanometers [1]), das namentlich in seiner neuesten, technisch verfeinerten Form [2]), die es in letzter Zeit erhalten hat, den Vorteil größtmöglicher Genauigkeit und Sicherheit mit demjenigen kürzester und einfachster Durchführbarkeit der Messung in sich vereinigt und daher als radioaktives Präzisionsinstrument anzusehen ist.

3. Die Messung mit dem Emanometer.

Das Instrument besteht aus dem evakuierbaren Zylinderkondensator K (Fig. 1) mit isolierter Innenelektrode, aufgesetztem Mehrweghahn H und der Schlangenröhre Sp, die als Vorraum dient. Der Mehrweghahn ermöglicht die Herstellung aller für den gesamten Gebrauch des Apparats erforderlichen Verbindungen bzw. Trennungen der in Betracht kommenden Räume.

Die zu messende Emanation wird im Vorraum Sp gesammelt und dann zu bestimmter Zeit restlos in den Meßraum K überführt. Beobachtet wird mit Hilfe eines angeschalteten Elektrometers unter jeweils konstant gehaltenen elektrischen Bedingungen derjenige Elektrizitätsübergang im Gase des Meßraums, den die Emanation vom Augenblick ihrer Einführung an während einer für alle Versuche festgehaltenen Zeitdauer verursacht. Da sonach für jede Einzeluntersuchung die Zeit der Messung mit derjenigen der Einführung der Emanation in den Meßraum streng koinzidiert, liegen in jedem Fall gleiche radioaktive Verhältnisse vor, und es ist außerdem, da zwischen der Einführung der Emanation und ihrer Messung keine Zeit verstreicht, die Infizierung des Apparats auf ein Minimum herabgesetzt.

---

[1]) A. Becker, ZS. f. Instrkde. **30**, 293, 1910; ZS. f. Balneologie **3**, Nr. 12, 1910.
[2]) A. Becker, Strahlentherapie **15**, 365, 1923.

Als Elektrometer kann sowohl ein solches für niedere als ein solches für hohe Spannungen benutzt werden. Dasselbe kann entweder vom Emanometer räumlich getrennt aufgestellt werden — letzteres besitzt hierfür einen besonderen Fuß (Fig. 1) — oder beide Apparate stehen miteinander in einheitlicher starrer Verbindung (Fig. 2).

Der Gang einer Messung ist der folgende:

a) Evakuation von Vor- und Meßraum. Der Hahn *H* steht auf Marke *P*, und die angeschlossene Pumpe (Wasserstrahl- oder

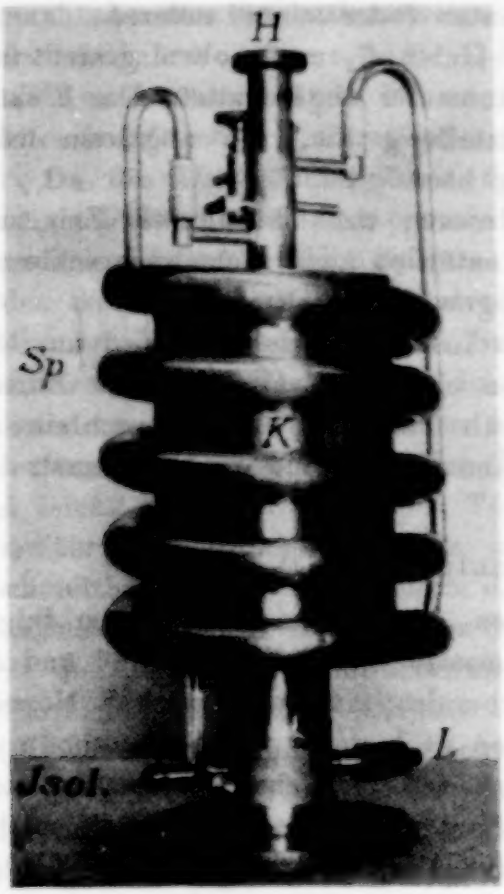


Fig. 1.

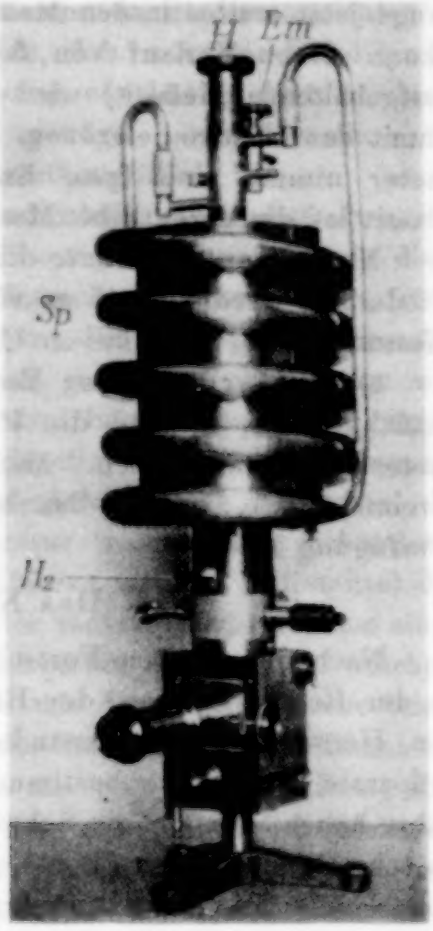


Fig. 2.

andere einfache Pumpe) ist in Tätigkeit. Der Hahn *Em* ist geschlossen, und es kann inzwischen das Präparat, dessen Emanationsgehalt untersucht werden soll, an den Rohrzweig *Em* angeschlossen werden.

b) Sammlung der Emanation im Vorraum. Der Hahn *H* wird um 90° auf Marke *Em* gedreht. Die zu messende Emanation kann jetzt nach vorsichtiger Einstellung des Hahns *Em* durch nachströmende Luft in den Vorraum *Sp* eingeführt werden.

c) Elektrische Einstellung. Das nach Herabdrücken des Hebels H_2 mit dem Innenstab verbundene Elektrometer wird, falls Ladungsverluste gemessen werden, auf die für alle Messungen festgelegte Ausgangsspannung aufgeladen (Einstellung auf den Nullpunkt seiner Skale) oder, falls Aufladungen gemessen werden, von Erde isoliert, während der Zylinder dauernd eine konstante Spannung von einigen 100 Volt erhält.

d) Messung der Emanation. Es wird der Hahn H um weitere 90° auf Marke M gedreht und die Zeit notiert. Die Emanation gelangt jetzt restlos in den Meßraum K, und das Elekrometer kommt in Gang. Nach Verlauf von 3 Minuten (oder einer anderen, dauernd festgehaltenen Meßzeit) wird der Hebel H_2 nach oben gestellt und damit das Elektrometer vom Emanometer abgeschaltet. Das Elektrometer nimmt eine feste Endeinstellung ein, die abgelesen wird. Damit ist die eigentliche Messung beendigt.

Nach Wunsch könnte die Messung nach bestimmter Zeit auch wiederholt werden, und es wäre natürlich auch nicht ausgeschlossen, Messungen im radioaktiven Gleichgewicht durchzuführen.

e) Entfernung der Emanation. Der Hahn H wird um 180° zurückgedreht, so daß die Pumpe eine Neuevakuation des Emanometers vornehmen kann. Man spült dann mit Freiluft noch ein- bis zweimal nach, worauf das Instrument für eine neue Messung zur Verfügung steht.

4. Das Normalpräparat[1]).

Nach den großen Fortschritten, die in den vergangenen Jahren in der Reindarstellung der Radiumsalze erzielt worden sind und die zur Herstellung untereinander übereinstimmender starker Normalpräparate für Radiumbestimmungen nach der γ-Strahlenmethode geführt haben, können die Schwierigkeiten der Gehaltsfestsetzung nicht zu schwacher Präparate heute als überwunden gelten. Steht ein solches abgeschlossenes Normalpräparat zur Verfügung, so kann es ohne weitere Voraussetzung als Grundlage einer einwandfreien Eichung auf schwache Emanationsmengen dienen. Man bestimmt mit seiner Hilfe, wie dies kürzlich von Herrn Bothe[2]) gezeigt worden ist, durch γ-Strahlmessung das Radiumäquivalent einer größeren Emanationsmenge beliebiger Herkunft, entnimmt dieser durch sorgfältige Volumenunterteilung einen bekannten Bruchteil und benutzt diesen zu der verlangten Eichung des Emanationsmeßinstruments. Da bei diesem

[1]) Siehe auch A. Becker, Strahlentherapie **14**, 707, 1922.
[2]) W. Bothe, ZS. f. Phys. **16**, 266, 1923.

Verfahren das Normalpräparat dauernd in streng unveränderlichem Zustand bleibt, kommt ihm in prinzipieller Hinsicht größte Zuverlässigkeit zu. Seine Durchführung ist indes nicht sehr einfacher Art, zumal jede Eichung im allgemeinen eine neue γ-Strahlmessung voraussetzt. Man wird daher vom praktischen Standpunkt aus dem einfacheren Verfahren den Vorzug geben, welches die der Eichung dienende Emanation dem Normalpräparat selbst entnimmt; dies bringt den weiteren Vorteil, daß man mit einem sehr schwachen Normalpräparat auskommt. Da dieses Verfahren aber an die Voraussetzung gebunden ist, daß das Normalpräparat jederzeit eine in Radiumäquivalenten genau bekannte Emanationsmenge liefere, d. h. u. a. der Forderung der zeitlich konstant bleibenden und restlosen Abtrennbarkeit der entwickelten Emanation genüge, bedarf es einer besonderen kritischen Prüfung seiner Zuverlässigkeit.

Da die Unveränderlichkeit der radioaktiven Eigenschaften am wenigsten bei festen Präparaten zu bezweifeln ist, könnten diese in erster Linie als Eichpräparate in Betracht kommen. Dem steht indes erschwerend der Umstand entgegen, daß eine quantitative Abtrennung der in einer festen Substanz gebildeten Emanation nur durch vollständige Überführung der Substanz in den flüssigen Aggregatzustand, sei es durch Schmelzen oder durch Auflösen, erreichbar ist. Hierfür eignen sich nun in der Tat zunächst solche Präparate, die bei leicht erreichbarer höherer Temperatur in eine klare Schmelze [1]) überführt werden können. Man muß hierzu zu dem Hilfsmittel des „schmelzbaren Zusatzes" greifen, d. h. der radioaktiven Substanz einen inaktiven Stoff mit niedrigerem Schmelzpunkt zufügen, in welchem sich die erstere bei Temperaturen, die mit der Bunsenflamme leicht zu erreichen sind, unter restloser Abgabe der entwickelten Emanation völlig löst. Wird eine solche Schmelze mit bekanntem Radiumgehalt in einem Tiegel in ein Gluckerfläschchen aus schwer schmelzbarem Glas eingeschmolzen, so stellt sie ein jederzeit verwendbares und zeitlich konstantes Normalpräparat dar.

Ein besonders vorteilhaftes festes Normalpräparat ist homogene, von Begleitgestein freie Uranpechblende. Denn sie ist, als gut vermischtes feines Pulver aufbewahrt, in ihren radioaktiven Eigenschaften als vollständig unveränderlich anzusehen; ihr Radiumgehalt kann, wie neuere Untersuchungen sichergestellt haben [2]), mit jeder

[1]) Vgl. H. Holthusen, Heid. Akad. d. Wiss. (A) 1912, 16. Abh.

[2]) B. Heinemann u. W. Markwald, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **10**, 299, 1913; A. Becker u. P. Jannasch, ebenda **12**, 1, 1915; S. C. Lind u. L. D. Roberts, Journ. Amer. Chem. Soc. **42**, 1170, 1920.

wünschenswerten Genauigkeit aus der analytischen Festlegung des Urangehalts erschlossen werden, und dieser Gehalt ist schon in kleinen, mit der Wage noch gerade leicht bis auf etwa 1 Proz. angebbaren Mengen von solcher Größe, wie sie für Eichungen gerade in Betracht kommt[1]). Von besonderem Vorteil ist die bis auf belanglose Spuren von Kieselsäure vollständige Löslichkeit des Minerals in Salzsäure mit nachfolgendem Salpetersäurezusatz, wodurch die Emanationsabgabe quantitativ gesichert ist[2]). Handelt es sich um zeitlich weit auseinanderliegende Eichungen, so wird man jeweils eine neue Lösung herstellen und die Eichung dadurch von etwaiger zeitlicher Änderung des gelösten Präparats mit Sicherheit unabhängig erhalten.

Damit kommen wir zur näheren Betrachtung der Eigenschaften **radioaktiver Lösungen**. Es ist kein Zweifel, daß Eichungen mit Hilfe von Normallösungen, als welche auch die vorgenannten Pechblendelösungen zu betrachten sind, sich durch die Einfachheit ihrer Durchführung auszeichnen. Denn Lösungen sind einerseits vielfach leicht herstellbar und andererseits auf vollkommene Weise, etwa durch Ausschütteln oder Ausgluckern, von ihrer Emanation zu befreien[3]). Ein wesentlicher Einwand gegen ihre Verwendung kann aber aus dem Umstand hergeleitet werden, daß die Konstanz der Emanationsabgabe einer Lösung von Bedingungen abhängt, deren Zutreffen nicht immer mit Sicherheit zu erkennen ist. Die wesentlichste Bedingung ist die, daß keinesfalls Ausfällungen gelösten Radiums erfolgen dürfen, da solche, auch wenn sie dem Auge völlig verborgen blieben, die Emanationsabgabe der Lösung in sehr erheblichem Maße beeinträchtigen würden[4]). Dieser Umstand war es auch, welcher auf dem erwähnten Kongreß in Brüssel die Vereinbarung eines einheitlichen Emanationsmeßverfahrens verhinderte. Die namentlich für die Balneologie sehr empfindlichen Folgen fortgesetzter Unsicherheit in den Angaben von Emanations- bzw. Radiumgehalten glaubte im vergangenen Jahre die Radiumtagung in Freiberg i. S. dadurch abstellen zu müssen, daß sie die Verwendung von Radiumlösungen bei Emanationsmessungen als Eichpräparate zum Beschluß erhob, obwohl auch sie sich ebensowenig wie der genannte Kongreß auf ein einheitliches Urteil über die zeitliche Haltbarkeit dieser Lösungen stützen konnte[5]).

---

[1]) Bei sorgfältigen Untersuchungen wird man dabei der geringen Hygroskopizität des Pulvers Rechnung tragen.

[2]) Siehe hierzu A. Becker u. P. Jannasch, a. a. O., S. 18 u. f.

[3]) Siehe hierzu A. Becker, Über die Emanationsentnahme aus Flüssigkeiten, Heid. Akad. d. Wiss. (A) 1920, 6. Abh.

[4]) Vgl. A. Becker u. H. Holthusen, Heid. Akad. d. Wiss. (A) 1913, 6. Abh.

[5]) Siehe P. Ludewig, Jahrb. f. d. Berg- u. Hüttenwesen in Sachsen 1921, S. 10.

Über eine bei dieser Sachlage zum dringenden Bedürfnis gewordene systematische Untersuchung der ganzen Frage habe ich kürzlich an anderer Stelle[1]) eingehend berichtet. Dieselbe hat den wichtigen Nachweis erbracht, daß alle geprüften Radiumlösungen, deren Gehalt zwischen etwa 0,02 und 0,0000005 mg Ra/g variierte, innerhalb acht Jahren keine Veränderung erfahren haben, welche die Unsicherheit der Messung von maximal 1 Proz. überstiege. Damit ist festgestellt worden, daß die Herstellung von Radiumlösungen tatsächlich unter Bedingungen durchführbar ist, welche bei sachgemäßer Behandlung einen völlig unveränderten Zustand dieser Lösungen während einer langen Reihe von Jahren gewährleisten, und daß daher die Verwendung von Radiumlösungen als konstante Emanationsquellen tatsächlich durchaus möglich ist. In Übereinstimmung mit diesem allgemein wichtigen Resultat ist durch neuere Messungen[2]) festgestellt worden, daß speziell auch die Radiumlösungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt der Bedingung der Konstanz mindestens über einen Zeitraum von ein bis zwei Jahren entsprechen[3]). Es bleibt demgegenüber allerdings die Möglichkeit bestehen, daß unter Umständen eine Veränderung der Lösung eintritt und dann vielleicht nicht ohne weiteres erkennbar ist. Handelt es sich um unbedingte Zuverlässigkeit der Emanationsbestimmung, so wird daher eine wiederholte Prüfung der Lösungen — etwa mit Hilfe eines Pechblendepräparats — nicht zu umgehen sein.

Eine weitere Frage betrifft den Absolutwert des Radiumgehalts des benutzten Eichpräparats. Die einfachste Möglichkeit seiner Prüfung bietet ebenfalls das Pechblendepräparat. Dessen Radiumgehalt kann entweder durch einen Vergleich mit einem gesicherten Normalradiumpräparat oder durch eine exakte Urananalyse festgestellt werden. Während das erstere Verfahren den Besitz eines geprüften Normalpräparats voraussetzt, an das man eine größere Pechblendemenge ein für allemal anschließen wird, verlangt das zweite Verfahren die gesicherte Kenntnis des Radium-Uranverhältnisses der Pechblende. Nach der eingehenden eigenen Untersuchung[4]) desselben, deren Ergebnisse durch inzwischen bekannt gewordene neuere Messungen

---

[1]) A. Becker, ZS. f. anorg. u. allgem. Chem. **124**, 143, 1922.

[2]) P. Ludewig u. S. Lorenser, ZS. f. Phys. **13**, 284, 1923; W. Bothe, ebenda **16**, 266, 1923.

[3]) Wenn aber die genannte Arbeit der Herren Ludewig und Lorenser glaubt für sich beanspruchen zu können, durch ihre späteren und in keinem Punkte weitergehenden Beobachtungen erst den Nachweis der Brauchbarkeit von Radium- und Urannormallösungen für Emanationsmessungen erbracht zu haben, so genügt es, demgegenüber auf meine älteren Untersuchungen hinzuweisen.

[4]) A. Becker u. P. Jannasch, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **12**, 1, 1915.

von anderer Seite [1]) vollkommen bestätigt worden sind, ist als wahrscheinlichster Wert dieses Verhältnisses $3{,}40 \cdot 10^{-7}$ anzunehmen.

Es ist von Interesse zu prüfen, wieweit die auf solchen Grundlagen von verschiedener Seite hergestellten Normallösungen tatsächlich übereinstimmen. Ich habe daher mit Hilfe des Emanometers unter gleichen äußeren Bedingungen fünf verschiedene Eichlösungen miteinander verglichen, nämlich zwei der früher auf Haltbarkeit untersuchten eigenen Radiumnormallösungen (Ra 24 und Ra 27), eine Uranpechblendelösung (U 2) und zwei Normalradiumlösungen der Reichsanstalt [2]) (P.T.R. 1075 und 1076), deren Gehalt zu je $3{,}33 \cdot 10^{-6}$ mg Ra angegeben war. Die Lösungen wurden in Gluckerfläschchen bekannter Art eingeschmolzen und jeweils mehrfach nach variierten Erholungspausen untersucht. Jede solche Messung bestand aus drei aufeinanderfolgenden Beobachtungen an der gleichen Emanation, die mittels des Quadrantelektrometers in folgender Weise durchgeführt worden sind [3]): Zunächst wurde die Elektrometereinstellung innerhalb der ersten drei Minuten nach Beginn des Einströmens der filtrierten Emanation beobachtet; hierauf wurde die entsprechende Beobachtung noch zweimal am ruhenden Gas wiederholt unter Zwischenfügen einer Erdungspause von jeweils zwei Minuten. Es erfolgten also jeweils drei Einzelmessungen der gleichen Emanation, die alle dadurch ausgezeichnet sind, daß der Zeitpunkt der Messung nach Einströmung und daher auch die zugehörigen radioaktiven Verhältnisse fest bestimmt sind. Die folgende Tabelle enthält die nach Abzug des Leergangs erhaltenen, auf gleiche Mengenempfindlichkeit der Apparatur korrigierten [4]) Ergebnisse.

Benutzt man den durch die Herstellung der drei ersten Präparate festgelegten Radiumgehalt zur Apparateichung, so erhält man die unter mg/Sk. verzeichneten Eichdaten, die durch ihre vortreffliche Übereinstimmung (Abweichung der Einzelwerte vom Mittelwert 0,46 bzw. 0,16 und 0,24 Proz.) als gut gesichert erscheinen. Berechnet man mit ihren Mittelwerten dann den Radiumgehalt der Lösungen der Reichs-

[1]) S. C. Lind u. L. D. Roberts, Journ. Amer. Chem. Soc. **42**, 1170, 1920.

[2]) Die mir zu diesem Zweck von Herrn Prof. H. Geiger zur Verfügung gestellt worden sind.

[3]) Vgl. A. Becker, Strahlentherapie **15**, 380, 1923.

[4]) Es genügt in der Tat vollkommen die jeweilige Ermittlung der Mengenempfindlichkeit mit Hilfe einer vorteilhaft dauernd angeschalteten Influenzierungskapazität. Eine Prüfung der γ-Strahlenempfindlichkeit kann jedenfalls keine weiteren Anhaltspunkte geben, da ihre Abhängigkeit von den besonderen Faktoren der Meßempfindlichkeit nicht mit derjenigen der α-Strahlenempfindlichkeit zusammenfällt (vgl. A. Becker, Strahlentherapie **15**, 365, 1923; siehe auch W. Bothe, ZS. f. Phys. **16**, 268, 1923).

anstalt, so erhält man die angeführten sechs Werte, die, da eine systematische Abweichung beider Lösungen voneinander nicht erkennbar ist, den Mittelwert $3{,}305 \cdot 10^{-6}$ mg Ra berechnen lassen, der nur

Emanationsmenge [1]) p Proz.	I		II		III	
	Sk.	$\frac{\text{Sk.}}{p} \cdot 100$	Sk.	$\frac{\text{Sk.}}{p} \cdot 100$	Sk.	$\frac{\text{Sk.}}{p} \cdot 100$
			Ra 24 = 0,000 009 29 mg Ra			
20,0	8,52	42,60	11,48	57,42	12,17	60,85
14,2	6,00	42,25	7,85	56,28	8,66	61,00
14,6	6,25	42,81	8,07	56,28	—	—
20,73	9,06	43,70	11,79	56,87	12,66	61,07
29,45	13,02	44,21	16,50	56,03	18,08	61,41
17,65	7,82	44,31	9,91	56,15	10,71	60,68
Mittel	—	43,31	—	56,51	—	61,00
mg/Sk.	—	$214{,}5 \cdot 10^{-9}$	—	$164{,}4 \cdot 10^{-9}$	—	$152{,}3 \cdot 10^{-9}$
			Ra 27 = 0,000 014 62 mg Ra			
12,1	8,40	69,42	10,89	90,00	11,89	98,26
20,15	13,92	69,08	17,67	87,69	19,11	94,84
12,8	8,66	67,66	11,19	87,41	12,19	95,23
15,5	10,75	69,35	13,95	90,00	14,68	94,71
15,4	11,01	68,49	13,94	90,52	14,73	95,65
Mittel	—	68,80	—	89,12	—	95,74
mg/Sk.	—	$212{,}5 \cdot 10^{-9}$	—	$164{,}0 \cdot 10^{-9}$	—	$152{,}7 \cdot 10^{-9}$
			U 2 = 0,000 009 28 mg Ra			
25,7	11,21	43,62	14,90	56,98	15,95	61,06
34,55	14,93	43,21	19,42	56,21	21,27	61,56
25,6	11,13	43,47	14,52	56,72	15,62	61,01
16,3	7,12	43,68	9,19	56,38	9,88	60,61
Mittel	—	43,49	—	56,57	—	61,06
mg/Sk.	—	$213{,}4 \cdot 10^{-9}$	—	$164{,}0 \cdot 10^{-9}$	—	$152{,}0 \cdot 10^{-9}$
			P. T. R. 1074			
15,4	2,38	15,45	3,06	19,87	3,38	21,95
28,4	4,58	16,12	5,74	20,21	6,14	21,62
51,9	7,96	15,34	10,40	20,04	11,41	21,98
50,2	7,92	15,78	10,09	20,10	10,90	21,71
71,9	10,96	15,24	13,87	19,29	15,20	21,14
Mittel	—	15,59	—	19,90	—	21,68
Radiumgehalt mg	—	$3{,}33 \cdot 10^{-6}$	—	$3{,}27 \cdot 10^{-6}$	—	$3{,}31 \cdot 10^{-6}$
			P. T. R. 1075			
49,3	7,65	15,51	9,92	20,12	10,78	21,87
61,8	9,78	15,83	12,57	20,34	13,56	21,94
70,7	10,92	15,44	14,05	19,87	15,27	21,60
38,9	5,92	15,23	7,76	19,95	8,41	21,63
Mittel	—	15,50	—	20,07	—	21,76
Radiumgehalt mg	—	$3{,}31 \cdot 10^{-6}$	—	$3{,}29 \cdot 10^{-6}$	—	$3{,}32 \cdot 10^{-6}$

[1]) Hergeleitet aus der zeitlichen Erholung des abgeschmolzenen Präparats durch Mittelung zwischen zwei Erholungskurven der Radiumemanation, welche mit den Zerfallskonstanten $\lambda = 0{,}1800\ \text{Tg}^{-1}$ (E. Rutherford, Wien. Ber. **120**, 303, 1911) und $\lambda = 0{,}1819\ \text{Tg}^{-1}$ (W. Bothe u. G. Lechner, ZS. f. Phys. **5**, 335, 1921) — deren Mittel sehr gut mit dem neuesten von Herrn Bothe (a. a. O.) angegebenen Wert $\lambda = 0{,}1812\ \text{Tg}^{-1}$ übereinstimmt — berechnet.

um 1 Proz. im Sinne eines zu kleinen Gehalts von den Angaben der Reichsanstalt abweicht.

Ein Vergleich der Normallösungen der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt mit selbstbereiteten Urannormallösungen ist kürzlich auch von den Herren Ludewig und Lorenser[1]) durchgeführt worden mit dem Ergebnis einer Übereinstimmung bis auf etwa 0,5 Proz. Es ist zu bemerken, daß dieses Ergebnis mit demjenigen der vorliegenden Vergleichsmessungen nur scheinbar nahe übereinstimmt Denn da diese Herren für das Radium-Uranverhältnis ihrer Pechblende nur $3{,}3 \cdot 10^{-7}$ annehmen, so würden sie mit unserem neueren, als zuverlässiger angesehenen Wert für die Radiumlösungen der Reichsanstalt eine Höherwertigkeit um 3,5 Proz. gegenüber der Angabe konstatieren.

5. Zur Praxis der Emanationsmessung.

Die auf die im vorstehenden zusammengefaßte Kenntnis sich stützende Ausführung exakter Emanationsmessungen wird im allgemeinen nur in einer stationären Anordnung der Apparatur vorteilhafte Vorbedingungen finden. Der Gegensatz zu der alten, namentlich aus der Quellmeßpraxis gekommenen Forderung leichter Transportabilität des Meßapparats[2]), zu welchem wir damit gelangen, drängt zu der Frage, wieweit überhaupt mit der Verwirklichung der ursprünglichen Forderung der Emanationsmessung gedient war. Da man eine Vereinfachung des Verfahrens kaum darin erblicken kann, daß man den Meßapparat zur Quelle bringt statt die Quellprodukte zum Meßapparat, so sind die Hauptgesichtspunkte für jene Forderung wohl darin zu erblicken, daß man einerseits eine rasche Entscheidung darüber ermöglichen wollte, wieweit sich die eingehende Untersuchung einer Quelle überhaupt lohne, und daß man andererseits Emanationsverluste ausschließen wollte. Während man dem ersten Argument teilweise[3]) Verständnis entgegenbringen kann, ist dem zweiten gegenüber zu beachten, daß das Ausschalten eines Emanationsverlustes, was in der Tat eine grundlegende Forderung für jede einwandfreie Emanationsuntersuchung ist, Vorkehrungen erfordert, die im Grunde kaum dadurch begünstigt werden, daß der Meßapparat gerade leicht zu erreichen ist. Denn bei einem Apparat hoher Empfindlichkeit wird

---

[1]) P. Ludewig u. E. Lorenser, a. a. O.

[2]) Siehe auch A. Becker, Geol. Rundschau: im Erscheinen begriffen.

[3]) Sofern es sich lediglich um den Emanationsgehalt der Quelle handelt. Kommt dagegen auch der Radiumgehalt in Frage, was stets der Fall sein sollte, so ist hierüber durch kurze Beobachtungen an der Quelle selbst überhaupt nicht zu entscheiden.

eine teilweise Abklingung der gesammelten Emanation auf dem Wege zum Meßort — die gesetzmäßig festliegt und daher in Rechnung gesetzt werden kann — eine ungleich geringere Beeinträchtigung des Meßergebnisses verursachen als ungünstige Meßverhältnisse und fehlerhafte Entnahme der Emanation, worauf vielfach nicht allzusehr geachtet worden ist. Wie bei jenen älteren Verfahren so wird auch bei allen künftigen Untersuchungen jeder Art eine sorgfältige Sammlung der zu messenden Emanation — am sichersten in vorher evakuierte Behälter [1]) — die wichtigste Vorbedingung jeder exakten und nutzbringenden Messung sein.

Heidelberg, Radiologisches Institut, Januar 1924.

[1]) Siehe A. Becker, ZS. f. anorg. u. allgem. Chem. **131**, 209, 1923.

Über sensibilisierte Fluoreszenz von Blei- und Wismutdampf[1]).

Von **H. Kopfermann** in Göttingen.

Mit drei Abbildungen. — (Eingegangen am 5. Januar 1924.)

Die Untersuchungen über sensibilisierte Fluoreszenz, die von J. Franck und G. Cario[2]) angestellt worden sind, haben zu folgenden Resultaten geführt: Werden zwei Gase, A und B, die sich in einem abgeschlossenen Raume bei einer festen Temperatur befinden, mit monochromatischem Licht bestrahlt, das nur vom Gase A absorbiert wird, so können bei geeignet gewähltem Druck durch Stöße zweiter Art energetische Umwandlungen in der Form stattfinden, daß sich die Quantenenergie der Atome des Gases A beim Stoße in Anregungsenergie der Atome des Gases B verwandelt, wobei die thermische Translationsenergie, die das Gasgemisch vermöge seiner Temperatur besitzt, als Energiereservoir dient, dem je nach der Größe der Anregungsarbeit der Atome Energieüberschüsse zugeführt bzw. Energiefehlbeträge entnommen werden. Voraussetzung dabei ist, daß wenigstens die niedrigste Anregungsstufe der Atome des Gases B durch Zusammenwirken von thermischer und quantenhafter Energie erreicht werden kann. Andernfalls verteilt sich die thermische Relativenergie beim Stoße als Translationsenergie auf stoßendes und gestoßenes Atom nach dem Impulssatze. Über die Intensität, mit der die Linien in sensibilisierter Fluoreszenz auftreten, gilt die Regel: Es treten entsprechend der Wahrscheinlichkeit der einzelnen Quantenzustände alle Linien auf, die große Übergangswahrscheinlichkeit und starke Dopplerverbreiterung besitzen. Aus der eingestrahlten Energie $h\nu$ und der Temperatur des Gasgemisches lassen sich also bei Kenntnis des Serienschemas des Gases B die Linien, die in sensibilisierter Fluoreszenz erscheinen, unter Berücksichtigung obiger Intensitätsregel voraussagen. Umgekehrt bildet diese Anregung der Fluoreszenz von Gasen neben den schon bekannten Methoden ein Hilfsmittel, die Kenntnis der Serienzusammenhänge zu fördern. Versuche, die in dieser Richtung gemacht wurden, sind Gegenstand dieser Arbeit.

Es wurden Blei und Wismut mit einer Versuchsanordnung, die im wesentlichen dieselbe wie die von Franck und Cario ist, unter-

---

[1]) Auszug aus der Göttinger Dissertation.

[2]) J. Franck, ZS. f. Phys. **9**, 259, 1922; G. Cario, ebenda **10**, 185, 1922; G. Cario u. J. Franck, ebenda **17**, 202, 1923; J. Franck, Ergebn. d. exakten Naturwissenschaften **2**, 106, 1923.

sucht und das Absorptionsspektrum von Wismut aufgenommen. Es erschienen in sensibilisierter Fluoreszenz folgende Bleilinien:

Tabelle 1.

λ in Å	Intensität der Fluoreszenz
3683,60	stark
4057,97	schwach
3639,71	schwach
2873,40	sehr schwach
2833,17	sehr schwach

und folgende Wismutlinien:

Tabelle 2.

λ in Å	Intensität der Fluoreszenz
3067,81	ziemlich schwach
4722,72	schwach

Fig. 1 und 2 zeigen Reproduktionen der Spektrogramme[1]). Als Verunreinigungslinie des Bleis trat die Wismutlinie 3067,81 Å auf. Die Temperatur des Ofens, in dem sich das Blei bzw. das Wismut befanden, betrug etwa 950° C. Das Quecksilber zeigte Oberflächenresonanz. Die Absorptionsaufnahme (die ebenfalls bei 950° C gemacht wurde) ergab wie bei W. Grotrian[2]) nur die Linie 3067,81 Å und ein Gebiet von Banden von 2800 Å abwärts, doch konnte auch hier das äußerste Ultraviolett nicht untersucht werden, da eine kontinuierliche Schwärzung der photographischen Platte in diesem Gebiet mit den vorhandenen Hilfsmitteln nicht zu erreichen war.

Die Bleiaufnahmen stimmen mit dem Thorsen-Grotrianschen[3]) Serienschema überein, das in seinen Hauptzügen in Fig. 3 abgebildet ist. Die bei jeder Linie vermerkte einstellige Zahl bedeutet ihre Intensität in Emission; die in Fluoreszenz beobachteten Linien sind unterstrichen. Nimmt man mit Grotrian den $2p_4$-Term als Grundterm an, so wird die Linie 2833,17 Å als $2p_4 - 2s$ dargestellt. Der $2s$-Term kann mit Hilfe der Energie von 2536,7 Å bequem erreicht werden. Die Linie 2833,17 Å wird also von allen Bleilinien am stärksten angeregt. Daß sie trotzdem in so geringer Intensität er-

[1]) Auf Fig. 1 ist im Gegensatz zur Originalplatte nur die stärkste Bleilinie 3683,60 zu sehen.

[2]) W. Grotrian, ZS. f. Phys. **18**, 169, 1923.

[3]) V. Thorsen, Naturwiss. **11**, 78, 1923; W. Grotrian, l. c.

scheint, erklärt sich aus der geringen Dopplerverbreiterung, die ihr bei ihrem Entstehen erteilt wird. Diese entspricht etwa einer Bewegungsenergie von 0,27 Volt gegenüber der mittleren kinetischen Energie der Wärmebewegung bei 950° C von 0,15 Volt. Die Linie wird also zum großen Teil von den Atomen im Normalzustand wieder absorbiert. Die andern p-Terme haben der Reihe nach eine Anregungsenergie von 1, 1,3 und 2,7 Volt. Bei der gegebenen Temperatur wird daher der $2p_1$-Term durch thermische Anregung so gut wie nicht erreicht, wohl aber werden es die beiden anderen, $2p_2$ und $2p_3$. Wir haben es also mit zwei metastabilen Zuständen zu tun, und es

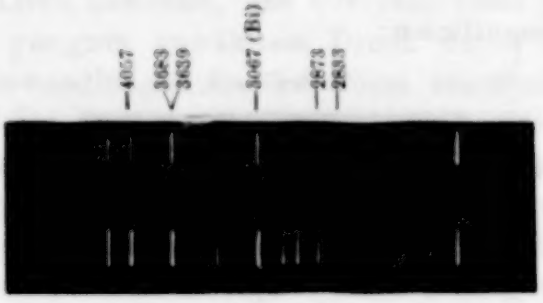


Fig. 1.

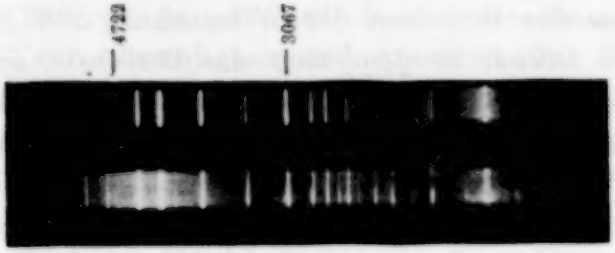


Fig. 2.

können prinzipiell alle Linien erscheinen, die von $2p_2$ bzw. $2p_3$ aus eine Anregungsenergie von 4,9 Volt besitzen. Es müßten also von $2p_2$ aus nicht nur $2s$, sondern auch $3s$, $3d_3$ und $3d'_2$ ($3d_1$ und $3d_2$ kombinieren nicht mit $2p_2$) und von $2p_3$ aus sowohl $2s$ als auch $3d_2$, $3d'_2$ und $3d_3$ ($3d_1$ kombiniert nicht mit $2p_3$) erreicht werden. Beobachtet wurden nur die Linien 3639,71, 4057,97 und 2873,40 Å nach Thorsen: $2p_3 - 2s$; $2p_2 - 2s$ und $2p_2 - 3d_3$. Die beiden ersteren erhalten bei ihrer Entstehung einen relativ großen Dopplereffekt, und, da sie in Emission die Intensität 6 aufweisen, so ist ihr Erscheinen verständlich. Daß von den Linien, die von $2p_3$ nach $3d_2$, $3d'_2$ und $3d_3$ in Absorption ausgehen, nicht wenigstens die Linie 2614,26 Å gleich $2p_3 - 3d'_2$, die in Emission die Intensität 5 hat, auftritt, erklärt sich aus ihrer geringen Dopplerverbreiterung. Sie wird also von den Atomen im $2p_3$-Zustand wieder absorbiert. Die

beiden anderen Linien haben zu geringe Übergangswahrscheinlichkeiten. Von den von $2p_2$ ausgehenden Linien besitzt nur 2873,40 Å zugleich genügende Dopplerverbreiterung und Übergangswahrscheinlichkeit. Bleibt noch die Linie 3683,60 Å. Sie kommt in dem Thorsenschen Schema nicht vor. Da sie bei den Absorptionsmessungen von W. Grotrian[1]) bei einer Temperatur von 1000° schwächer als 3639,71 Å, 4057,97 Å aber erst bei 1100° erscheint, so nimmt Grotrian an, daß sie von einem Term ausgeht, der zwischen $2p_3$ und $2p_2$ liegt; er nennt ihn $2p_5$ und deutet 3683,60 Å als $2p_5 - 2s$. Es ist aber bis jetzt nicht gelungen, diesen hypothetischen Term durch weitere

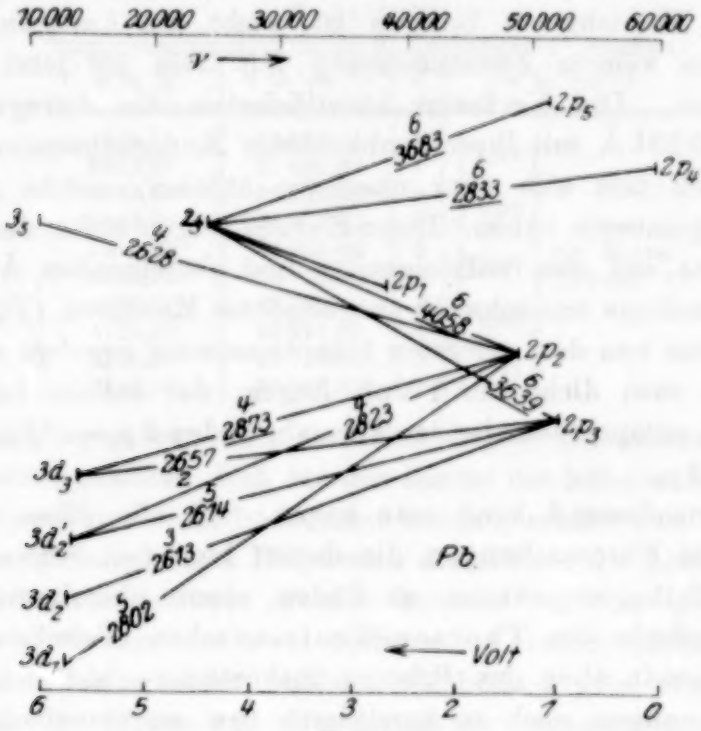


Fig. 3.

Kombinationen zu stützen. K. W. Meissner[2]) gibt allerdings an, daß die Differenz $2p_3 - 2p_5$ bei Schwingungsdifferenzen im Ultraroten sich wiederfindet. Auch im Ültravioletten gibt er eine Kombination an, die diesen konstanten Abstand besitzt, nämlich die Schwingungsdifferenz von 2254,02 und 3683,60 Å. Andererseits ergibt die Linie 2254,02 Å mit 2980,29 Å kombiniert die Differenz $2p_2 - 2p_1$, so daß sie sowohl als $2p_2 - 5d_3$ als auch als $2p_5 - 4d_1$ gedeutet werden kann. Da die Linie 2254,02 Å nach Kayser und Runge[3]) die

[1]) W. Grotrian, l. c.
[2]) K. W. Meissner, Ann. d. Phys. **71**, 135, 1923.
[3]) Kayser und Runge, Wied. Ann. **52**, 93, 1894.

Intensität 4 in Emission besitzt, so wäre ihr doppeltes Vorkommen wohl möglich. Merkwürdig bleibt nur die Tatsache, daß dann keine entsprechende Linie existiert, die von dem $3\,d_1$-Term aus mit $2\,p_5$ kombiniert. An dem Wert der Termdifferenz $2\,p_3 - 2p_5$ dürfte kaum zu zweifeln sein, nur scheinen die Tatsachen dagegen zu sprechen, sie von $2\,p_3$ aus anzutragen.

Foote, Mohler und Stimson[1]), die die Anregungs- und Ionisierungsspannung von Blei mit Hilfe der Elektronenstoßmethode gemessen haben, geben aus ihren Kurven für die Ionisierungsspannung 7,9 Volt, für die Anregungsspannung 1,26 Volt an. Während der erste Wert mit dem Grotrianschen Grundterm, der 7,3 Volt entspricht, in Einklang zu bringen ist, steht die Anregungsspannung scheinbar in keinem Zusammenhang mit dem bis jetzt bekannten Serienschema. Die Verfasser identifizierten die Anregungsenergie der Linie 10291 Å mit ihrer beobachteten Anregungsspannung. Aus ihren Kurven läßt sich aber unschwer ablesen, welche Anregungsenergie sie gemessen haben. Diese Kurven zeigen außer den typischen Hauptmaxima auf den aufsteigenden und absteigenden Ästen je ein relatives allerdings nur schwach ausgebildetes Maximum. Die Abstände dieser Maxima von dem nächsten Hauptmaximum ergeben drei Werte, von denen zwei dicht um 1 Volt liegen, der andere bei 1,3 Volt. Diese Werte entsprechen also den Termabständen $2\,p_4 - 2\,p_3$, $2\,p_4 - 2\,p_5$ und $2\,p_4 - 2\,p_2$.

Zusammenfassend kann man sagen, daß alle diese methodisch verschiedenen Untersuchungen, die darauf hinzielen, Serienzusammenhänge im Bleibogenspektrum zu finden, darin übereinstimmen, daß die Termabstände des Thorsen-Grotrianschen Bleischemas richtig sind. Inwieweit aber das Schema insbesondere in bezug auf die Termbezeichnungen noch zu korrigieren bzw. zu vervollständigen ist, wird wohl nur der Zeemaneffekt lehren.

Über Serienzusammenhänge im Wismutbogenspektrum war bisher außer den von Kayser und Runge[2]) angegebenen Schwingungsdifferenzen nichts bekannt. Die Werte dieser Differenzen betragen: 10245 cm^{-1}, 6225 cm^{-1} und 21667 cm^{-1}. Aus 12 Linien ergeben sich durch entsprechende Addition dieser Zahlen 17 andere Wismutlinien mit einer Genauigkeit, die Zufälligkeiten ausschließt. Unter ihnen sind die in sensibilisierter Fluoreszenz beobachteten Linien nicht zu finden. Die Differenz ihrer Schwingungszahlen beträgt 11422 cm^{-1},

---

[1]) Foote, Mohler und Stimson, Bull. Bur. of Stand **15**, 723, 1919.
[2]) Kayser und Runge, Wied. Ann. **52**, 93, 1894.

d. h. die Differenz von 21667 — 10245 cm^{-1}. Nimmt man, was aus Absorptions- und Fluoreszenzmessung zu vermuten ist, an, daß der Term, von dem die Absorptionslinie 3067,81 Å ausgeht, der Grundterm des Wismutatoms ist — wir wollen ihn Term I nennen —, so ergeben sich von ihm aus drei weitere Stufen:

Term II, dessen Abstand von Term I 11422 cm^{-1}
Term III, „ „ „ „ I 15442 cm^{-1}
Term IV, „ „ „ „ I 21667 cm^{-1}

beträgt.

Term IV ist doppelt, wie die Paare von Linien mit konstanten Schwingungsdifferenzen zeigen:

Tabelle 3.

λ in Å	ν in cm^{-1}	J	$\Delta\nu$ in cm^{-1}	
4615,71	21665,14	1	2,06	
4615,27	21667,20	1		
4493,16	22256,05	2	1,83	
4492,79	22257,88	2		
4308,70	23208,86	3	1,94	im Mittel
4308,34	23210,01	3		1,92 cm^{-1}
4122,01	24260,01	4	1,88	
4121,69	24261,89	4		
3888,34	25717,92	1	1,91	
3888,05	25719,83	1		

Die Abweichungen von diesem Mittel liegen vollkommen innerhalb der Beobachtungsfehler. Daß bei den Linien mit höheren Schwingungszahlen solche Paare nicht beobachtet wurden, erklärt sich wohl daraus, daß bei der gleichmäßigen Dispersion des Gitters die Linien im Ultraviolett nicht mehr getrennt werden konnten. Ob es sich allerdings um ein Dublett oder um zwei vollkommen verschiedenartige Terme handelt, soll dahingestellt bleiben. Tabelle 4 gibt die Zusammengehörigkeit der Linien an. Die Linien der Spalten 2, 5, 8 und 11 gehen bzw. von Term I, II, III und IV aus. Die Termabstände sind unten angegeben. Merkwürdig ist auch hier wie beim Blei, daß Linien vorhanden sind, die sich gleichzeitig an verschiedenen Stellen einordnen lassen. So ergibt die Schwingungszahl der Linie 2780,57 Å mit der von 3888,05 Å die Differenz 21667 cm^{-1}, aber auch mit der der Linie 2164,16 Å. Die Schwingungsdifferenz von 2582,17 Å mit 3511,00 Å ergibt 21667 cm^{-1}, mit 3076,73 Å aber 4019 cm^{-1}, während die Schwingungsdifferenz von 3511,00 Å mit 3076,73 Å 4019 cm^{-1} beträgt. Term I kombiniert mit Term IV durch die beiden Linien 4615,71 Å und 4615,27 Å. Somit sind mit den von Kayser und Runge angegebenen 27 Wismutbogenlinien noch weitere 17 Linien in Zusammmenhang gebracht.

Tabelle 4.

Term I			Term II			Term III			Term IV		
J	λ in Å	ν in cm^{-1}	J	λ in Å	ν in cm^{-1}	J	λ in Å	ν in cm^{-1}	J	λ in Å	ν in cm^{-1}
—	—	—	5	2133,32	46 866,51	2	2333,87	42 847,29	4	2730,61	36 621,85
—	—	—	3	2164,16	46 207,30	—	—	—	5	2780,57	35 963,85
—	—	—	3	2214,21	45 162,83	2	2430,51	41 143,63	3	2863,86	34 917,91
—	—	—	2	2354,57	42 470,60	1	2600,73	38 450,74	—	—	—
—	—	—	4	2515,72	39 750,05	3	2798,75	35 730,24	—	—	—
—	—	—	5	2524,58	39 610,55	5	2809,74	34 590,41	2	3405,39	29 365,21
—	—	—	5	2627,99	38 051,90	6	2938,75	34 060,01	3	3596,26	27 806,67
6	2061,77	48 502,02	4	2696,84	37 080,43	5	3024,75	33 060,58	—	—	—
6	2110,35	47 385,50	5	2780,57	35 963,85	—	—	—	1	3888,05	25 719,83
									1	3888,34	25 717,92
—	—	—	6	2898,08	34 505,60	—	—	—	4	4121,69	24 261,89
									4	4122,01	24 260,01
5	2228,31	44 877,06	5	2989,15	33 454,33	3	3397,81	29 435,05	3	4308,34	23 210,80
									3	4308,70	23 208,86
6	2230,70	44 828,98	5	2993,46	33 406,16	—	—	—	—	—	—
5	2276,64	43 924,38	2	3076,73	32 502,03	3	3511,00	28 481,91	2	4492,79	22 257,88
									2	4493,16	22 256,05
6	3067,81	32 596,54	6	4722,72	21 174,24	—	—	—	—	—	—
			2	2582,17	38 727,12	—	—	—	3	3511,00	28 481,91
			—	—	—	2	2582,17	38 727,12	2	3076,73	32 502,03
			11 422 cm^{-1}			4019 cm^{-1}			6225 cm^{-1}		

Die Tatsache, daß Term I mit IV kombiniert und daß die beiden Kombinationslinien 4615,71 Å und 4615,27 Å in Emission sehr schwach, in Absorption überhaupt nicht beobachtet sind, macht allerdings die Annahme, Term I sei der Grundterm des Wismutatoms, unwahrscheinlich. Es wäre wohl möglich, daß es noch einen tieferen Term in solcher Entfernung von Term I gäbe, daß letzterer durch thermische Anregung gut erreicht werden könnte. Unter den von Kayser und Runge gemessenen Linien befinden sich noch einige Linien stärkster Intensität zwischen 2200 Å und 2100 Å, die bis jetzt in keinen Zusammenhang mit den Linien der Tabelle 4 gebracht werden konnten. Es wäre wohl möglich, daß sie von einem solchen tieferen Term ausgingen. Da die Messungen im äußersten Ultraviolett des Wismutbogens noch sehr lückenhaft sind, so bedeutet das Fehlen der entsprechenden Kombinationen noch keine Widerlegung dieser Vermutung. Absorptionsaufnahmen in diesem Spektralgebiet, die zur Klärung dieser Frage dienen sollten, scheiterten an den oben genannten Schwierigkeiten.

Kürzlich haben Ruark, Foote, Mohler und Chenault[1]) eine kurze Notiz veröffentlicht über Absorptionsaufnahmen von Wismutdampf, die über die bis jetzt bekannten Resultate hinausgehen. Es ist ihnen gelungen, außer der Linie 3067,81 Å die Linien 2276,64, 2230,70, 2228,31 und 1954 Å in Absorption zu beobachten. Die Linie 1954 Å läßt sich in Tabelle 4 einordnen, wenn man sie in Spalte 2 in gleicher Höhe mit 2515,72 Å stellt. Alle genannten Absorptionslinien gehen also von Term I aus. Verwunderlich ist nur die Tatsache, daß nicht auch die Linien 2061,72 Å und 2110,35 Å in Absorption beobachtet wurden. Die Autoren geben an, daß auch bei ihnen auftretende Banden die Messungen sehr erschwerten, und daß sie deshalb bei sehr niedrigen Dampfdrucken arbeiten mußten, um die genannten Linien zu beobachten. Vielleicht ist hierdurch das Fehlen der beiden Linien zu erklären. Da bei diesen Messungen nur Linien gefunden wurden, die in das Schema der Tabelle 4 hineinpassen, so sprechen auch sie dafür, daß Term I der Grundterm des Wismutatoms ist.

Was nun die sensibilisierte Fluoreszenz betrifft, so läßt sich folgendes sagen: Von den Linien, die von Term I ausgehen, kann durch die Einstrahlung von 2536,7 Å nur die Linie 3067,81 Å angeregt werden, da die Anregungsenergien der anderen 4,9 Volt weit übertreffen. Das relativ starke Auftreten von 3067,81 Å erklärt sich aus der großen Intensität, mit der die Linie in Emission erscheint

[1]) Ruark, Foote, Mohler und Chenault, Nature **112**, 831, 1923.

und aus ihrer Dopplerverbreiterung, die etwa der doppelten Dopplerverbreiterung des thermischen Dopplereffektes bei 950° C entspricht. Der Energieabstand von Term I nach Term II beträgt gut 1,4 Volt, Term II wird also thermisch noch so genügend erreicht, daß Linien mit starker Dopplerverbreiterung, die von ihm aus angeregt werden, in sensibilisierter Fluoreszenz zu beobachten sein müssen. Aus der Zahl der von ihm in Absorption ausgehenden Linien kommen ihrer Anregungsarbeit entsprechend nur in Betracht:

Tabelle 5.

λ in Å	Intensität in Emission	λ in Å	Intensität in Emission
2627,99	5	2989,15	5
2780,57	5	2993,46	5
2898,08	6	4722,72	6

Tatsächlich wurde von ihnen allen nur die Linie 4722,72 Å beobachtet. Die Dopplerverbreiterung, die ihr bei ihrer Emission erteilt wird, entspricht einer Bewegungsenergie von 1,3 Volt. Da alle übrigen genannten Linien eine weit kleinere Dopplerverbreiterung aufweisen, so ist bei dem schon schwachen Auftreten von 4722,72 Å mit dem Auftreten der anderen Linien nicht zu rechnen. Term III, dessen Abstand von Term I 1,9 Volt beträgt, kommt für thermische Anregung unter den gegebenen Versuchsbedingungen nicht mehr in Betracht.

Aus den genannten Termen ergeben sich durch entsprechende Kombinationen der Linien der Tabelle 4 weitere 14 Terme. Nach dem Rydbergschen Wechselsatz hätte man im Wismutbogenspektrum gerade Multipletts zu erwarten. Die Klassifikation und Zusammengehörigkeit aller erkannten Terme läßt sich aus den gefundenen Beziehungen bis jetzt nicht festlegen. Versuche, die in dieser Richtung gemacht wurden, haben noch zu keinem greifbaren Ergebnis geführt. Sie sollen fortgesetzt werden. Ruark, Foote, Mohler und Chenault[1]) haben angegeben, daß sie weite Dubletts im Wismutbogenspektrum gefunden haben. Wieweit ihre Resultate mit denen dieser Arbeit übereinstimmen, wird sich erst aus der ausführlichen Publikation ihrer Ergebnisse ersehen lassen.

Zusammenfassung:

Es wurden Blei- und Wismutdampf in sensibilisierter Fluoreszenz untersucht. Dabei erschienen die Linien: $\lambda = 4057{,}93$ Å; 3683,60 Å;

[1]) Ruark, Foote, Mohler und Chenault, l. c.

3639,71 Å; 2873,40 Å und 2833,17 Å des Bleibogenspektrums und 4722,72 Å und 3067,81 Å des Wismutbogenspektrums. Die beobachteten Bleilinien stehen im Einklang mit dem Thorsen-Grotrianschen Serienschema. Aus den Beobachtungen über Wismut konnten einige weitere Gesetzmäßigkeiten im Wismutbogenspektrum erkannt werden.

Ein Teil der in dieser Arbeit benutzten Apparate ist aus Mitteln angeschafft worden, die Herrn Prof. Franck von der Hoshistiftung zur Verfügung gestellt waren; hierfür erlauben wir uns unseren besten Dank auszusprechen.

Zum Schluß möchte ich nicht versäumen, Herrn Prof. Franck für sein freundliches Interesse meinen herzlichen Dank zu sagen.

Göttingen, II. Phys. Institut der Universität, Januar 1924.

Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes.

Von **A. Friedmann** in Petersburg.

(Eingegangen am 7. Januar 1924.)

§ 1. 1. In unserer Notiz „Über die Krümmung des Raumes“ [1]) haben wir diejenigen Lösungen der Einsteinschen Weltgleichungen betrachtet, welche zu Welttypen führen, denen eine konstante positive Krümmung als gemeinsames Merkmal angehört; dabei haben wir alle möglichen Fälle erörtert. Die Möglichkeit, aus den Weltgleichungen eine Welt konstanter positiver räumlicher Krümmung abzuleiten, steht aber mit der Frage nach der Endlichkeit des Raumes im Zusammenhange. Aus diesem Grunde dürfte es von Interesse sein zu untersuchen, ob man aus denselben Weltgleichungen eine Welt konstanter negativer Krümmung erhalten kann, von deren Endlichkeit (auch unter einigen ergänzenden Annahmen) wohl kaum die Rede sein kann.

In der vorliegenden Notiz wird gezeigt, daß es wirklich möglich ist, aus den Einsteinschen Weltgleichungen eine Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes abzuleiten. Wie in der zitierten Arbeit, so haben wir auch hier zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich 1. den Fall einer stationären Welt, deren Krümmung zeitlich konstant ist, und 2. den Fall einer nichtstationären Welt, deren Krümmung zwar räumlich konstant ist, wohl aber im Laufe der Zeit variiert. Zwischen den stationären Welten konstanter negativer und denjenigen konstanter positiver räumlicher Krümmung besteht ein wesentlicher Unterschied. Die Welten stationärer negativer Krümmung lassen nämlich keine positive Dichte der Materie zu; dieselbe ist entweder Null oder negativ. Die physikalisch möglichen stationären Welten (d. h. diejenigen mit nicht negativer Dichte der Materie) finden demzufolge ihr Analogon in der de Sitterschen, nicht aber in der Einsteinschen Welt [2]).

Zum Schluß dieser Notiz werden wir die Frage berühren, ob man überhaupt auf Grund der Krümmung des Raumes über dessen Endlichkeit oder Unendlichkeit urteilen darf.

2. Wir wenden uns zu unseren allgemeinen Annahmen, die wir in dieselben zwei Klassen wie in der zitierten Notiz gruppiert denken;

---

[1]) ZS. f. Phys. **10**, 377, 1922, Heft 6.

[2]) Auf die Notwendigkeit einer besonderen Untersuchung über die Möglichkeit einer Welt mit negativem Krümmungsmaße des Raumes hat mich mein Freund Prof. Dr. Tamarkine aufmerksam gemacht.

dabei behalten wir unsere früheren Bezeichnungen. Die Annahmen der ersten Klasse bestehen darin, daß wir als Einsteinsche Weltgleichungen die Gleichungen (A), (B), (C) der erwähnten Arbeit zugrunde legen. Die Annahmen der zweiten Klasse werden jetzt von den früheren verschieden sein. Nehmen wir an, daß eine von den Weltkoordinaten, x_4, als Zeitkoordinate bezeichnet werden darf, so können wir (für den betrachteten Fall der Welt mit negativer konstanter Krümmung des Raumes) die Annahmen der zweiten Klasse dadurch zum Ausdruck bringen, daß wir fordern, es solle das Intervall ds von der Form:

$$ds^2 = \frac{R^2(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{x_3^2} + M^2 dx_4^2 \qquad (D')$$

sein, wo R eine Funktion der Zeit und M eine Funktion aller vier Weltkoordinaten bedeutet. Die konstante negative Krümmung des Raumes unserer Welt ist dabei proportional $-\frac{1}{R^2}$ [1]).

Beachten wir, daß für unsere Welt ds^2 eine indefinite Form ist, so können wir, unter Änderung der Bezeichnungen, die Formel (D') folgendermaßen umschreiben:

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}\frac{(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}{x_3^2} + M^2 dx_4^2. \qquad (D'')$$

Selbstverständlich bleibt die räumliche Krümmung unserer Welt negativ und proportional $-\frac{1}{R^2}$.

Das Problem, das uns vorliegt, besteht in der Auffindung zweier Funktionen R und M, welche den Einsteinschen Weltgleichungen, d. h. den Gleichungen (A), (B) und (C) der erwähnten Notiz genügen sollen.

Setzen wir in (A) $i = 1, 2, 3$, $k = 4$, so erhalten wir die folgenden drei Gleichungen:

$$R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_1} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_2} = R'(x_4)\frac{\partial M}{\partial x_3} = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen, daß die betrachteten Welten zu einem der beiden Typen gehören können:

1. Typus. Stationäre Welten, $R' = 0$, R ist zeitlich konstant.

2. Typus. Nichtstationäre Welten, $R' \neq 0$, M hängt nur von der Zeit ab.

---

[1]) Bezüglich des Linienelements ds^2 siehe z. B. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale 1, 345.

Wir betrachten zunächst den Fall der stationären Welt; der Fall der nichtstationären Welt bietet eine große Ähnlichkeit mit dem der nichtstationären Welt konstanter positiver räumlicher Krümmung; aus diesem Grunde werden wir diesen zweiten Fall nur ganz kurz behandeln.

§ 2. 1. Die Gleichungen (A) liefern für die Indizes $i, k = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{1}{x_3}\frac{\partial M}{\partial x_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 M}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{1}{x_3}\frac{\partial M}{\partial x_1} = 0.$$

Die Integration dieser Gleichungen ergibt:

$$M = \frac{P(x_1, x_4) + Q(x_2, x_4)}{x_3} + L(x_3, x_4), \tag{1}$$

wo P, Q und L zunächst willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind.

Zur Bestimmung von P, Q und L dienen uns die Gleichungen (A), wo man $i, k = 1, 2, 3$ zu setzen hat.

Die Rechnung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2}\right) &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}, \\ -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_3^2}\right) &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}, \\ -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2}\right) + \frac{2}{x_3}\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial x_3} &= \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Subtrahiert man die erste Gleichung dieses Systems von der zweiten, so kommt:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 Q}{\partial x_2^2}.$$

Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} P &= n(x_4)\, x_1^2 + a_1(x_4) + b_1(x_4), \\ Q &= n(x_4)\, x_2^2 + a_2(x_4) + b_2(x_4). \end{aligned}\right| \tag{3}$$

Beachtet man (1) und (3), so läßt sich die letzte der Gleichungen (2) in der Form:

$$-\frac{3 - \lambda R^2}{x_3^3}(P + Q) = \frac{4n}{x_3} + \frac{1 - \lambda R^2}{x_3^2} - \frac{2}{x_3}\frac{\partial L}{\partial x_3} \tag{4}$$

schreiben. Falls also $P + Q$ eine der Größen x_1 oder x_2 wirklich enthält, d. h. falls einer der Koeffizienten n, a_1, a_2 von Null verschieden ist, muß der Faktor von $P + Q$ in der Gleichung (4) ver-

schwinden; die rechte Seite dieser Gleichung hängt nämlich weder von x_1 noch von x_2 ab. Der Fall, daß alle drei Größen n, a_1, a_2 verschwinden, muß gesondert betrachtet werden.

Im Falle, daß die Größen n, a_1, a_2 nicht alle drei verschwinden, muß also zwischen λ und der Krümmung des Raumes die Relation:

$$\lambda R^2 = 3 \tag{5}$$

bestehen.

Beachtet man Gl. (5), so reduzieren sich die Gleichungen (2) auf eine einzige Gleichung, welche die Funktion L bestimmt, nämlich:

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} + \frac{L}{x_3} = 2n. \tag{6}$$

2. Im folgenden müssen wir zwei Fälle unterscheiden: 1. $n \neq 0$, 2. $n = 0$. Im ersten Falle zeigen uns die Formeln (D'), (1) und (3), daß die Größe n ohne Einschränkung der Allgemeinheit gleich 1 angenommen werden darf; man kann nämlich durch eine passende Substitution $x_4 = \varphi(x_4)$ immer erreichen, daß $n = 1$ wird. Beachten wir dies, so ergibt Gl. (6):

$$L = \frac{L_0(x_4)}{x_3} + x_3. \tag{7}$$

Um ϱ zu bestimmen, setzen wir in den Gleichungen (A) $i = k = 4$; eine einfache Rechnung zeigt, daß in unserem Falle ϱ gleich Null wird. Der erste Fall wird also durch die verschwindende Dichte der Materie und durch das Intervall:

$$ds^2 = \frac{R^2}{x_3^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + a_1(x_4)x_1 + a_2(x_4)x_2 + a_3(x_4) + x_3^2}{x_3}\right)^2 dx_4^2 \tag{D'_1}$$

charakterisiert.

Gehen wir zum zweiten Falle ($n = 0$) über, so finden wir für L die Gleichung:

$$L = \frac{L_0(x_4)}{x_3}. \tag{8}$$

Auch in diesem Falle ergibt die Rechnung für ϱ den Wert Null. Somit charakterisiert sich der zweite Fall ebenfalls durch die verschwindende Dichte der Materie und durch das Intervall:

$$ds^2 = \frac{R}{x_3^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \left|\frac{a_1(x_4)x_1 + a_2(x_4)x_2 + a_3(x_4)}{x_3}\right|^2 dx_4^2. \tag{D'_2}$$

Wir betrachten endlich den Fall, daß alle drei Koeffizienten n, a_1, a_2 verschwinden, so daß M von x_1 und x_2 nicht abhängt.

Bei der Integration der Gl. (2) stoßen wir wiederum auf zwei Fälle:

$$1.\ \lambda R^2 = 3, \qquad M = \frac{M_0(x_4)}{x_3},$$

$$2.\ \lambda R^2 = 1, \qquad M = M(x_4),$$

wo M_0 und M willkürliche Funktionen ihrer Argumente sind.

Der erste Fall erweist sich als ein Spezialfall des durch die Formel (D'_3) bestimmten Intervalls; eine leichte Rechnung zeigt, daß die Dichte ϱ der Materie hier verschwindet.

Der zweite Fall[1]) führt, wie man sich leicht überzeugt, zu einer von Null verschiedenen Dichte der Materie. Um zu entscheiden, ob hier die Dichte positiv oder negativ ausfällt, müssen wir diejenige Form des Intervalls heranziehen, welche einer indefiniten quadratischen Form entspricht und durch die Formel (D'') ausgedrückt wird. Rechnet man mit den Gravitationspotentialen der Formel (D''), so findet man, daß im betrachteten Falle M eine Funktion von x_4 allein ist; folglich können wir, ohne der Allgemeinheit zu schaden, $M = 1$ setzen [dazu braucht man nur statt x_4 die Koordinate $\bar{x}_4 = \varphi(x_4)$ einzuführen]. Berechnet man unter dieser Voraussetzung die Dichte ϱ, so findet man:

$$\lambda = -\frac{c^2}{R^2}, \qquad \varrho = -\frac{2}{\varkappa R^2},$$

$$d\tau^2 = -\frac{R^2}{c^2}\,\frac{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2}{x_3^2} + dx_4^2. \qquad (D''_3)$$

Dieser Fall ergibt also für ϱ einen negativen Wert.

Zusammenfassend können wir sagen, daß die stationäre Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes nur bei verschwindender oder negativer Dichte der Materie möglich ist; das dieser Welt entsprechende Intervall wird durch die oben angeführten Formeln (D'_1), (D'_2) und (D''_3) ausgedrückt.

3. Wir wenden uns nun zum Fall der nichtstationären Welt. Wir bemerken zunächst, daß hier M eine Funktion von x_4 allein ist; die von uns mehrmals gebrauchten Erwägungen zeigen, daß man M der Einheit gleich annehmen darf. Unter den genannten Voraussetzungen finden wir ohne Mühe, daß die Gleichungen (A) für $i = 1, 2, 3$; $k = 4$; und für $i, k = 1, 2, 3$ von selbst erfüllt sind. Setzen wir hierin $i = k = 1, 2, 3$, so erhalten wir die zur Bestimmung der Funktion $R(x_4)$ dienende Differentialgleichung zweiter Ordnung, nämlich:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} + \frac{1}{R^2} - \lambda = 0. \qquad (9)$$

[1]) Auf die Möglichkeit dieses Falles hat mich Dr. W. Fock aufmerksam gemacht.

Diese Gleichung ist völlig analog unserer früheren Gleichung [Gl. (4) der zitierten Notiz]; die letztere geht genau in Gl. (9) über, wenn man dort $c = 1$ setzt. Wir können also die ganze Diskussion der Gl. (4), l. c., auf die soeben hingeschriebene Gleichung übertragen. Demgemäß wollen wir darauf nicht eingehen, sondern berechnen nur die Dichte der Materie ϱ für die nichtstationäre Welt.

Schreiben wir für den Fall der nichtstationären Welt das Intervall in der Form (D″), so erhalten wir für R die Differentialgleichung:

$$\frac{R'^2}{R^2} + \frac{2RR''}{R^2} - \frac{c^2}{R^2} - \lambda = 0.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert uns die Beziehung:

$$\frac{R'^2}{c^2} = \frac{A + R + \frac{\lambda}{3c^2} R^3}{R},$$

wo A eine willkürliche Konstante ist. Berechnet man die Dichte ϱ, so ergibt sich:

$$\varrho = \frac{3A}{\varkappa R^3}. \tag{10}$$

Die Formel (10) zeigt, daß für ein positives A die Dichte der Materie ebenfalls positiv ist.

Daraus folgt die Möglichkeit der nichtstationären Welten mit konstanter negativer Krümmung des Raumes und mit positiver Dichte der Materie.

§ 3. 1. Wir wenden uns zur Diskussion der physikalischen Bedeutung des in den vorhergehenden Paragraphen erhaltenen Resultats. Wir haben uns überzeugt, daß die Einsteinschen Weltgleichungen Lösungen besitzen, die einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes entsprechen. Diese Tatsache weist darauf hin, daß die Weltgleichungen allein genommen noch nicht hinreichen, um die Frage nach der Endlichkeit unserer Welt zu entscheiden. Die Kenntnis der Krümmung des Raumes gibt uns noch keinen unmittelbaren Hinweis auf dessen Endlichkeit oder Unendlichkeit. Um zu einem bestimmten Schluß über die Endlichkeit des Raumes zu gelangen, bedarf man einiger ergänzender Verabredungen. In der Tat bezeichnen wir einen Raum als endlich, wenn der Abstand zweier beliebiger nicht zusammenfallender Punkte dieses Raumes eine gewisse konstante Zahl nicht überschreitet, was für Punktepaare wir auch nehmen mögen. Folglich müssen wir, bevor wir das Problem der Endlichkeit des Raumes angreifen, uns noch verabreden, welche Punkte dieses Raumes wir als verschieden ansehen. Fassen wir z. B. eine Kugel als eine Fläche des dreidimensionalen euklidischen Raumes

auf, so zählen wir die Punkte, die auf demselben Breitenkreise liegen und deren Längen gerade um 360° verschieden ist, als zusammenfallend; hätten wir dagegen diese Punkte als verschieden betrachtet, so würden wir eine mehrblätterige sphärische Fläche im euklidischen Raume erhalten. Der Abstand beliebiger zweier Punkte auf einer Kugel übertrifft nicht eine endliche Zahl; wenn wir jedoch diese Kugel als eine unendlich-vielblätterige Fläche auffassen, können wir (indem wir auf gehörige Weise die Punkte verschiedenen Blättern zuordnen) diesen Abstand beliebig groß machen. Daraus erhellt, daß man, ehe man in die Betrachtungen über die Endlichkeit des Raumes eingeht, präzisieren muß, welche Punkte als zusammenfallend und welche als verschieden angesehen werden.

2. Als Kriterium für die Verschiedenheit der Punkte könnte unter anderem das Prinzip der „Phantomenangst" dienen. Wir meinen darunter das Axiom, man könne zwischen je zwei verschiedenen Punkten nur eine gerade (geodätische) Linie führen. Nimmt man dies Prinzip an, so darf man zwei Punkte, welche durch mehr als eine gerade Linie verbunden werden können, nicht für verschieden halten. Diesem Prinzip zufolge sind z. B. die zwei Endpunkte desselben Durchmessers einer Sphäre nicht voneinander verschieden. Selbstverständlich schließt dieses Prinzip die Möglichkeit der Phantome aus, denn das Phantom erscheint im selben Punkte wie das ihn erzeugende Bild selbst.

Die soeben besprochene Formulierung des Begriffs von den zusammenfallenden und nicht zusammenfallenden Punkten kann wohl zur Vorstellung führen, daß die Räume mit positiver konstanter Krümmung endlich sind. Jedoch ermöglicht uns das erwähnte Kriterium nicht, auf die Endlichkeit der Räume negativer konstanter Krümmung zu schließen. Dies ist der Grund dafür, daß, unserer Meinung nach, Einsteins Weltgleichungen ohne ergänzende Annahmen noch nicht hinreichen, um einen Schluß über die Endlichkeit unserer Welt zu ziehen.

St. Petersburg, November 1923.

Berichtigung

zu der Arbeit: G. P. Woronkoff und G. J. Pokrowski, Über die selektive Reflexion des Lichtes an diffus reflektierenden Körpern[1]).

S. 364, Fig. 10. Neben die Kurve II ist zu setzen ε; die punktierte Gerade bezieht sich auf Alexandritpapier.

S. 369, Fig. 11. Die Kurven beziehen sich auf Rhodamin *B* (auf Alexandritpapier), links für $\lambda = 550\ \mathrm{m}\mu$, rechts für $\lambda = 650\ \mathrm{m}\mu$.

[1]) ZS. f. Phys. **20**, 358—370, 1923.

Addiert sich die Geschwindigkeit des Lichtes zu derjenigen der Lichtquelle? Dafür sprechende Beweise aus den Phänomenen der „veränderlichen Sterne".

Von **M. La Rosa** in Palermo.

Mit drei Abbildungen. (Eingegangen am 20. Oktober 1923).

Es ist bekannt, daß die Relativitätstheorie ein wesentliches Postulat zum Angelpunkt hat, das „die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit", d. h. ihre Unabhängigkeit von den Bewegungsverhältnissen der Lichtquelle und des Beobachters behauptet.

Zwei Jahre nach Erscheinen der ersten Abhandlung Einsteins hatte Ritz[1]) gezeigt, daß man denselben von Einstein verfolgten Zweck [Ausdehnung des Relativitätsprinzips von der Mechanik auf alle physikalischen Erscheinungen[2])] erreichen konnte, indem man auf dem festen Boden der klassischen Mechanik verblieb und nur annahm, daß sich die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes von einer bewegten Quelle mit der Geschwindigkeit der Lichtquelle, nach der Regel Galileis (ballistische Hypothese) addiert.

Comstock[3]) und Castelnuovo[4]) dachten an die Möglichkeit, einen entscheidenden Beweis für eine der zwei entgegengesetzten Hypothesen durch geeignete Beobachtungen an den „Doppelsternen" zu erhalten.

Während aber Comstock selbst zu versuchen begann, seine (unrichtige) Voraussage durch nicht leichte Beobachtungen zu prüfen, gelang es De Sitter[5]) durch wenige Betrachtungen überzeugend darzutun, daß die Beobachtungen an den „Doppel"sternen[6]) und des

---

[1]) Ritz, Ann. chim. phys. **13**, 145, 1908.

[2]) Eine kritische Darstellung des physikalischen Ursprungs der „Relativität" wird man in einem Aufsatz von mir finden, der demnächst in „Scientia" erscheinen wird. (Oktober 1923).

[3]) Phys. Rev. **30**, 267, 1910.

[4]) Scientia **9**, 71, 1911.

[5]) Phys. ZS. **14**, 429, 1913.

[6]) Die erste Entdeckung von Sternenpaaren, die durch analoge Beziehungen wie Sonne und Erde untereinander verbunden sind, nämlich durch gegenseitige Anziehung und von einer Rotationsbewegung in bezug auf das gemeinsame Massenzentrum belebt, geschah durch Herschell, dem es gelang, die von dem einen der beiden Sterne um den anderen beschriebene elliptische Trajektorie zu beobachten und zu zeigen, daß diese elliptische Bewegung in Gemäßheit des zweiten Keplerschen Gesetzes über die Bewegung der Planeten folgt. Diese äußerst wichtige Entdeckung erlaubte die Ausdehnung des Newtonschen Gesetzes

Gesetzes ihrer Bewegung den klarsten und stärksten Beweis für die Unabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit von der Bewegung der Lichtquelle lieferten.

Wenn in der Tat, so sagt ungefähr De Sitter, die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes sich mit der Rotationsgeschwindigkeit des Sternes addiert, so würden die in der ersten Quadratur (Stellung A von Fig. 1) ausgesandten Lichtstrahlen, die sich angenommen mit der Geschwindigkeit $c - v$[1]) in bezug auf den (in M stehenden) Beobachter fortpflanzen, sich schließlich überlagern und mit den in der anderen Quadratur ausgesandten, die sich mit der Geschwindigkeit $c + v$ fortpflanzen, verschmelzen, so daß es unmöglich wäre, die verschiedenen Stellungen des Sternes zu unterscheiden und zeitlich zu trennen, und das Gesetz der Bahnbewegung zu erkennen.

Nur ist diese Ausführung De Sitters unvollständig und wirft Fälle, für die die Endfolgerung richtig ist, mit Fällen (ohne Zweifel die Mehrheit) zusammen, auf die die Folgerung selbst durchaus nicht paßt.

Eine vollständigere Analyse dessen, was der Beobachter M bei der ballistischen Hypothese sehen müßte, erlaubt uns leicht, den Irrtum in den Folgerungen De Sitters zu erkennen, insofern, als sie uns zeigt, daß Beobachtungen wie diejenigen Herschells über das Bewegungsgesetz von Doppelsternen in weitem Maße und sicher vor jedem Übelstand, der auf Lichtüberlagerung beruht, möglich sind; doch das nicht allein, diese Analyse führt uns auch zu einer deutlichen und einfachen Erklärung — was von höchster Wichtigkeit ist — einer ausgedehnten Gruppe der interessantesten und dunkelsten astronomischen Erscheinungen, indem sie uns lehrt, daß die ballistische Hypothese sich bei der Erklärung der astronomischen Erscheinungen ungleich fruchtbarer an Resultaten erweist und den natürlichen Erscheinungen näher kommt als die Einsteinsche.

Nehmen wir also an, daß sich die Geschwindigkeit des Lichtes zu der es aussendenden in Bewegung befindlichen Lichtquelle addiert.

Stellen wir uns einen Stern S vor, der sich um ein Zentrum nach einer der Einfachheit halber als kreisförmig angenommenen

---

außerhalb unseres Sonnensystems mit dem bekannten Ertrag jener Kenntnisse, die wir über die Sternmassen besitzen.

[1]) Es wird hier stillschweigend angenommen, daß die Bahnebene etwas gegen den Visionsradius geneigt und v die Projektion der tangentialen Geschwindigkeit auf die durch die Visionslinie selbst und die in der Bahnebene liegende Normale zu ihr bestimmte Ebene ist.

Bahn $ADBC$ in der Pfeilrichtung mit der Geschwindigkeit v dreht, und einen Beobachter M, der in der Ebene des Kreises längs der Richtung DC in einem Abstand d von dem Kreiszentrum O steht (d äußerst groß in bezug auf den Kreishalbmesser r). Wenn wir mit t die Abgangszeit der Lichtstrahlen von dem Stern bezeichnen und mit T die Ankunftszeit beim Beobachter und wir als gemeinsamen Ausgangspunkt den Augenblick eines Durchganges des Sternes durch die Stellung A wählen, so finden wir leicht, daß der Beobachter die von einer beliebigen Stellung S ausgesandten Strahlen im Augenblick T empfangen wird, der gegeben wird durch

$$T = t + \frac{d}{c - v\cos\omega t} = t + \frac{a}{1 - b\cos\omega t}, \qquad (1)$$

wo $\omega = \frac{2\pi}{\tau_0}$ die Winkelgeschwindigkeit des Sternes, τ_0 die Zeit eines Umlaufes, $a = d/c$, $b = v/c$ ist.

Die periodische Größe, die in T enthalten ist, gewinnt von Fall zu Fall eine sehr verschiedene Bedeutung, je nach den relativen Werten der drei Größen a, b, τ_0, die im Konkreten sehr weite Grenzen der Veränderlichkeit aufweisen.

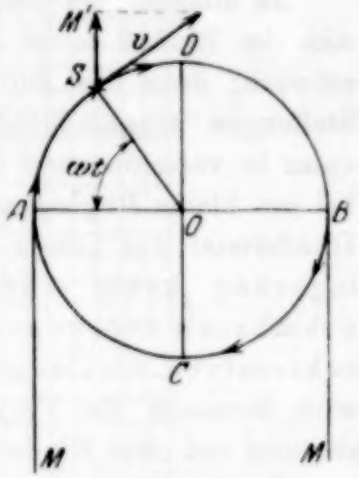


Fig. 1.

Man kennt in der Tat Beispiele von Doppelsternen, bei denen die Umlaufszeit τ_0 gut 400 Jahre beträgt (l Carinae, γ Leonis), und man kennt viele, bei denen dieselbe Zeit nur einen Tag und sogar weniger beträgt.

Infolgedessen müssen sich auch die Tangentialgeschwindigkeiten v (und damit die Werte von b) als sehr verschieden erweisen. Man kennt Zahlen für sie, die von einem Minimum von 6 bis 8 km/sec (dem Minimum, das durch die spektroskopische Beobachtung erreicht werden kann) bis zu einem nicht genau bestimmten Maximum gehen, das 300 km/sec erreichen zu können scheint (β Aurigae 240 km/sec).

Weite Grenzen der Veränderlichkeit zeigen sich uns auch in den Werten von a, da sich neben Doppelsternen wie α Centauri — der, wie man weiß, den kleinsten Abstand von uns hat $\left(\frac{d}{c} = \sim 4{,}5 \text{ Jahre}\right)$ und Sirius $\left(\frac{d}{c} = 9 \text{ Jahre}\right)$, τ Vulpis und δ' Lyrae finden, die fast an der Grenze der Sichtbarkeit mit bloßem Auge stehen (5,5 Größe),

bei denen das Verhältnis d/c nahe an 130 Jahre herankommt, um bei den Sternen, die bisher sicher als Doppelsterne bekannt sind, stehenzubleiben.

Wenn wir also eine klare Kenntnis von der Bedeutung erlangen wollen, die die in T enthaltene periodische Größe in den verschiedenen Fällen gewinnen kann, so müssen wir uns auf einen konkreten Boden begeben, indem wir gewisse besondere Fälle erörtern, um uns die verschiedenen Typen von Phänomenen zu konstruieren, die uns bei so bunter Vielfältigkeit der Bedingungen entgegentreten können.

Indem wir somit $a = K\tau_0$ setzen, schreiben wir die Gleichung (1) folgendermaßen:

$$T = t + \tau_0(K + Kb\cos\omega t - Kb^2\cos^2\omega t + Kb^3\cos^3\omega t(-\cdots) \quad (1')$$

und bemerken, daß, da b in Wirklichkeit immer sehr klein ist (kaum 10^{-3} erreicht), wenn K nicht sehr groß ist, die Gleichung (1') für die konkreten Zwecke, die wir im Auge haben, auf die drei ersten Glieder allein beschränkt werden und man setzen kann:

$$T = t + K\tau_0 + Kb\tau_0\cos\omega t. \quad (2)$$

Ja allemal, wo das Produkt Kb z. B. kleiner als 10^{-2} ist, erweist sich der Einfluß selbst des dritten Gliedes, des periodischen, als sehr schwach; denn die gefürchtete Überlagerung von aus verschiedenen Stellungen ausgesandten Lichtstrahlen (d. h. die Gleichheit des T unter in verschiedenen Augenblicken t abgegangenen Strahlen) kann bei um kleine Bogengrade entfernten Stellungen (kleiner z. B. als ein Hundertstel der Länge der Trajektorie) stattfinden. Diese Überlagerung kann einem Beobachter keine praktisch wahrnehmbaren Störungen verursachen, der von Zeit zu Zeit die sukzessiven Stellungen des Gestirns aufzeichnet, und dieser wird demnach die Projektion der Bahn auf die Himmelskugel bestimmen und ohne Hindernisse erkennen können, ob das zweite Keplersche Gesetz auf die beobachtete Bewegung anwendbar ist oder nicht [1]).

---

[1]) Für den, der wissen möchte, ob die oben vorausgesetzten Verhältnisse auf diejenigen Sterne anwendbar sind oder nicht, für die die direkte Nachprüfung des Keplerschen Gesetzes erfolgt ist, werde ich einige Beispiele erwähnen. Der am besten bekannte Doppelstern, an dem die besten Beobachtungen über die Gültigkeit des Keplerschen Gesetzes gemacht worden sind, ist der uns am meisten benachbarte Stern α Centauri. Bei ihm haben wir: $a = 1640$ Tage; $\tau_0 = 81{,}19$ Tage; $v = 24$ km/sec, d. h. $b = 8 \cdot 10^{-5}$ und demnach $Kb = 1{,}6 \cdot 10^{-3}$. Ein anderer gut studierter Doppelstern, weil sehr nahe, ist Sirius, bei dem wir haben: $a = 9$ Jahre, $\tau_0 = 48{,}84$ Jahre, d. h. $K = 0{,}18$; $v = 8$ km/sec und demnach $b = 2{,}7 \cdot 10^{-5}$; daher $Kb = 5 \cdot 10^{-5}$. Bei α Aurigae $a = 4000$ Tage in runder Zahl; $\tau_0 = 104$, K in runder Zahl 40; $v = 30$ km/sec; $b = 10^{-4}$, $Kb = 4 \cdot 10^{-3}$ usw.

Die Wirkungen der Überlagerung werden beträchtlich in den Fällen, in denen das Produkt Kb der Eins nahekommt.

Auch zur Untersuchung dieser Fälle können wir uns praktisch der einfacheren Formel (2) bedienen, denn, da Kb nahezu gleich 1 ist, wird die Größe des dritten Gliedes von derselben Ordnung wie τ_0 sein (d. h., daß Überlagerung von Strahlen eintritt, die in mit der Periode vergleichbaren Zeitabständen und deshalb von untereinander

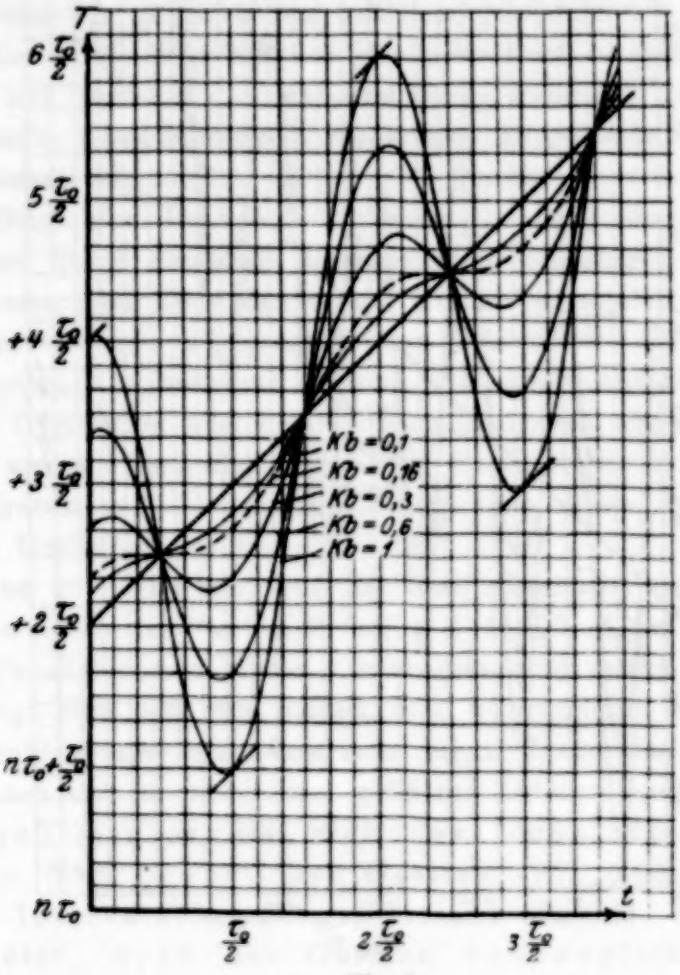


Fig. 2.

sehr weit entfernten Punkten der Trajektorie ausgesandt werden), während die des vierten Gliedes [1]) wegen der Kleinheit von b von

[1]) Beispielsweise können wir $v = 60$ km/sec annehmen, was dem Durchschnittswert der an den bisher bekannten Doppelsternen gemessenen v sehr nahe kommt; d. h. $b = 2 \cdot 10^{-4}$. Kommt das Produkt Kb der 1 nahe, so besagt dies, daß K von der Ordnung $0{,}5 \cdot 10^{-4}$ ist, und die Formel (1′) gibt bei Annahme von $K = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$:

$$T = t + \tau_0 \,(0{,}5 \cdot 10^4 + \cos \omega t - 2 \cdot 10^{-4} \cos^2 \omega t + \ldots),$$

einer viel kleineren Größenordnung sein wird (d. h., daß diese sekundäre Wirkung der Überlagerung auf Strahlen, die von ganz wenig entfernten Stellungen längs der Trajektorie ausgesandt werden, beschränkt und deshalb wenig beachtenswert ist).

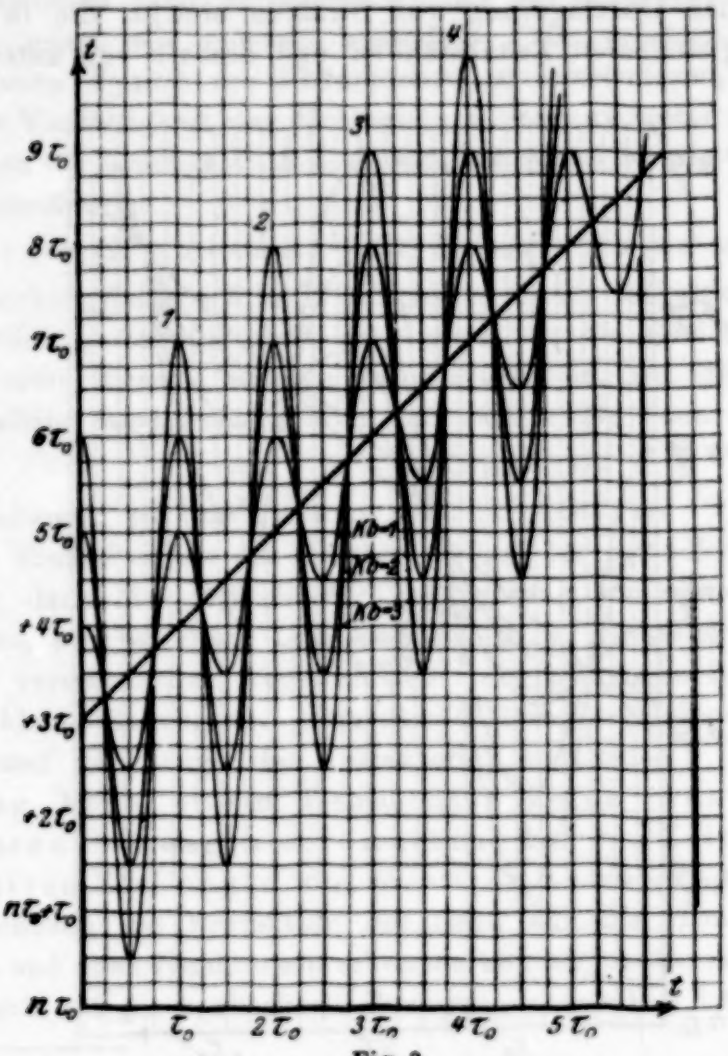


Fig. 3.

Um unsere Betrachtungen zu erleichtern, werden wir uns auf die Kurven von Fig. 2 und 3 beziehen, die graphische Darstellungen des Gesetzes (2) sind, konstruiert[1]) für gewisse interessantere konkrete

---

d. h. schon das vierte Glied würde Überlagerung von Strahlen mit sich bringen, die innerhalb eines Zeitabstandes $2 \cdot 10^{-4}\ \tau_0$ nämlich aus $^1/_{5000}$ der Länge der Trajektorie entfernten Stellungen ausgesandt werden.

[1]) Aus naheliegenden Gründen haben wir in den Figuren die Achse der t parallel zu sich selbst um eine zur Zeichnung passende Größe nach oben verlagert angenommen.

Fälle, und zwar für folgende Werte des Produktes Kb: 0,1; 0,16; 0,30; 0,60 und 1; 2; 3.

Betrachten wir nun den Gang einiger dieser Kurven aus der Nähe und beziehen wir uns z. B. auf die durch $Kb = 1$ definierte.

Indem wir die Dinge in dem Augenblick zu betrachten beginnen, wo der Beobachter das von dem Stern zur Zeit $t = 0$ abgegangene Licht empfängt, werden wir folgende wichtige Umstände ersehen:

a) Die Helligkeit des Sternes wird als einem Maximum zustrebend erscheinen (was wir gleich besser erklären werden);

b) in diesem Moment hat der Beobachter schon alles Licht empfangen, das der Stern in den während wenig mehr als dreiviertel des ersten Umlaufes eingenommenen Stellungen ausgesandt hatte.

Von diesem Augenblick an — oder genauer von dem Maximum an — empfängt der Beobachter gleichzeitig in jedem Augenblick das von dem Stern aus drei verschiedenen Stellungen ausgesandte Licht: die erste, dem Ende des ersten Umlaufes zugehörig und längs eines Bogens liegend, der jenseits von dreiviertel der Trajektorie (nach der ersten Konjunktion) beginnt; die andere enthalten zwischen der zweiten Opposition und der vierten Quadratur, also dem zweiten Viertel des zweiten Umlaufes angehörig; die dritte enthalten zwischen dieser Quadratur und der zweiten Konjunktion (dem dritten Viertel des zweiten Umlaufes angehörig).

1. Es ist zu bemerken, daß die drei Abschnitte der Kurve, die zwischen den durch die Punkte $T_0 = (2n + 4)\tau_0/2$, $T_1 = (2n + 5)\tau_0/2$ geführten Parallelen zur Achse t enthalten sind, stark gegen diese Achse geneigt sind, was uns besagt, daß, während die Abgangszeiten der Lichtstrahlen innerhalb eines sehr engen Intervalls variieren, die Ankunftszeiten sich in einem viel größeren Intervall ausbreiten.

Infolgedessen erweist sich das Licht, das der Beobachter von dem beweglichen Gestirn für jede Zeiteinheit in diesem Intervall empfängt, kleiner als das, das er empfangen hätte, wenn das Gestirn unbeweglich geblieben wäre.

Sobald T ungefähr den Wert T_1 erreicht, kommt zu dem Licht der unmittelbar daraus folgenden Stellungen das von dem Stern im Moment der sechsten Quadratur, in welchem T durch ein Maximum geht, ausgesandte Licht hinzu, so daß in dem sehr kurzen Intervall ΔT der Beobachter überdies das von dem beweglichen Gestirn in einer etwas größeren Zeit als ΔT ausgesandte Licht empfangen wird; d. h. die scheinbare Helligkeit des Gestirns muß rasch zu einem Maximum ansteigen, bei dem das angekommene Licht

mehrere Male stärker ist, als es bei stillstehendem gewesen wäre.

Von diesem Moment an muß die Helligkeit abnehmen, ohne zu jenen zuerst betrachteten sehr kleinen Werten zurückzukehren, weil der Beobachter Licht aus fünf verschiedenen Stellungen des Sternes empfangen wird, und weil diese Stellungen Bogen unserer Kurve entsprechen, in denen $\Delta T/\Delta t$ stets geringeren Wert als längs der vorausgehenden Abschnitte annimmt. Kurz nach dem Augenblick $T_2 = (2n + 5{,}5)\tau_0/2$, in dem die zweite Konjunktion stattfindet, wird die Helligkeit durch ein zweites Minimum von etwas größerem Wert als das erste hindurchgehen, um gleich wieder zu wachsen und ein zweites Maximum gleich nach der Zeit $T_3 = (2n + 6)\tau_0/2$ zu erreichen [1]).

Schließlich wird die Helligkeit rasch zu dem anfangs gesehenen geringsten Wert zurückkehren, um sogleich wieder denselben periodischen Zyklus zu beginnen.

Kurz zusammengefaßt: Wenn ein Stern um ein Zentrum rotiert und der von uns angenommenen Bedingung ($Kb = 1$) genügt, so müßte er Helligkeitswechsel aufweisen, die sich uns als eine periodische Veränderung seiner scheinbaren Größe zu erkennen geben würden, d. h. der Stern muß uns „veränderlich" (mit doppelter Periodizität) erscheinen [2]).

---

[1]) Um uns einen Begriff von dem mittleren Wert der scheinbaren Helligkeit zu machen, die der Stern in diesen verschiedenen Phasen zeigen wird, können wir an der Figur die mittleren Werte abschätzen, die ihnen entsprechend das Verhältnis $\Delta T/\Delta t$ annimmt.

In bezug auf ersteren finden wir, daß ungefähr in einer Zeitdauer $\Delta T = \tau_0/4$ der Beobachter das Licht empfängt, das der Stern längs der drei Bogen MN, PQ, RS aussendet, die in einer Zeit (Summe der Projektionen der drei Bogen auf die Achse t) von etwa $\tau_0/10$ durchlaufen werden. Im Durchschnitt wird also die scheinbare Helligkeit des Sternes in diesem Intervall um die Hälfte geringer sein als die, die er gezeigt hätte, wenn er unbeweglich wäre. In bezug auf das Maximum finden wir, daß in einer Zeitdauer $\Delta T = {}^2/_{80}\,\tau_0$ der Beobachter in einer mehr als viermal größeren Zeit ausgesandtes Licht empfängt, und somit wird das Gestirn einen viermal größeren Glanz zeigen, als es unbeweglich gezeigt hätte. Im ganzen genommen variiert die Helligkeit vom ersten Minimum zum ersten Maximum ungefähr von 1 auf 8; und daraus ergibt sich ein Sprung des Sternes um zwei Klassen in der Skale der scheinbaren Größen (weil man bekanntlich rechnet, daß das Verhältnis zwischen den Helligkeiten zweier aufeinander folgenden Klassen angehöriger Sterne etwa 2,5 ist). Beim zweiten Minimum erweist sich die scheinbare Helligkeit im Durchschnitt gleich derjenigen, die dem unbeweglichen Gestirn entsprechen würde, die wir aus der Figur $\Delta T = {}^{28}/_{80}\,\tau_0$ und $\Delta t = {}^{20}/_{80}\,\tau_0$ entnehmen.

[2]) Weiter unten werden wir sehen, wie diese Schlußfolgerung zu ergänzen ist, wenn angenommen wird, daß das feste Zentrum ein anderer Stern ist, der mit dem ersten ein um das gemeinsame Massenzentrum rotierendes System

Wesentlich analoge, obwohl in den Einzelheiten abweichende Resultate bekommen wir, wenn wir die anderen konstruierten Kurven analysieren.

Bei $Kb = {}^1/_2$ kann der Einfluß des periodischen Gliedes auf die Werte von T als am besten entwickelt bezeichnet werden.

Beginnt man die Analyse bei dem gewöhnlichen Maximum, das sofort auf den Moment folgt, in dem der Beobachter das von dem Stern im Augenblick $t = 0$ [d. h. $T_0 = K\tau_0 (1 + b)$] ausgesandte Licht empfängt, so wird die Kurve während eines ganzen Intervalls $\Delta T = \frac{\tau_0}{2}$ nur an einer Stelle von den Parallelen zur Achse t durchschnitten und zeigt in dieser Gegend ein sehr großes und nahezu konstantes Verhältnis $\Delta T / \Delta t$.

Kurz nach dem Augenblick $T_0 + \tau_0/2$ erreicht die Helligkeit rasch ein Maximum, da zu dem Licht aus den (auf die bereits betrachteten) folgenden Stellungen des ersten Umlaufs, bei denen das Verhältnis $\Delta T / \Delta t$ kleiner wird, plötzlich das in dem Moment der zweiten Quadratur des zweiten Umlaufs ausgesandte Licht hinzukommt, bei dem $\Delta T / \Delta t$ sehr klein ist; darauf nimmt die Helligkeit bis zu einem neuen Minimum, das etwas höher ist als das erste, ab und geht schließlich wieder durch ein neues dem ersten gleiches Maximum.

Im ganzen genommen wird der Beobachter den Stern während einer Hälfte der Periode als von geringster Intensität (größte Größenordnung) sehen, in der darauffolgenden Hälfte wird er ihn durch zwei aufeinanderfolgende, durch ein — äquidistantes — Minimum, das etwas höher liegt als das anfängliche, getrennte Maxima hindurchgehen sehen [1]).

Bei $Kb = 0{,}16$ bekommen wir eine höchst interessante Kurve, die aus langen, fast geradlinigen Abschnitten resultiert und abwechselnd sehr wenig und zu viel gegen die Achse t geneigt ist.

---

bildet. Vorläufig begnügen wir uns damit zu behaupten, daß, wenn bei einem der zwei Sterne unsere Bedingung zutrifft, der Anschein der Veränderlichkeit, obwohl in abgeschwächtem Maße, fortbestehen muß.

[1]) Will man — an der Figur selbst — eine Schätzung der relativen Intensität der Maxima und der beiden Minima vornehmen, so findet man, daß in der Nähe der Maxima die mittlere Helligkeit fünf- bis sechsmal größer werden muß als die Helligkeit x — wo x die entsprechende Intensität des unbeweglichen Sternes ist —; beim sekundären Minimum muß sie auf ungefähr 4 oder 5 x, beim Hauptminimum auf ${}^1/_6\, x$ herabgehen. Der Gesamtumfang des Lichtwechsels ist also größer als 25 : 1, was einen scheinbaren Größensprung von gut 3,5 Klassen bedeutet.

Unter diesen Bedingungen werden wir also starke Lichtschwankungen bekommen, bestehend aus sehr intensiven und kurz dauernden Maxima, auf die mit raschem Wechsel langdauernde Minima mit fast gleichmäßiger Helligkeit folgen [1]).

Solange $Kb > 1/2\pi$, zeigen sich uns noch die Überlagerungserscheinungen des von dem Sterne an etwas voneinander entfernten Stellen der Trajektorie ausgesandten Lichtes (eine Parallele zur Achse t kann dreimal die Kurve schneiden) und die vorhergesagte doppelte Periodizität mit zwei nahezu gleichen Maxima und zwei stark abweichenden Minima.

In dem Maße, wie das Produkt weiter abnimmt, wird die Änderungsamplitude von T immer kleiner, und die Kurve wird nur an einer Stelle von den Parallelen zur Achse t geschnitten; nichtsdestoweniger werden wir noch Schwankungen in der beobachteten Helligkeit bekommen, weil das Verhältnis $\Delta T/\Delta t$ stets merkliche Änderungen erfährt. Jedoch angesichts der Schwierigkeit und der geringen Genauigkeit der photometrischen Messungen überhaupt und derjenigen, die in der Astrophysik ausgeführt werden können und ausgeführt worden sind, begreift man, daß recht bald diese leichten Schwankungen unwahrnehmbar werden. Praktisch kann man vielleicht annehmen, daß das bei $Kb < {}^1/_{10}$ geschieht.

Ein immer geringeres Interesse zeigen die Kurven, die Werten von Kb entsprechen, die immer größer als Eins sind. Die Lichtüberlagerung erfolgt bei einer immer größeren Anzahl von Stellungen, die immer verschiedeneren Perioden und Phasen angehören, und alles, was unser Beobachter verzeichnen können wird, werden kleine Schwankungen der Helligkeit in den Augenblicken sein, in denen die Werte von T die Maxima und Minima der betreffenden Kurve berühren.

Man begreift somit leicht, daß recht bald, d. h. bei Werten von Kb, die nicht viel höher als 10 liegen, jede Schwankung in der Helligkeit unwahrnehmbar werden wird; der Stern wird unfähig werden, uns durch Veränderungen der scheinbaren Größe seine periodische Bewegung, d. h. seine Eigenschaft als „Satellit" eines „Doppel"-sternes oder eines komplexeren Systems zu offenbaren [2]).

---

[1]) Nach einer an der Figur vorgenommenen Schätzung geht das Intensitätsverhältnis zwischen den einen und den anderen wenigstens von einem Maximum von mehreren $100\,x$ zu einem Minimum von ${}^1/_2\,x$, so daß sich die Amplitude der totalen Helligkeitsschwankung gleichwertig mit einem Sprung von wenigstens sieben Größenklassen erweist.

[2]) Es verlohnt sich nicht, den Fall zu erörtern, in dem das Produkt Kb so groß ist, daß Kb^2 ungefähr gleich Eins wird. In diesem Falle würde die Amplitude der auf dem vierten Gliede beruhenden Variation in die Ordnung τ_0

Die bisher angestellten Betrachtungen erlauben uns, eine bestimmte Antwort auf unsere erste Frage zu geben.

Ist die Hypothese der Addition der Geschwindigkeit des Lichtes und derjenigen der Lichtquelle mit den an den Doppelsternen angestellten Untersuchungen vereinbar oder nicht?

Bei den teleskopisch trennbaren Doppelsternen (die sodann die einzigen sind, auf die die Anwendbarkeit des zweiten Keplerschen Gesetzes wirklich anerkannt und kontrolliert worden ist) wird der zu jenem Zweck von unserer Analyse geforderten Bedingung $Kb = 10^{-1}$ in weitem Maße genügt. Ihre Beobachtung beweist nichts gegen unsere Hypothese.

Bei den anderen „Doppelsternen", den spektroskopisch trennbaren, ist die Anwendung des zweiten Keplerschen Gesetzes nicht durch die Messungen erfordert worden, sondern sie geschah aus vernunftmäßiger Verallgemeinerung.

Die spektroskopische Beobachtung lieferte nur die Kenntnis der Umlaufszeit und die der Geschwindigkeit der vermuteten Komponenten; auf Grund dieser Daten und an der Hand der Keplerschen Gesetze (die daher als anwendbar vorausgesetzt wurden) wurden die übrigen Elemente der Bewegung (die Bahndimensionen) und die Massen der Komponenten abgeleitet.

Perioden und Geschwindigkeit werden mit Hilfe der periodischen Verschiebungen der Spektrallinien abgeleitet, so daß nur noch folgender Punkt zu untersuchen ist: Werden die Messungen dieser Verschiebungen durch die Lichtüberlagerungen, die unsere Hypothese voraussieht, gestört oder nicht?[1]).

Wir haben bereits zu Beginn dieser Abhandlung gesehen, daß, wenn das Produkt Kb klein ist, keine Lichtüberlagerung eintreten wird, außer aus wenig voneinander entfernten Punkten der Trajektorie,

---

kommen, d. h. sie ließe Lichtüberlagerung aus etwas entfernten von dem Stern auf der Trajektorie eingenommenen Stellungen voraussehen. Da aber das dritte Glied eine etwa 1000mal größere Amplitude hat, so resultiert als Breite des Streifens, innerhalb dessen die Kurve enthalten ist, etwa $2000\,\tau_0$, d. h. eine Parallele zur Achse t wird ungefähr 4000mal die Kurve $T = f(t)$ treffen, und somit wird aus all diesen mannigfaltigen differenten Stellungen in jedem Augenblick eine praktisch konstante Lichtsumme aufgenommen werden.

[1]) Hier setzen wir stillschweigend eine schwerwiegende Frage als gelöst voraus, die nämlich, wie der Dopplereffekt im Falle der ballistischen Hypothese zu betrachten ist. Indem ich mir vorbehalte, diese Frage besonders zu behandeln, beschränke ich mich hier auf die Bemerkung, daß die Schwierigkeiten dieser wichtigen Erscheinung sich nur auf Grund der Betrachtung der Wellenlängen erheben. Diese Vorstellung ist jedoch nicht wesentlich zur Feststellung der periodischen Natur des Lichtphänomens, sondern hängt nur von dem Bilde des Lichtäthers ab, das mit der ballistischen Hypothese unvereinbar ist.

das bedeutet, daß zu dem Spektroskop alsdann gleichzeitig Strahlen mit wenig abweichenden Geschwindigkeiten gelangen werden: wir werden also, wenn überhaupt in wahrnehmbarem Maße, eine geringe periodisch mit der Rotationsperiode des Sternes variable Verbreiterung der Linien bekommen, die sich der auf Grund der gewöhnlichen Hypothesen vorausgesehenen periodischen Verschiebung überlagert. Es besteht also keine Schwierigkeit für die Messung dieser Verschiebung.

Dieselbe Schlußfolgerung gilt auch dann, wenn sich das Produkt Kb der Eins nähert. Und zwar wird, bis die Kurve $T = f(t)$ nur an einer Stelle von den Parallelen zur Abszissenachse geschnitten wird, was beim Wachsen von Kb erfolgt, das Resultat eine Vergrößerung der Verbreiterung der Linie sein und die Evidenz der periodischen Breitenänderung.

Sobald Kb derartige Werte erreicht, daß $(Kb > 1/2\pi)$ die Kurve dreimal von einigen Parallelen durchschnitten werden kann, werden wir aufgespaltene Linien bekommen können, wenn den Stellungen, aus denen das Licht zur gleichen Zeit ankommt, etwas abweichende Geschwindigkeiten entsprechen, oder einfach verbreiterte mit einem Charakter vollkommen regelmäßiger Periodizität, so daß die Bestimmung der Periode ermöglicht wird und durch Messung des Abstandes der Komponenten oder der Breite der Linie auch die Bestimmung der augenblicklichen dem umlaufenden Körper in den verschiedenen Stellungen zukommenden Geschwindigkeit, d. h. jener Elemente, die zur Ableitung des Bahnradius und der Masse des Körpers auf Grund der (bereits als anwendbar vorausgesetzten) Keplerschen Gesetze notwendig sind.

Ja die Dissymmetrie unserer Kurven in bezug auf die Parallelen zur Ordinatenachse läßt uns leicht voraussehen, daß die Komponenten einer Linie alsdann nicht in gleicher Weise in bezug auf die normale Lage verschoben erscheinen werden (zwei verschmelzen in der Nachbarschaft der Maxima und Minima der Kurve $T = f(t)$ zu einer einzigen Linie), so daß wir dahin geführt sein werden, der Geschwindigkeit der Lichtquelle zwei verschiedene Werte beizumessen; Werte, die, bei der gegenwärtig üblichen Weise das Phänomen zu erklären, zwei verschiedenen Körpern zugeschrieben werden, den zwei Komponenten des Doppelsternes, die deshalb untereinander vergleichbare Helligkeit, Größe und Geschwindigkeit haben müßten; während bei der von uns vorgeschlagenen Erklärungsweise die zwei Werte verschiedenen Momenten desselben und einzigen (um ein großes und wenig bewegliches Zentrum) kreisenden Körpers angehören würden.

Beim Wachsen des Produktes Kb wächst die Zahl der Treffpunkte unserer Kurve mit den Parallelen zur Achse t; solange diese Punktzahl klein ist (3,5), werden wir im allgemeinen verbreiterte Linien bekommen, die in irgend einem Moment sich zerlegen und zwei oder mehr distinkte Komponenten aufweisen können, wie es in gewissen Fällen beobachtet, aber nicht erklärt worden ist (Mira Ceti)[1]), während wir, wenn diese Zahl groß wird, Überlagerung von Licht aus vielen verschiedenen Stellungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten und demnach konstant verbreiterte Linien bekommen werden, bei denen nämlich die Breite nur kleine Veränderungen zeigt, die allmählich verschwinden werden.

Nur also wenn das Produkt Kb größer als 10 geworden sein wird, erlaubt die auf das Studium der periodischen Änderungen der Linien gegründete spektroskopische Beobachtung uns nicht mehr, die „Doppelstern"natur der Sterne zu konstatieren.

Nur für diese Fälle also würden die Befürchtungen De Sitters begründet sein!

Aber nichts Schlimmes ist dabei, wenn man glaubt, daß es der astrophysikalischen Forschung noch nicht gelungen ist, die wahre Natur einer gewissen Anzahl komplexer Sterne zu enthüllen. Unsere Hypothese wird uns sehr nützlich sein, sie zu entdecken.

Sichergestellt ist der Zustand konstanter Verbreiterung, den die Spektrallinien vieler Sterne aufweisen[2]); im Lichte unserer Hypothese gedeutet, wird sie uns gestatten, deren Natur als „Doppelsterne" oder komplexere Systeme zu erkennen.

Die nachfolgenden statistischen Betrachtungen stützen in eindrucksvoller Weise diese unsere Meinung über die Existenz vieler noch nicht aufgelöster komplexer Systeme.

Die Zahl der bekannten spektroskopischen Doppelsterne wächst zuerst rasch mit dem Wachsen ihrer scheinbaren Größe, erreicht bald ein Maximum und nimmt jäh ab, so daß nur ganz wenige von über 5,5 Größe bekannt sind.

In nachstehender Tabelle haben wir der Größe nach — Stufenfolge von halber Größe — die in einem Katalog von Campbell, dem

---

[1]) Häufig ist der Fall der gleichzeitigen Beobachtung der scharfen Linie an normaler Stelle und von zwei seitlich verbreiterten Komponenten. Man sieht sofort, wie dieser Fall vollkommen mit dem übereinstimmt, was man auf Grund unserer Kurven voraussehen kann.

[2]) Die Sterne der ersten Spektralklasse sind charakterisiert durch die Anwesenheit der stark verbreiterten Wasserstofflinien.

einzigen mir zugänglichen — aufgeführten Doppelsterne zusammengestellt:

Scheinbare Größe	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
Zahl der bekannten Doppelsterne . . .	3	3	6	9	16	21	29	32	13	5	0

Ein Verhalten dieser Art — es ist fast überflüssig es hervorzuheben — steht in schreiendem Gegensatz zu dem, was man auf Grund der gewöhnlichen „Wahrscheinlichkeits"kriterien voraussehen müßte, wenn man berücksichtigt, daß die Zahl der einem jeden dieser Größenintervalle angehörigen Sterne mit dem Wachsen der Ordnungszahl des Intervalls mit ungeheurer Schnelligkeit wächst.

Es entsteht somit von selbst der Verdacht, daß irgend eine wohldefinierte und konstante Ursache die Möglichkeit der Beobachtung von (sicher existierenden) „Doppelsternen" mit Hilfe des Studiums der Verdopplungen und der wechselnden und periodischen Verbreiterungen der Linien beschränkt und schließlich verhindert; und auf eine Ursache dieser Art werden wir gerade durch unsere Erörterung hingewiesen.

Werte von $Kb > 10$ können wegen der notwendigen Kleinheit, die das Verhältnis $b = \frac{v}{c}$ behalten muß, um so leichter auftreten, je größer die Distanz c, d. h. je größer K ist. Mit anderen Worten, es besteht nur eine geringe Wahrscheinlichkeit, daß die entfernten Sterne uns ihre komplexe Natur durch periodische Veränderungen ihrer Spektrallinien offenbaren.

Ist K groß, so werden immer kleinere Werte von b notwendig sein, damit die Schwelle ($Kb \geq 10$) nicht überschritten werde; und bei kleinen Werten von b werden die Beobachtungen aus einem anderen Grunde unmöglich, nämlich wegen der Kleinheit der Linienverbreiterung.

Die Brauchbarkeit der spektroskopischen Methode für die Entdeckung komplexer Sterne muß also meines Erachtens rasch entschwinden in dem Maße, wie die Entfernung der Sterne, d. h. die Ordnung der Klasse wächst.

Unsere Hypothese steht also auch bei dieser merkwürdigen Eigentümlichkeit in vollkommenem Einklang.

Es sei uns deshalb erlaubt zu behaupten:

1. daß die Beobachtungen an den bekannten Doppelsternen der eventuellen Richtigkeit der ballistischen Hypothese über

die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes keinen Eintrag tun und um so weniger die Wahrheit des zweiten Postulats der Einsteinschen Theorie bestätigen;

2. daß die ballistische Hypothese eine gute Erklärung der merkwürdigen Anhäufung der bekannten Doppelsterne um die vierte und fünfte Stufe der Skale der scheinbaren Größen liefert;

3. daß dieselbe Hypothese auch einen festen und wesentlichen Grund für eine gute theoretische Erklärung eines ausgedehnten und überaus anziehenden Gebietes astronomischer Erscheinungen liefern kann: das ist das Gebiet der durch die „Veränderlichen Sterne“ und „Neuen Sterne“ gebotenen Phänomene.

Auf diesen interessanten Punkt werde ich in einer späteren Arbeit zurückkommen.

Uber ultramikroskopische Untersuchungen bei einseitiger Beleuchtung.

Der ultramikroskopische Mie-Effekt.

Von **A. Szegvari** in Berlin-Dahlem.

Mit elf Abbildungen. (Eingegangen am 9. Januar 1924.)

Vor einiger Zeit wurde berichtet[1]), wie durch Anwendung einer Beleuchtungsazimutblende bei koaxialen Dunkelfeldkondensoren die ultramikroskopische Untersuchungsmethodik bereichert werden kann. Des weiteren machte sich hierbei eine Erscheinung stark bemerkbar, die bisher bei Dunkelfeldbeobachtungen nicht berücksichtigt wurde. Diese Erscheinung soll zunächst für sich allein betrachtet werden.

Trifft ein Lichtstrahl eine optische Heterogenität, die kleiner ist als eine halbe Lichtwellenlänge, so beugt diese Heterogenität Licht ab, indem es Zentrum einer neu entstandenen Kugelwelle wird. Die

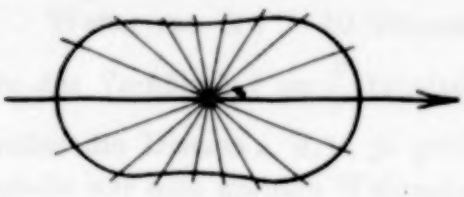


Fig. 1.
Unendlich kleines Goldteilchen.

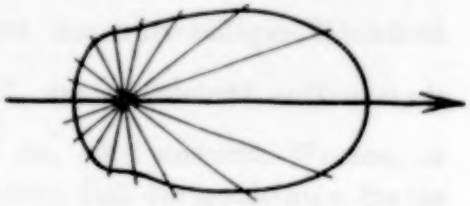


Fig. 2.
Goldteilchen vom Durchmesser 160 mμ.

Intensität an dieser abgebeugten Kugelwellenfront ist aber nicht gleichmäßig verteilt. Diese Erscheinung hat bereits Mie[2]) eingehend theoretisch untersucht; einen Teil seiner Ergebnisse veranschaulichen die Diagramme Fig. 1 und Fig. 2, in welchen die Lichtintensitäten der von einem beugenden Zentrum ausgehenden Kugelwelle nach jeder Richtung von diesem Zentrum aus aufgetragen sind. Es ist zunächst die ungleichmäßige Intensitätsverteilung nach den verschiedenen Richtungen deutlich erkennbar. Ferner, und das ist wesentlich für die weiter unten folgenden Betrachtungen, steigt die Intensität in solchen Richtungen rasch an, welche sich der erregenden Lichtrichtung nähern, um daselbst ein Maximum zu erreichen. Bei wachsender Teilchengröße endlich

[1]) Szegvari, Phys. ZS. **24**, 91, 1923.
[2]) Mie, Ann. d. Phys. (4) **25**, 377, 1908.

pflanzt sich der größte Teil des abgebeugten Lichtes in Richtungen fort, die von der der primär erregenden Strahlen wenig abweichen.

Die quantitativen Resultate von Mie sind streng nur für Goldteilchen gültig, für welche die Diagramme berechnet wurden. Qualitativ werden sich aber alle Teilchen mehr oder weniger so verhalten, außer anderen Experimenten [1]) bestätigen dies auch die weiter unten angeführten Erfahrungen.

Wie sich nun diese ungleichmäßige Verteilung der Intensität des abgebeugten Lichtes um ein Beugungszentrum im Ultramikroskop bemerkbar macht, sei an folgendem Beispiel klargelegt (Fig. 3).

Der Objektpunkt *A* sei von einem koaxialen Dunkelfeldkondensor beleuchtet, die Beleuchtungsstrahlen sollen jedoch durch eine Azimutblende bis auf den Strahl *B* abgeblendet werden. (Die Beleuchtung ist demnach einseitig.) Das optische System *C* des Mikroskops vereinigt denjenigen Teil des abgebeugten Lichtes, den die Apertur des Objektivs zuläßt, zu einem Bildpunkt *D*. Nun ist aber infolge der oben geschilderten Verhältnisse das vom Objektpunkt *B* ausgehende und in dem Bildpunkt *C* sich zusammenziehende Strahlenbündel in einem zur optischen Achse senkrechten Querschnitt nicht gleichmäßig intensiv; derjenige Teil ist am intensivsten, welcher solchen Strahlen entspricht, die in ihrer Richtung am wenigsten von der Beleuchtungsrichtung abweichen. (Bei 1 liegt der hellste, bei 2 der dunkelste Teil eines solchen Querschnittes.) Fangen wir das Strahlenbündel etwas oberhalb oder unterhalb seines Vereinigungspunktes auf einem Schirm *E* auf, so müßten wir ein Lichtscheibchen wahrnehmen, welches bei dem Treffpunkt der Strahlen 1 am intensivsten ist. Im Prinzip beobachtet man dasselbe, wenn man ins Mikroskop hineinsieht und den Tubus aus der richtigen Lage hebt oder senkt. Hierbei breitet sich das Beugungsscheibchen — welches in der Scharfstellung seine kleinsten Ausmaße besitzt — aus, gleichzeitig wird die ungleiche Helligkeitsverteilung deutlich. Dreht man nun das Beleuchtungsazimut herum, so dreht sich der intensivste Fleck des Beugungsscheibchens ebenfalls im Kreis herum.

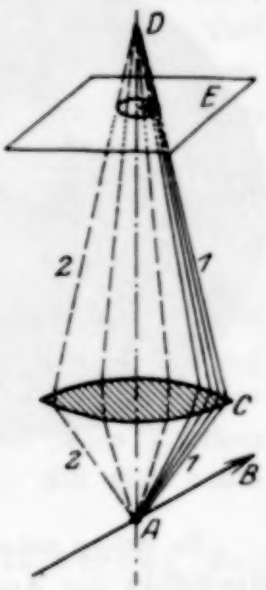


Fig. 3.

[1]) Senftleben und Benedict, Ann. d. Phys. **60**, 297 1919.

Fig. 4 zeigt die ultramikroskopische Aufnahme der Beugungsscheibchen von Eiweißteilchen, die in Leinöl suspendiert sind, bei allseitiger Beleuchtung (Kardioidkondensor). In Fig. 5 sind ebensolche Beugungsscheibchen, jedoch bei einseitiger Beleuchtung aufgenommen (Kardioidkondensor und Azimutblende). Man sieht deutlich das Intensitätsmaximum, welches dem gewählten Beleuchtungsazimut entspricht. Würde man die Azimutblende herumdrehen, so würde sich hierbei das Intensitätsmaximum im Beugungsscheibchen um den Mittelpunkt des letzteren entsprechend mit drehen.

Es wäre zweckmäßig, die primäre Ursache dieser Erscheinung — die ungleichmäßige Energieverteilung des abgebeugten Lichtes nach den verschiedenen Richtungen mit einem Maximum in der erregenden Strahlrichtung — als Mie-Effekt zu bezeichnen.

Fig. 4.

Fig. 5.

Es möge schon jetzt darauf hingewiesen werden, daß auf den Mie-Effekt die Apertur des angewendeten Mikroskopobjektivs einen großen Einfluß hat. Aus Fig. 3 ist es nämlich ersichtlich, daß die größten Intensitätsunterschiede die äußersten Strahlen des Strahlenkegels, also die Strahlen größter Apertur aufweisen.

Im weiteren möge auseinandergesetzt werden, bei welchen Gelegenheiten in der Ultramikroskopie der Mie-Effekt in Betracht gezogen werden muß.

1. Szegvari hat vor kurzem gezeigt[1]), daß man sich über die Form (nichtkugelige usw.) von unbeweglichen kolloiden Teilchen, z. B. von Niederschlägen, auf folgende Weise überzeugen kann. Man beleuchtet das Objekt einseitig, durch Einschalten einer Azimut-

[1]) Szegvari, l. c., S. 348.

blende, und dreht nun das Beleuchtungsazimut herum. Ändert sich hierbei die Intensität des abgebeugten Lichtes, so ist das beobachtete Teilchen nichtkugelig; bleibt es konstant, so besitzt das Teilchen weitgehend angenäherte Kugelform.

Unter Umständen könnte nun dieser Azimuteffekt durch den Mie-Effekt vorgetäuscht werden, und zwar bei dichten Präparaten. Denn die stärkeren Mikroskopobjektive bilden nur eine äußerst dünne Tiefenzone scharf ab; alles, was darunter oder darüber liegt, wird unscharf; selbst bei einigen μ dicken Präparaten kann man die Scharfzone durch das Präparat mittels Hebens oder Senkens des Tubus durchwandern lassen. Bei dichten Kolloiden, wo Teilchen über- und untereinander sind, werden demnach immer unscharf eingestellte Teilchen im Gesichtsfeld vorhanden sein — auf welche die eingangs erörterten Beziehungen ohne weiteres gelten. Drehen wir demnach die Azimutblende herum, so wird sich der hellste Teil dieser Beugungsscheibchen um dessen Mittelpunkt herumdrehen. Sind nun solche Teilchen dicht nebeneinander, so daß sich die infolge unscharfer Einstellung verbreiterten Beugungsscheibchen teilweise überschneiden, so entsteht leicht der Eindruck, als würden dunkle Stellen einfach hell werden und umgekehrt, ein Verhalten, das fälschlich für einen Azimuteffekt gehalten werden könnte.

Die Eindeutigkeit des Versuchs kann man auf zweierlei Weise fördern. Erstens, indem man Präparate untersucht, in denen nur wenig Teilchen und womöglich in einem gewissen Abstand voneinander vorhanden sind, so daß man dafür Gewähr hat, daß jedes Teilchen scharf eingestellt ist und jedes Beugungsscheibchen für sich beobachtet werden kann.

Zweitens kann der Mie-Effekt durch Verkleinerung der Objektivapertur zurückgedrängt werden, da, wie eingangs gezeigt wurde, die größten Intensitätsunterschiede die Strahlen größter Apertur aufweisen; der Azimuteffekt selber bleibt von der Apertur des Objektivs unbeeinflußt.

2. Bei der Untersuchung von feinen Dunkelfeldeffekten mit der Azimutblende stören oft im Präparat vorhandene einzelne gröbere Teilchen, deren abgebeugtes Licht nämlich bisweilen so stark ist, daß es die Beobachtung der weniger intensiven Effekte sehr erschwert.

Infolge des Mie-Effektes besitzt nun dieses von gröberen Teilchen abgebeugte Licht die größte Intensität in der Nähe der Beleuchtungsstrahlrichtung, also bei den größten Aperturen. Wird daher die Objektivapertur etwas abgeblendet, so werden dadurch

die einzelnen überstarken Beugungseffekte so stark abgeschwächt, daß sie nicht mehr stören, während durch diese Maßnahme die feineren Dunkelfelderscheinungen ganz bedeutend weniger berührt werden.

Fig. 6 und Fig. 7 zeigen zwei Aufnahmen einer und derselben Stelle eines 1 proz. Seifensoles. Fig. 6 ist mit Apertur 0,85 aufgenommen (beleuchtet wurde mit dem Kardioidkondensor), während in Fig. 7 die Apertur eingeschränkt wurde. Es ist in der Tat deutlich ersichtlich, daß in der letzten Aufnahme die Helligkeit der Beugungsscheibchen der einzelnen gröberen Teilchen bedeutend abgeschwächt wurde, während das charakteristische Bild dieses Stäbchensoles unberührt blieb.

3. Die ultramikroskopische Untersuchung von sehr dichten Präparaten ist kaum möglich wegen der vollständigen Aufhellung

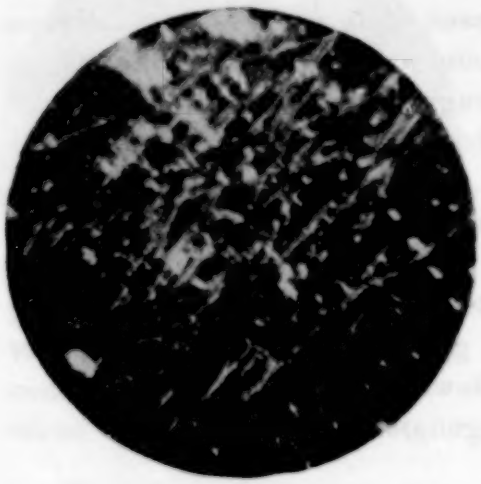


Fig. 6.

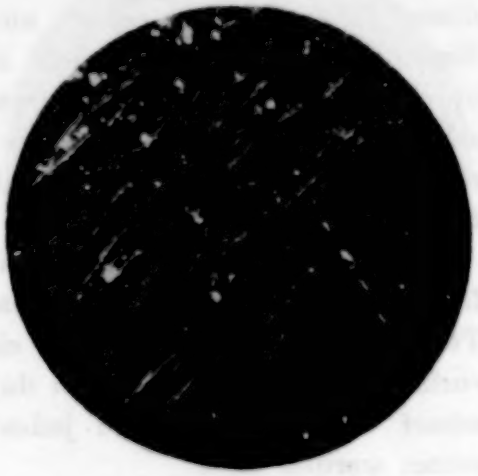


Fig 7.

des Hintergrundes. Fig. 8 zeigt z. B. eine photographische Aufnahme einer trockenen, durch Abreiben stellenweise dünner gemachten Silberbromid-Gelatineschicht; wie ersichtlich, ist die Auflösung durch die Aufhellung des Hintergrundes stark verhindert. Es möge betont werden, daß diese Erscheinung nicht etwa durch die geometrische Tatsache begründet ist, daß die Teilchen zu dicht nebeneinander liegen; denn man findet in diesen Präparaten Stellen, die ganz frei von beugenden Elementen sind — welche demnach ganz schwarz erscheinen müßten — und die ebenfalls aufgehellt sind. Dies ist scheinbar sehr auffallend, denn bei richtiger Begrenzung von Kondensor- und Objektivapertur dürfte dies prinzipiell nicht eintreten. (Das Bild wurde wie Fig. 6 mit Kardioidkondensor und

mit einer numerischen Objektivapertur 0,85 aufgenommen; verwendet wurde das Objektiv *V* von Zeiss mit homogener Glycerinimmersion.)

Das falsche Licht kann demnach unmittelbares Kondensorlicht nicht sein. Es ist wohl abgebeugtes Licht, aber nicht solches, welches von einem im Gesichtsfeld befindlichen Beugungszentrum unmittelbar ins Objektiv gelangt, denn dies müßte bei scharfer Einstellung des Präparats zu einem Beugungsscheibchen interferieren und nicht das Gesichtsfeld aufhellen. Es ist vielmehr solches abgebeugtes Licht, welches nach wiederholten Beugungen und Reflexionen ins Objektiv eintritt.

Da nun infolge des Mie-Effekts der größte Teil des abgebeugten Lichtes sich in Richtungen fortpflanzt, die einen nicht zu großen Winkelbereich um den einfallenden Strahl einschließen, so

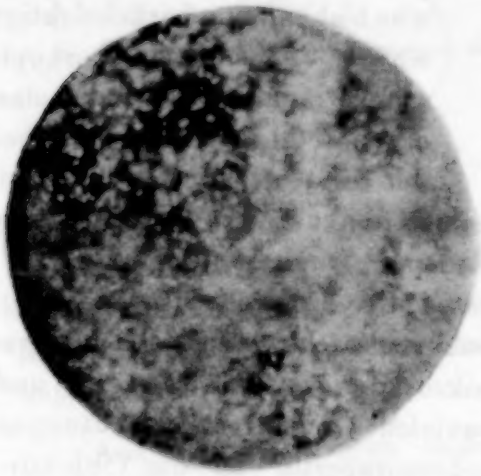


Fig. 8.

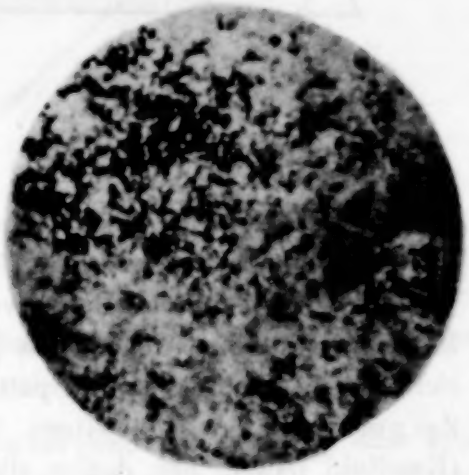


Fig. 9.

ist es auch bei diesem das Gesichtsfeld aufhellenden diffusen Licht der Fall; es wird demnach vorwiegend in Richtungen vorhanden sein, die großen Aperturen entsprechen.

Die Verhältnisse werden von der einfachen schematischen Vorstellung gut wiedergegeben (Fig. 10), als wäre die scharfe Grenze der Kondensorbeleuchtung (*A*) durch „Mattscheibenwirkung“ verbreitert (*B*—*B*); einwandfreies Dunkelfeld ergibt nur der engere Winkelbereich *C*—*C* (und nicht etwa *A*—*A*).

Dieser Fehler müßte demnach, so wie früher, durch Einschränkung der Objektivapertur weitgehend behoben werden; dies ist tatsächlich der Fall. Fig. 9 ist eine Aufnahme, die der in Fig. 7 vollständig entspricht, nur ist die Objektivapertur bedeutend

abgeblendet. Wie die Aufnahme zeigt, wird hierdurch eine viel weitgehendere Auflösung erreicht. — Diese Aperturreinschränkung ist bei den Trockensystemen (auch aus anderen Gründen) besonders wirksam.

Da man nun die Apertur des Objektivs nur so weit einschränkt, als es die früher geschilderten Verhältnisse erforderlich machen, — weil ja die Aperturreinschränkung die eigentliche mikroskopische Auflösung verschlechtert —, kann nicht allgemein angegeben werden, wie weit in Einzelfällen die Apertur eingeschränkt werden sollte. Dies hängt bei gleichbleibenden optischen Verhältnissen (Kondensor, Objektiv) vom Präparat ab, — was bisher kaum berücksichtigt wurde. Jedes ultramikroskopische Präparat wünscht seine eigene Objektivapertur, bei der die Auflösung optimal ist.

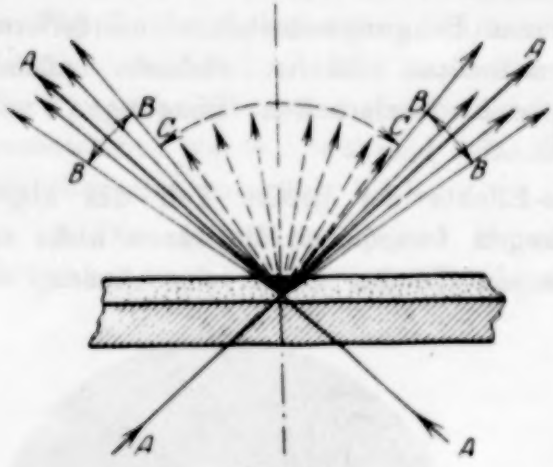


Fig. 10.

4. Der Mie-Effekt gibt einen Gesichtspunkt für die Beurteilung des Auflösungsvermögens der verschiedenen Dunkelfeldsysteme.

Es gibt hauptsächlich zwei Klassen der Dunkelfeldbeleuchtung. Erstens jene, bei denen das Präparat senkrecht zur Beobachtungsrichtung beleuchtet wird (Spaltultramikroskop von Siedentopf und Zsigmondy usw.); zweitens die koaxialen Dunkelfeldbeleuchtungen (Kardioid usw.), bei denen die Kondensorapertur an die Objektivapertur angrenzt. Zeichnen wir schematisch in den Strahlengang die Mieschen Intensitätsdiagramme ein (Fig. 11a für einen Strahl der senkrechten, Fig. 11b für einen Strahl der koaxialen Beleuchtung). Nehmen wir ferner an, daß in beiden Fällen Objektive von der gleichen Apertur verwendet werden, so wird in beiden Fällen von der abgebeugten Kugelwelle der gleiche Anteil α vom Objektiv aufgenommen. Die zwischen den Grenzstrahlen des Lichtbündels und dem Intensitätsdiagramm eingeschlossene (schraffierte) Fläche ist ein Maß der Gesamtintensität des vom Objektiv aufgenommenen Lichtes. Aus der Figur ist ersichtlich, daß diese bei der koaxialen Beleuchtung viel größer ist; bei der senkrechten Beleuchtung hat das Intensitätsdiagramm ziemlich die ungünstigste Lage. Die koaxiale Beleuchtung ist demnach aus diesem Gesichtspunkt vorzuziehen.

5. Die bisherigen Erörterungen zeigen, daß bei Anwendung einer Beleuchtungsazimut- und Objektivaperturblende bei „unscharf" eingestelltem Beugungsscheibchen gewisse Stellen des Beugungsscheibchens mit gewissen vom Beugungszentrum ausgehenden Strahlrichtungen identifiziert werden können. Diese Tatsache ermöglicht die Analyse der Beugungsscheibchen im erörterten

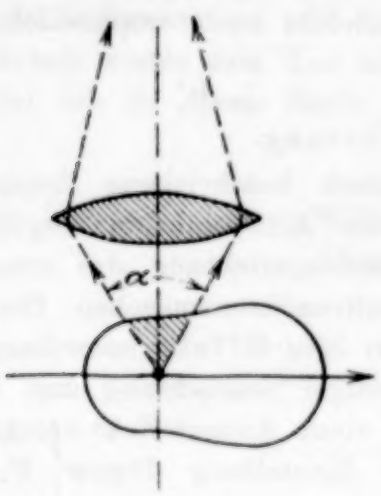


Fig. 11a.

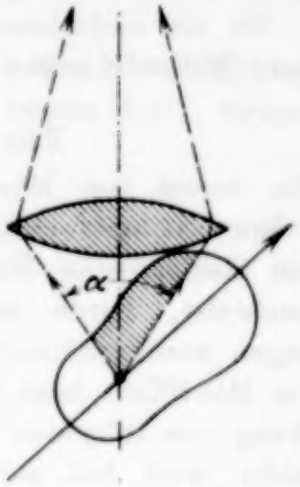


Fig. 11b.

Sinne. Man kann also ultramikroskopisch solche Zusammenhänge der Beugungserscheinung an dem Elementarvorgang verfolgen, welche man bisher bloß mikroskopisch am Tyndallphänomen untersuchte.

Aus dem Bisherigen möchte hervorgehoben werden, daß eine verstellbare Objektivaperturblende eine notwendige, oft unentbehrliche optische Einrichtung einer zweckmäßigen ultramikroskopischen Untersuchungsmethode ist.

In diesem Zusammenhang möge noch etwas hervorgehoben werden. Es wurde gezeigt, daß die Anwendung einer Beleuchtungsazimutblende das ultramikroskopische Funkelphänomen viel empfindlicher macht [1]). Die weiteren Untersuchungen lehrten nun, daß eine gleichzeitige Einschränkung der Objektivapertur diese Empfindlichkeit sehr steigert. Das Funkelphänomen wird nämlich dadurch besser sichtbar, weil die Wahrscheinlichkeit dafür vergrößert wird, daß ein nichtkugeliges Teilchen, welches infolge seiner Lage gerade ins Objektiv Licht abbeugt, wegen der Brownschen Bewegung im nächsten Moment dies nicht mehr tut und demnach verdunkelt

[1]) Szegvari, l. c., S. 348.

ist. Während nun die Azimutblende vorwiegend das Funkeln infolge der horizontalen Rotationskomponente der Brownschen Bewegung verursacht, wirkt die Aperturblende in demselben Sinne auf das Funkeln infolge der vertikalen Komponente ein.

Die gemeinsame Anwendung beider Blenden liefert eine ultramikroskopische Untersuchungsmethode für die Feststellung der Abweichung von der Kugelform ultramikroskopisch auflösbarer Teilchen, die als einfachste und vielleicht auch empfindlichste und verläßlichste Methode gelten kann.

Zusammenfassung.

1. Die zuerst von Mie theoretisch beschriebene Erscheinung, daß die Intensitätsverteilung des von Einzelteilchen abgebeugten Lichtes ein Maximum in der Fortpflanzungsrichtung des erregenden Lichtes aufweist, wurde bei den ultramikroskopischen Beugungserscheinungen wiedergefunden und als Mie-Effekt bezeichnet.

2. Der Mie-Effekt kann bei einseitiger Beleuchtung und bei der Untersuchung von ruhenden Teilchen einen Azimuteffekt vortäuschen; dieser Fehler wird bei sorgfältiger Einstellung dünner Präparatstellen vermieden.

3. Ultramikroskopische Präparate enthalten oft gröbere Teilchen, die wegen ihrer starken Lichtabbeugung die Untersuchung der feineren Effekte stören; infolge des Mie-Effekts besitzt dies überstark abgebeugte Licht vorwiegend Strahlen großer Aperturen.

4. Dichte ultramikroskopische Präparate sind infolge Aufhellung des Hintergrundes schwer auflösbar; der Grund dieser Aufhellung ist (unter anderen) der Mie-Effekt, da infolge des letzteren Licht (von den vom Objektiv zugelassenen Aperturen) entstehen kann, welches in einer zum Objekt konjugierten Ebene nicht zu Bildpunkten vereinigt wird.

5. Da die störenden Strahlen sowohl beim Azimuteffekt wie bei gröberen Teilchen und bei dichten Präparaten infolge des Mie-Effekts vorwiegend große Aperturen besitzen, können diese Fehler durch Verkleinerung der Objektivapertur weitgehend verringert werden.

Zu einer zweckmäßigen ultramikroskopischen Untersuchung muß das Objektiv eine einstellbare Aperturblende besitzen.

6. Durch Anwendung einer Azimut- und Aperturblende läßt sich das Tyndallphänomen am Einzelteilchen untersuchen.

7. Die gemeinsame Anwendnng der Azimut- und Objektivaperturblende macht das Funkelphänomen äußerst empfindlich für die Erkennung der nichtkugeligen Gestalt von kolloiden Teilchen.

8. Infolge des Mie-Effekts arbeiten die koaxialen Dunkelfeldkondensoren günstiger als die Dunkelfeldeinrichtungen, wo Beleuchtungs- und Beobachtungsrichtungen aufeinander senkrecht stehen.

Herrn Professor Dr. H. Freundlich möchte ich für sein dauerndes Interesse an der Arbeit und für seine wertvollen Ratschläge vielmals danken.

Die Arbeit wurde zum Teil mit Mitteln der Hoshi-Stiftung ausgeführt, der ich an dieser Stelle meinen besten Dank aussprechen möchte.

Berlin-Dahlem, Kaiser Wilhelm-Institut für physikalische Chemie und Elektrochemie.

Zusammenwirken von Lichtquanten und Plancksches Gesetz.

Von **L. S. Ornstein** und **H. C. Burger** in Utrecht.

(Mitteilung aus dem Physikalischen Institut der Universität Utrecht.)

(Eingegangen am 11. Januar 1924.)

1. Wir haben schon früher gezeigt[1]), daß eine gaskinetische Behandlung des Gleichgewichts von Lichtquanten und Elektronen möglich sei[1]). Wir haben dabei angenommen, daß die Lichtquanten eine „Wirkungssphäre" besitzen, deren Radius proportional der Wellenlänge des Quantes ist. Bei dieser Annahme war nur möglich, das Wiensche Gesetz abzuleiten; ohne besondere Hypothesen gelingt es nicht, für alle Frequenzen die Bedingungen für das Gleichgewicht von schwarzer Strahlung und freien Elektronen anzugeben. Die Ursache dieser wichtigen Tatsache erblickten wir in der von uns gemachten Annahme, daß die Stöße der Quanten das Elektron getrennt nacheinander treffen, und daß nie zwei Quanten zu gleicher Zeit dasselbe Elektron stoßen; wir haben das „Quantengas" als unendlich verdünnt betrachtet.

Die genannte Annahme wollen wir jetzt fallen lassen und auch mehrfache Stöße in Betracht ziehen. Damit aber die Rechnung sich nicht zu kompliziert gestalte und doch das Wesentliche hervortrete, beschränken wir uns auf den linearen Fall, d. h. wir nehmen an, daß Lichtquanten und Elektronen sich nur auf einer geraden Linie bewegen können.

Bevor wir den Einfluß der Doppelstöße auf das Gleichgewicht untersuchen, zeigen wir, daß bei Vernachlässigung mehrfacher Stöße (für die Lichtquanten) das Wiensche Gesetz gelten muß. Dazu benutzen wir eine Rechnungsweise, die später für den allgemeineren Fall leicht generalisiert werden kann.

An einer Linie entlang können sich Quanten von verschiedenen Frequenzen bewegen, deren Anzahl mit der Frequenz zwischen ν und $\nu + d\nu$ mit $n(\nu)d\nu$ bezeichnet wird; es mögen sich weiter auch Elektronen an dieser Linie entlang bewegen, deren Geschwindigkeitsgesetz

$$Ce^{-\frac{mv^2}{2kT}}dv \qquad (1)$$

[1]) ZS. f. Phys. **20**, 351, 1923.

sei. Beim Zusammenstoß eines Quantes mit einem Elektron gelten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_a^2}} + h\nu_a &= \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_e^2}} + h\nu_e, \\ \frac{mv_a}{\sqrt{1-\beta_a^2}} + \frac{h\nu_a}{c} &= \frac{mv_e}{\sqrt{1-\beta_e^2}} - \frac{h\nu_e}{c}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Die Größen $\beta_a = \frac{v_a}{c}$ und ν_a bezeichnen Geschwindigkeit und Frequenz vor dem Stoße, $\beta_e = \frac{v_e}{c}$ und ν_e die betreffenden Größen nach dem Stoße. Diese letzten kann man durch die ersten ausdrücken und umgekehrt. Entwickelt man bis zu Größen von der zweiten Ordnung in β, und bedenkt man, daß die Größenordnung von $h\nu$ und $\frac{1}{2} m v^2$ dieselbe ist, so findet man:

$$\left.\begin{aligned} v_e &= v_a\left(1 - \frac{2h\nu_a}{mc^2}\right) + \frac{2h\nu_a}{mc}, \\ \nu_e &= \nu_a\left(1 - \frac{2h\nu_a}{mc^2}\right) - 2\beta_a\nu_a + 2\beta_a^2\nu_a, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} v_a &= v_e\left(1 + \frac{2h\nu_e}{mc^2}\right) - \frac{2h\nu_e}{mc}, \\ \nu_a &= \nu_e\left(1 + \frac{2h\nu_e}{mc^2}\right) + 2\beta_e\nu_e + 2\beta_e^2\nu_e. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Wir wollen jetzt die Bedingung aufsuchen, unter welcher der Zustand stationär ist, und schreiben dazu eine Fundamentalgleichung für die Verteilungsfunktion $n(\nu)$ auf, welche ausdrücken soll, daß ebensoviel Quanten aus dem Frequenzbereich $d\nu$ verschwinden als dahin zurückkehren. Die Zahl der Stöße, welche die Quanten aus diesem Bereiche in der Zeiteinheit erleiden, bezeichnen wir mit

$$\frac{\alpha n(\nu) d\nu}{\nu^2}. \tag{5}$$

Durch den Nenner ν^2 tragen wir der Wirkungssphäre der Lichtquanten Rechnung, die auch im linearen Falle eine Rolle spielen muß.

Die Zahl der Stöße, welche ein Quant in dem Bereich $d\nu$ bewirkt, finden wir, indem wir alle Fälle zusammenzählen, in denen nach dem Stoße die Frequenz des Quantes im Bereiche $d\nu$ liegt. Die Zahl der Stöße von einem Quant mit einer Frequenz zwischen ν_a und $\nu_a + d\nu_a$ und einem Elektron mit der Geschwindigkeit zwischen v_a und $v_a + dv_a$ beträgt:

$$\frac{\alpha n(\nu_a) d\nu_a}{\nu_a^2}\left(1 - \frac{v_a}{c}\right) C e^{-\frac{m v_a^2}{2kT}} dv_a. \tag{6}$$

Diese Zahl hängt durch den Faktor $1-\frac{v_a}{c}=1-\beta_a$ von der Geschwindigkeit des Elektrons ab, da ein Elektron, das sich in der Richtung der Lichtquanten bewegt, weniger Stöße erleidet als ein ruhendes Elektron [1]).

Die Fundamentalgleichung lautet also:

$$\frac{\alpha n(\nu)\,d\nu}{\nu^2}=\int\frac{\alpha n(\nu_a)\,d\nu_a}{\nu_a{}^2}\left(1-\frac{v_a}{c}\right)Ce^{-\frac{m v_a^2}{2kT}}d v_a. \tag{7}$$

Die Integration erstreckt sich über alle Werte von ν_a und v_a, die nach den Gleichungen (4) am Ende des Stoßes dem Quante eine Frequenz zwischen ν und $\nu+d\nu$ geben. Weil man das Integrationselement übrigens beliebig wählen darf, nimmt man im Integral $\nu_a=\nu$, also:

$$d\nu_a=d\nu_e\left(1+\frac{4h\nu_e}{mc^2}+2\beta+2\beta^2\right). \tag{8}$$

Jetzt kann man ν_e mit ν identifizieren und $\frac{n(\nu)}{\nu^2}$ mit $f(\nu)$ bezeichnen. Zur Bestimmung der Funktion $f(\nu)$ bekommt man die Gleichung:

$$f(\nu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\nu_a)\left(1+\frac{4h\nu}{mc^2}+2\beta+2\beta^2\right)(1-\beta)\,Ce^{-\frac{m\nu^2}{2kT}}d\nu. \tag{9}$$

Die Frequenz ν_a ist durch die letztere der Gleichungen (4) bestimmt. Weil die Differenz von ν_a und ν klein ist, kann man $f(\nu_a)$ in der folgenden Weise entwickeln:

$$f(\nu_a)=f(\nu)+(\nu_a-\nu)f'(\nu)+\frac{(\nu_a-\nu)^2}{2}f''(\nu)+\cdots \tag{10}$$

Substituiert man diesen Wert von $f(\nu_a)$ in (9), und behält nur Größen von der Ordnung β^2 [2]), und bedenkt, daß:

$$\int_{-\infty}^{\infty}Ce^{-\frac{mc^2}{2kT}}d\nu=1 \quad\text{und}\quad \int_{-\infty}^{\infty}v^2Ce^{-\frac{mv^2}{2kT}}d\nu=\frac{kT}{m} \tag{11}$$

ist, so bekommt man für $f(\nu)$ die Differentialgleichung:

$$f''(\nu)+\left(\frac{2}{\nu}+\frac{h}{kT}\right)f'(\nu)+\frac{2h}{\nu kT}f(\nu)=0. \tag{12}$$

Die Lösung dieser Gleichung, die für alle Werte von ν endlich bleibt, ist:

$$f(\nu)=Ae^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{13}$$

---

[1]) L. S. Ornstein und H. C. Burger, l. c., S. 348.

[2]) Eine solche Größe ist auch $\frac{h\nu}{mc^2}$, da $h\nu$ von derselben Größenordnung ist wie $\frac{1}{2}mv^2$.

Das Frequenzgesetz der Lichtquanten ist also:

$$n(\nu)\,d\nu = A\,\nu^2 e^{-\frac{h\nu}{kT}}\,d\nu. \tag{14}$$

Wir finden in dieser Weise das Wiensche Gesetz.

2. Wir suchen jetzt eine Ursache dafür, daß das Wiensche Gesetz nicht unbegrenzt gültig ist, sondern nur eine Annäherung darstellt für den Fall, daß $h\nu \gg kT$. Wenn $h\nu \gg kT$ ist, finden die Stöße der Lichtquanten gegen ein Elektron nie zugleich statt, weil die Dichte der Quanten klein ist. Wir wollen nun aber eine weitere Näherung suchen, indem wir die Möglichkeit in Betracht ziehen, daß zwei Quanten von verschiedenen Seiten gleichzeitig auf ein Elektron stoßen. Sind die zwei Quanten von gleicher Frequenz, so werden sie mit derselben Frequenz wieder auseinandergehen und das Elektron wird in Ruhe bleiben, wenn es vor dem Stoße schon eine Geschwindigkeit Null hatte; der Einfluß der zwei stoßenden Quanten hebt sich auf. Es ist zu erwarten, daß auch auf ein bewegtes Elektron der Stoß von zwei Lichtquanten weniger Einfluß hat, wenn sie zugleich auftreffen und dieselbe Frequenz haben. Da wir nicht wissen, nach welchem Gesetz die zwei Lichtquanten mit dem Elektron zusammen wirken, können wir nicht angeben, was geschieht, wenn zwei Quanten von verschiedenen Frequenzen ungefähr gleichzeitig auf ein Elektron stoßen. Wir begnügen uns daher mit einer rohen Annäherung und nehmen an, daß die genannte Gegenwirkung von zwei Quanten nur stattfindet, wenn ihre Frequenzen eine nicht zu große Differenz haben. Nur eine Differenz $\Delta\nu$ die höchstens von der Größenordnung der Frequenz der beiden Quanten ist, kann als zulässig betrachtet werden. Auch die „Gleichzeitigkeit“ muß näher umschrieben werden. Genau gleichzeitige Stöße finden selbstverständlich nicht statt, aber wir wollen annehmen, daß die Wirkung der Quantenstöße wenigstens dann teilweise aufgehoben wird, wenn die Zeit, welche zwischen zwei Stößen verläuft, von der Größenordnung der Stoßzeit ist. Diese letztere muß aber von der Größenordnung der „Schwingungszeit“

$$\tau = \frac{c}{\lambda} \tag{15}$$

sein, die angibt, innerhalb welcher Zeit ein Lichtquant über einen festen Punkt streicht.

Die Anzahl der Stöße eines Elektrons mit Quanten von der Frequenz ν ist

$$\frac{\alpha\, n(\nu)\,d\nu}{\nu^2}, \tag{5}$$

wenn man die Doppelstöße außer acht läßt. Diese letzten kommen aber in Abzug, und man erhält für die genannte Anzahl:

$$\frac{\alpha n(\nu)\, d\nu}{\nu^2}\left(1-\frac{\tau}{\tau'}\right). \tag{16}$$

Die Zeit τ' ist von der Größenordnung der Zeit, die zwischen zwei aufeinanderfolgenden Stößen von Quanten mit der Frequenz ν und dem Elektron vergeht. Also ist $1/\tau'$ von der Größenordnung der Anzahl der Stöße, welche das Elektron von Quanten der Frequenz ν in der Zeiteinheit erleidet. Für diese Anzahl findet man, der Größenordnung nach:

$$n(\nu)\,\Delta\nu\,.\,c\,.\,\lambda^2. \tag{17}$$

Mit dem letzten Faktor trägt man wieder der Wirkungssphäre des Quantes Rechnung. Für die Anzahl der wirksamen Stöße findet man schließlich

$$\frac{\alpha n(\nu)\, d\nu}{\nu^2}\left\{1-\gamma c^3 f(\nu)\right\}. \tag{18}$$

γ ist ein Zahlenfaktor von der Größenordnung der Einheit und $\Delta\nu$ ist proportional ν gesetzt.

Die Gleichung (7) müssen wir in zweiter Näherung durch die folgenden ersetzen:

$$\frac{\alpha n(\nu)\, d\nu}{\nu^2}\left\{1-\gamma c^3 f(\nu)\right\}$$

$$=\int \frac{\alpha n(\nu_a)\, d\nu_a}{\nu_a^2}\left\{1-\gamma c^3 f(\nu_a)\right\}(1-\beta_a)\, C e^{-\frac{m v_a^2}{2kT}}\, d v_a \tag{19}$$

oder:

$$f(\nu)\, d\nu\left\{1-\gamma c^3 f(\nu)\right\}$$

$$=\int f(\nu_a)\, d\nu_a\left\{1-\gamma c^3 f(\nu_a)\right\}(1-\beta_a)\, C e^{-\frac{m v_a^2}{2kT}}\, d v_a. \tag{20}$$

In dieser Gleichung sind die Terme mit γ klein; man kann daher in diesen Termen $f(\nu)$ durch den Wert ersetzen, welchen das Wiensche Gesetz dafür gibt. Wie leicht ersichtlich, ist dann

$$\gamma c^3 f(\nu) = \gamma_1 e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{21}$$

γ_1 ist wieder eine dimensionslose Zahl von der Größenordnung der Einheit.

In den übrigen Termen setzen wir für $f(\nu)$ als Verallgemeinerung von (13):

$$f(\nu) = A e^{-\frac{h\nu}{kT}} + \varphi(\nu). \tag{22}$$

In dieser Weise erhält man zur Bestimmung der unbekannten Funktion $\varphi(\nu)$ die Gleichung:

$$\frac{2\nu^2 kT}{mc^2}\left\{\varphi''(\nu)+\left(\frac{2}{\nu}+\frac{h}{kT}\right)\varphi'(\nu)+\frac{2h}{\nu kT}\varphi(\nu)\right\}$$

$$=\gamma_1 A e^{-\frac{2h\nu}{kT}}\left\{1-\int e^{-\frac{2h(\nu_a-\nu)}{kT}}\frac{d\nu_a}{d\nu}(1-\beta)Ce^{-\frac{m v^2}{2kT}}d\nu\right\}=0. \quad (23)$$

Nach Entwicklung und Integration des zweiten Gliedes in der früher angegebenen Weise ergibt sich für $\varphi(\nu)$ die Differentialgleichung:

$$\varphi''(\nu)+\left(\frac{2}{\nu}+\frac{h}{kT}\right)\varphi'(\nu)+\frac{2h}{\nu kT}\varphi(\nu)$$

$$=\gamma_1 A\left(\frac{2h^2}{k^2T^2}-\frac{2h}{\nu kT}\right)e^{-\frac{2h\nu}{kT}}. \quad (24)$$

Die Lösung dieser Gleichung mit zweitem Gliede ist

$$\varphi(\nu)=\gamma_1 A e^{-\frac{2h\nu}{kT}}. \quad (25)$$

Für das Frequenzgesetz der Lichtquanten findet man also:

$$n(\nu)d\nu=A\nu^2\left(e^{-\frac{h\nu}{kT}}+\gamma_1 e^{-\frac{2h\nu}{kT}}\right)d\nu. \quad (26)$$

Der zweite Term, den man als Korrektion erhält, welche man an das Wiensche Gesetz anbringen muß, ist in Übereinstimmung mit dem Planckschen Gesetz, welches man in nachfolgender Weise entwickeln kann:

$$n(\nu)d\nu=A\nu^2\left(e^{-\frac{h\nu}{kT}}+e^{-\frac{2h\nu}{kT}}+e^{-\frac{3h\nu}{kT}}+\cdots\right)d\nu. \quad (27)$$

Daß der Faktor γ_1 genau gleich 1 ist, kann aus unseren Überlegungen nicht gefolgert werden, da uns das genaue Wirkungsgesetz von Quanten und Elektronen nicht bekannt ist. Die weiteren Terme $e^{-\frac{3h\nu}{kT}}\ldots$ muß man dem Einfluß von dreifachen Stößen zuschreiben.

3. Auch bei dem Gleichgewicht von Strahlung und Atom muß man mit der gleichzeitigen Einwirkung zweier oder mehr Lichtquanten auf ein Atom rechnen. Es ist sehr merkwürdig, daß man dann die Hypothese der negativen Einstrahlung, welche Einstein[1]) in seiner bekannten Arbeit über das Gleichgewicht von Strahlung und Atomen eingeführt hat, nicht braucht[2]).

---

[1]) Phys. ZS. **18**, 121, 1917. Siehe auch l. c., S. 349.

[2]) Auf diese Möglichkeit hat Herr Einstein uns in einem Gespräch aufmerksam gemacht.

Wenn man annimmt, daß nur positive Einstrahlung und spontane Emission stattfinden, gibt die Gleichung

$$a n_2 = n_1 \omega_{12} \frac{n(\nu)}{\nu^2} \tag{28}$$

an, daß die Zahl $a n_2$ der n_2-Atome, welche von dem Zustand 2 in den Zustand 1 zurückfallen, ebenso groß ist wie die Zahl $n_1 \omega_{12} \frac{n(\nu)}{\nu^2}$ der n_1-Atome, welche durch die Strahlung von der Frequenz ν von dem Zustand 1 in den Zustand 2 gebracht werden. Für das Frequenzgesetz der Quanten findet man

$$n(\nu) = \frac{a}{\omega_{12}} \nu^2 \frac{n_2}{n_1} = \frac{A}{\omega_{12}} \nu^2 e^{-\frac{h\nu}{kT}}. \tag{29}$$

Die Stöße von zwei Lichtquanten auf ein Elektron bewirken aber, daß eine Anzahl der Übergänge durch Einstrahlung nicht stattfindet. Wir nehmen an, daß bei „gleichzeitigem" Stoße das Atom nicht in den Zustand 2 versetzt wird; daß also eine Art von Interferenz auftritt, durch die sich der Einfluß der beiden Quanten auf das Atom zerstört.

Wie schon früher angeführt ist, muß man der gleichzeitigen Einwirkung zweier Quanten Rechnung tragen, indem man die Zahl der Einfachstöße mit einem Faktor, der kleiner als Eins ist, multipliziert. Die Gleichung (28) ersetzen wir daher durch

$$a n_2 = n_1 \omega_{12} \frac{n(\nu)}{\nu^2} \{1 - \gamma_2 c^3 f(\nu)\}. \tag{30}$$

Die dimensionslose Konstante γ_2 ist von der Größenordnung der Einheit, ist aber verschieden von der Konstante γ der Gleichung (18).

Bedenkt man, daß in dem von uns betrachteten Gebiete

$$\gamma_2 c^3 f(\nu) = \gamma_2 c^3 \frac{n(\nu)}{\nu^2} \ll 1 \tag{31}$$

ist, so findet man als angenäherte Lösung der Gleichung (30):

$$f(\nu) = \frac{n(\nu)}{\nu^2} = \frac{a}{\omega_{12}} e^{-\frac{h\nu}{kT}} + \frac{\gamma_2 c^3 a^2}{\omega_{12}^2} e^{-\frac{2h\nu}{kT}}. \tag{32}$$

Weil $\frac{a}{\omega_{12}}$ von der Frequenz unabhängig ist, muß das auch mit $\frac{\gamma_2 c^3 a^2}{\omega_{12}^2}$ der Fall sein.

Die zweifachen Stöße ergeben also in dem Strahlungsgesetz (32) einen Term, der auch durch die Entwicklung des Planckschen Gesetzes entsteht. Auch die Terme mit $e^{-\frac{3h\nu}{kT}}\ldots$ kann man finden, wenn man mehrfache Stöße in Betracht zieht. Auch in diesem Falle kann man aber die Koeffizienten der gefundenen Reihe

$$n(\nu) = \nu^2 (C_1 e^{-\frac{h\nu}{kT}} + C_2 e^{-\frac{2h\nu}{kT}} + \ldots) \qquad (33)$$

nicht zahlenmäßig bestimmen und das Verhältnis nur der Größenordnung nach angeben.

Utrecht, Phys. Inst. der Universität, Januar 1924.

Geometrische Darstellungen der speziellen Relativitätstheorie, insbesondere des elektromagnetischen Feldes bewegter Körper.

Von **P. Gruner** in Bern.

Mit vier Abbildungen. (Eingegangen am 13. Januar 1924.)

1. In einer früheren Arbeit[1]) hat der Verf. kurz angedeutet, wie die eindimensionalen Probleme der speziellen Relativitätstheorie durch einfache geometrische Darstellung mit zwei wechselseitig orthogonalen Raumzeitkoordinatensystemen anschaulich gelöst werden können. In seinem Büchlein (Elemente der Relativitätstheorie, Bern, P. Haupt, 1922) sind diese Gedanken weiter durchgeführt worden und in späteren Arbeiten[2]) auch auf den zweidimensionalen Raum und auf die Optik bewegter Körper übertragen worden; zugleich wurde eine elegantere Darstellungsart durch sogenannte reduzierte, orthogonale Koordinaten gegeben. Diese letztere Methode soll hier nochmals zusammengefaßt und verallgemeinert und auf den dreidimensionalen Raum, speziell die Probleme der Elektrodynamik bewegter Körper angewendet werden.

2. Wenn die Bewegung eines Punktes oder allgemein die raumzeitliche Änderung eines Punktereignisses in die Form (in kartesischen Koordinaten)

$$\Phi(xy) = 0, \quad X(yz) = 0, \quad \Psi(zx) = 0 \quad \text{und} \quad x = f(t)$$

gebracht werden kann, so kann dieselbe in der Zeichnungsebene vollständig durch die drei Projektionen der räumlichen Bahn und durch eine vierte Projektion in der XT-Ebene, die den vierten Quadranten ausfüllt, dargestellt werden (Fig. 1). — Diese neu eingeführte Projektionsebene sei die Unterebene genannt, die Projektionen der vierdimensionalen Weltpunkte und Weltlinien (z. B. abc) auf sie die Unterprojektionen.

In der speziellen Relativitätstheorie wird nun ein und dasselbe Punktereignis von verschiedenen Koordinatensystemen aus betrachtet, die sich mit unveränderter Geschwindigkeit gegeneinander bewegen. Wählt man, wie gewohnt, diese Bewegungen parallel zur gemeinsamen X-Achse, so kann man die vierdimensionale Weltlinie in der Regel durch ihre für jedes Koordinatensystem gleichbleibenden Projektionen auf die YZ-Ebene und auf die Unterebene (XT-Ebene)

[1]) Phys. ZS. **22**, 384, 1921.
[2]) ZS. f. Phys. **10**, 22 u. 227, 1922.

eindeutig darstellen. Man braucht nur noch diese Projektion auf der Unterebene auf die passend gewählten X- und T-Achsen der einzelnen Systeme zu projizieren, um den vollständigen raumzeitlichen Verlauf des Punktereignisses (also für alle Projektionsebenen) zu erhalten.

Stellt man sich auf den Boden der Einsteinschen Theorie und setzt die Lichtgeschwindigkeit $= 1$ bzw. mißt die Zeit durch die Variable $u = c.t$, so ist die Natur der zu wählenden Achsen X', U', X'', U'' ... gegeben durch das invariable Lichtkreuz I II (Fig. 2) (s. Relativitätstheorie, S. 22—25), welches die Weltlinien von Lichtsignalen darstellt, die vom Ursprung, $x = 0$, zur Zeit $u = 0$ in Richtung der X-Achse ausgehen. Alle zulässigen XOU-Systeme

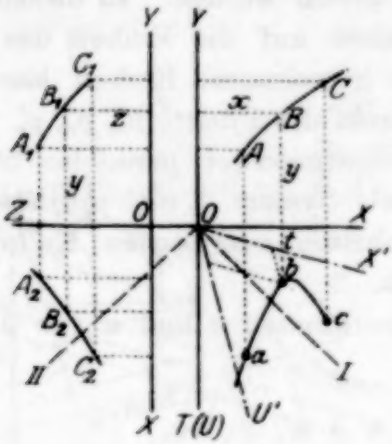


Fig. 1.

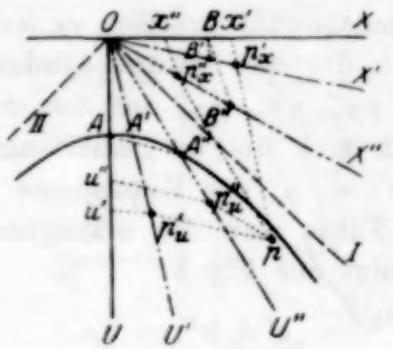


Fig. 2.

müssen zu diesem Lichtkreuz symmetrisch sein, aber ihre Einheiten variieren, sie sind durch die Abschnitte der Minkowskischen Einheitshyperbel: OA, OA' ... OB, OB' ... bestimmt [1]). — Die Parallelkoordinaten eines Punktes p der Unterebene sind je nach dem Koordinatensystem durch die Strecken Op'_x, Op''_x ... Op'_u, Op''_u ... bestimmt, aber jeweils in den zugehörigen Einheiten OA', OB', OA'' usw. Um sich von dieser Verschiedenheit los zu machen und um alle X-Abmessungen auf der gleichen X-Achse (ebenso die U-Abmessungen auf der gleichen U-Achse) zu bekommen, projiziert man (Fig. 2) die Punkte $p'_x p''_x p'_u p''_u$ auf die orthogonalen OX- und OU-Achsen (die den Winkel des Lichtkreuzes halbieren), und zwar jeweilen parallel zu den die Einheitspunkte A', A'' ... bzw. B', B'' ... mit A bzw. B verbindenden Geraden, also $p'_x x' \parallel BB'$, $p''_x x'' \parallel BB''$, $p'_u u' \parallel AA'$, $p''_u u'' \parallel AA''$ usw. —

[1]) Für die von D. Joss dafür gegebene Konstruktion, s. ZS. f. Phys. **10**, 230, 1922.

Dadurch sind die Koordinaten x', x''... und die Zeiten u' u''... ein und desselben vierdimensionalen Weltpunktes für die verschiedenen Koordinatensysteme auf denselben orthogonalen X- und U-Achsen angegeben, und es kann unter Beiziehung der unveränderten $y' = y'' = \cdots$ und $z' = z'' = \cdots$ die Projektion der Bahn in der XY- und YZ Ebene (Fig. 1) konstruiert werden.

3. Wesentlich einfacher werden die Konstruktionen für den meist gebräuchlichen Fall, daß nur zwei Koordinatensysteme miteinander verglichen werden, die sich mit der konstanten Geschwindigkeit $v = \beta . c$ längs der X-Achse aneinander vorüber bewegen [1]). Dann wird man passend die Achsen OX' und OX'' symmetrisch zu OX, und OU' und OU'' symmetrisch zu OU wählen (Fig. 3), weil dadurch die Einheiten aller vier Achsen gleich werden. In diesem Falle ist es nicht mehr nötig diese Einheiten auf die Einheit des orthogonalen Systems zu reduzieren; die gemeinsame Einheit kann willkürlich gewählt werden, es werden direkt die Punkte p'_x, p''_x, p'_u und p''_u durch die den entsprechenden Koordinatenachsen parallelen Strahlen pp'_x, pp''_x, pp'_u, pp''_u auf das orthogonale System XOU projiziert, wodurch sich die in gemeinsamen Einheiten gemessenen Koordinaten x', x'', u', u'' der Unterebene ergeben.

Führt man die orthogonalen Koordinaten x und u von p ein [2]), so folgt aus Fig. 3:

$$x' + x'' = 2x, \qquad u' + u'' = 2u,$$
$$x' - x'' = 2u . \operatorname{tg}\psi, \qquad u' - u'' = 2x . \operatorname{tg}\psi,$$

also

$$(x' + x'') \sin\psi = (u' - u'') \cos\psi,$$
$$(x' - x'') \cos\psi = (u' + u'') \sin\psi,$$

woraus, wenn

$$\sin 2\psi = \beta, \quad \cos 2\psi = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

---

[1]) Während in den früheren Arbeiten Einsteins das Verhältnis v/c mit α und $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}$ gesetzt wurde, ist es nun gebräuchlich $v/c = \beta$ zu setzen, wobei wir dann $\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ setzen. Gegenüber unseren früheren Arbeiten ist also überall β mit α zu vertauschen.

[2]) Es liegt nahe, nach dem Vorbilde von Guillaume die Koordinaten x und u des orthogonalen Systems als universelle Koordinaten für die zwei verglichenen Systeme einzuführen. Allein sobald mehr als zwei Systeme betrachtet werden, fällt natürlich der absolute Charakter jener Koordinaten dahin, wie aus Fig. 2 sofort ersichtlich ist; sie haben also keinerlei universelle physikalische Bedeutung.

gesetzt wird, folgt:

$$x' = \alpha(x'' + \beta u'')$$

und ebenso:

$$u' = \alpha(u'' + \beta x''), \quad x'' = \alpha(x' - \beta u'), \quad u'' = \alpha(u' - \beta x'),$$

d. h. es bestätigt sich die Gültigkeit der Lorentz-Einsteinschen Transformationsformeln für unsere Konstruktion. Der Winkel $\varphi = 2\psi$ ist durch $\sin 2\psi = v/c$ bestimmt und kann leicht konstruiert werden [1]).

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß in dieser neuen geometrischen Darstellungsweise der Unterebene nach Fig. 3 der Vorteil darin liegt, daß jedes einzelne Bezugssystem $OX'U'$ und $OX''U''$ durch je zwei Scharen paralleler Geraden: $u' =$ konst., $x' =$ konst. und $u'' =$ konst., $x'' =$ konst., die wechselseitig orthogonal sind, bestimmt ist, und daß diese Geraden durch ihre Schnitt-

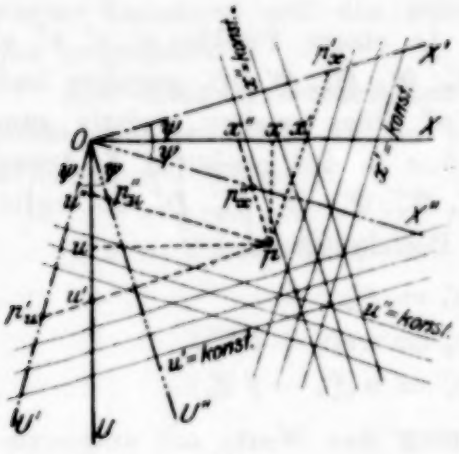


Fig. 3.

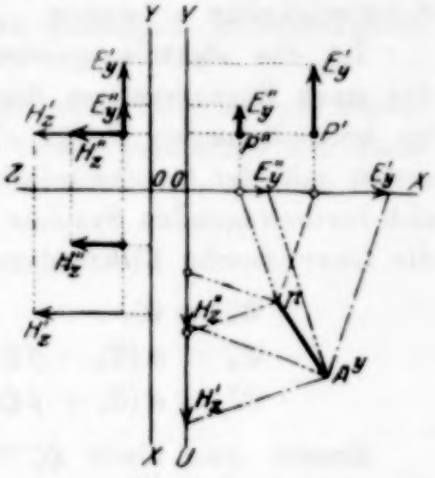


Fig. 4.

punkte mit den Achsen des orthogonalen Symmetrieachsensystems OXU direkt die Koordinaten u', x', u'', x'' der Unterebene in ein und derselben Einheit bestimmen. Sinngemäß wird man die Geraden $u' =$ konst. und $u'' =$ konst. als Zeitgerade, die Geraden $x' =$ konst. und $x'' =$ konst. als Raumgerade bezeichnen, obgleich auf den letzteren nicht der ganze Raum, sondern nur die x-Koordinaten konstant bleiben.

Gibt demnach die Konstruktion der Fig. 3 sofort die Koordinaten x und u eines Weltpunktes, so gibt sie in ganz entsprechender Weise auch die kontravarianten Komponenten nach X und nach T für irgend einen Vierervektor (Tensor ersten Ranges), sie gestattet also die verhältnismäßig einfache Konstruktion der Probleme der

[1]) ZS. f. Phys. **10**, 233, 1922.

Kinematik und der Optik bewegter Körper (s. die oben erwähnten Arbeiten).

4. Um die Gesetze der Elektrodynamik bewegter Körper nach den gleichen Methoden graphisch darzustellen, bedarf es der Anwendnng dieser Methoden auf vierdimensionale Tensoren zweiten Ranges. In einfacher Weise kann dies nur für den antisymmetrischen Tensor, den sogenannten Sechservektor, durchgeführt werden; da die sechs Komponenten des elektromagnetischen Feldes mit den kontravarianten Komponenten eines solchen Sechservektors identifiziert werden können ($\mathfrak{E}_x = A^{ux}$, $\mathfrak{E}_y = A^{uy}$, $\mathfrak{E}_z = A^{uz}$, $\mathfrak{H}_x = A^{yz}$, $\mathfrak{H}_y = A^{zx}$, $\mathfrak{H}_z = A^{xy}$), so genügt dies zur Behandlung des elektromagnetischen Feldes. Es ist deshalb auch nicht nötig, hier die allgemeinen Ausdrücke für die Komponententransformation des Sechservektors anzugeben, obgleich sie keine grundsätzlichen Schwierigkeiten aufweisen.

Ist das elektromagnetische Feld in einem Punkte x', y', z', u' des einen Bezugssystems durch $\mathfrak{E}'_x$, $\mathfrak{E}'_y$, $\mathfrak{E}'_z$, $\mathfrak{H}'_x$, $\mathfrak{H}'_y$, $\mathfrak{H}'_z$ gegeben und im koinzidierenden Punkt x'', y'', z'', u'' eines zweiten, relativ zum ersten mit der Geschwindigkeit $v = \beta . c$ in der positiven X-Achse sich fortbewegenden Systems durch $\mathfrak{E}''_x$, $\mathfrak{E}''_y$, $\mathfrak{E}''_z$, $\mathfrak{H}''_x$, $\mathfrak{H}''_y$, $\mathfrak{H}''_z$, so ergibt die Lorentzsche Elektrodynamik die Beziehungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}''_x &= \mathfrak{E}'_x, & \mathfrak{H}''_x &= \mathfrak{H}'_x, \\ \mathfrak{E}''_y &= \alpha(\mathfrak{E}'_y - \beta\mathfrak{H}'_z), & \mathfrak{H}''_y &= \alpha(\mathfrak{H}'_y + \beta\mathfrak{E}'_z), \\ \mathfrak{E}''_z &= \alpha(\mathfrak{E}'_z + \beta\mathfrak{H}'_y), & \mathfrak{H}''_z &= \alpha(\mathfrak{H}'_z - \beta\mathfrak{E}'_y). \end{aligned}$$

Ersetzt man hierin $\mathfrak{H}'_y$ und $\mathfrak{H}''_y$ durch ihre Werte mit entgegengesetztem Vorzeichen und vereinigt die zweite mit der sechsten und die dritte mit der vierten Gleichung, so gelten für die Wertepaare: $\mathfrak{E}_y$ und $\mathfrak{H}_z$, und $\mathfrak{E}_z$ und $-\mathfrak{H}_y$, die Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}''_y &= \alpha(\mathfrak{E}'_y - \beta\mathfrak{H}'_z), & \mathfrak{E}''_z &= \alpha(\mathfrak{E}'_z - \beta(-\mathfrak{H}'_y)), \\ \mathfrak{H}''_z &= \alpha(\mathfrak{H}'_z - \beta\mathfrak{E}'_y), & (-\mathfrak{H}''_y) &= \alpha((-\mathfrak{H}'_y) - \beta\mathfrak{E}'_z), \end{aligned}$$

die genau den Transformationsformeln:

$$x'' = \alpha(x' - \beta u'), \quad u'' = \alpha(u' - \beta x')$$

entsprechen. Dies bedeutet aber, daß $\mathfrak{E}'_y$ und $\mathfrak{H}'_z$ bzw. $\mathfrak{E}''_y$ und $\mathfrak{H}''_z$ als x- und u-Komponenten eines in der Unterebene liegenden Vektors A^y, ebenso $\mathfrak{E}'_z$ und $-\mathfrak{H}''_y$ bzw. $\mathfrak{E}''_z$ und $-\mathfrak{H}''_y$ als x- und u-Komponenten eines in der Unterebene liegenden Vektors A^z erhalten werden können. Sind also diese vier Komponenten in dem einen Bezugssystem gegeben, so lassen sich die zwei Vektoren A^y und A^z konstruieren und daraus die entsprechenden Komponenten im anderen System finden.

In Verbindung mit den sich nicht verändernden Komponenten $\mathfrak{E}_x$ und $\mathfrak{H}_x$ sind dann die Feldstärken in beiden Systemen völlig bestimmt.

Um die Zeichnung nicht zu überladen, geben wir in Fig. 4 nur einen einfachen Spezialfall: Es bewege sich eine linear polarisierte elektromagnetische Welle parallel zur X-Achse, so daß die elektrische Feldstärke parallel zur Y-Achse, die magnetische parallel zur Z-Achse gerichtet sei. Es ist dann $\mathfrak{E}'_y$ und $\mathfrak{H}'_z$ gegeben, während

$$\mathfrak{E}'_x = \mathfrak{E}'_z = \mathfrak{H}'_x = \mathfrak{H}'_y = 0;$$

es wird dann auch

$$\mathfrak{E}''_x = \mathfrak{E}''_z = \mathfrak{H}''_z = \mathfrak{H}''_y = 0,$$

und die Konstruktion ist nur für $\mathfrak{E}''_y$ und $\mathfrak{H}''_z$ erforderlich. Diese beiden ergeben sich unmittelbar aus dem von $\mathfrak{E}'_y$ und $\mathfrak{H}'_z$ gebildeten Vektor A^ν (Fig. 4). Es hat keine Schwierigkeiten, diese Konstruktion auf beliebige Fälle zu erweitern und dadurch irgend ein Feld bewegter Ladungen auf das Feld ruhender Ladungen zurückzuführen und umgekehrt.

Alle diese Konstruktionen sind auch vom didaktischen Standpunkte aus wertvoll, da sie wesentlich zum Verständnis der Relativitätstheorie beitragen.

Bern, Januar 1924

Über die Bildung von Jodwasserstoff durch stille Entladungen.

Von **E. Warburg** in Charlottenburg.

(Eingegangen am 16. Januar 1924.)

1. Zur Aufklärung der Vorgänge bei der chemischen Wirkung stiller Entladungen sind quantitative Versuche erforderlich, durch welche der Betrag der chemischen Wirkung in seiner Abhängigkeit von den physikalischen Bedingungen gemessen wird. Nur wenige Fälle sind in dieser Weise untersucht (s. § 10); als weiteres Beispiel habe ich die Bildung von JH aus J_2 und H_2 gewählt. Dabei wurde ein mit Joddampf beladener Wasserstoffstrom durch eine Siemenssche Röhre geleitet und das Verhältnis des gebildeten JH zu dem in das Rohr eintretenden J_2 in Abhängigkeit vom Dampfdruck des Jods, von der Geschwindigkeit des Gasstromes sowie von der angelegten Spannung und der Stromstärke gemessen.

2. Das Siemenssche Rohr hatte eine Dicke des Entladungsraumes von 1,54 mm und eine wirksame Länge von 138 mm. Es befand sich nebst einem U-förmigen, reines Jod enthaltenden Rohr von 10 cm Schenkellänge in einem stark gerührten Wasserbade, welches durch untergesetzte Flammen auf konstanter Temperatur gehalten wurde. Ein Strom von Wasserstoff aus chemisch reinem Zink und verdünnter Chlorwasserstoffsäure gelangte über Vorlagen von NaOH, $KMnO_3$, P_2O_5 in die Jodvorlage, alsdann in die Siemenssche Röhre und von dort in zwei außerhalb des Bades befindliche Absorptionsröhren, von denen die erste mit Wasser, die zweite mit KJ-Lösung beschickt war; jene nahm den gebildeten JH und einen Teil des unzersetzten Jods, diese den Rest des Jods auf. Aus dem KJ-Rohr trat das Gas über ein Kapillarrohr in eine $5^1/_2$ Liter haltende Flasche, die zu Anfang des Versuches ganz mit Wasser gefüllt war; indem man dieses durch einen Heber entleerte, saugte man das Gas mit regulierbarer Geschwindigkeit durch die Apparatur hindurch. Die momentane Geschwindigkeit wurde nach dem durch ein Wassermanometer gemessenen Druckabfall in dem Kapillarrohr beurteilt. Den Wechselstrom von der Frequenz 50 für das Siemenssche Rohr lieferte ein Transformator, gemessen wurde wie bei früheren Versuchen die effektive Stärke der Grundschwingung der Frequenz 50, indem man den Effektivwert der Spannung an den Enden eines in die Erdleitung

der Röhre geschalteten Widerstandes R an einem Multizellularelektrometer beobachtete und dabei die Oberschwingungen durch eine zu R parallel geschaltete Kapazität von 0,1 bis 0,2 μF von R abhielt[1]).

3. Nachdem der Strom eine passende Zeit lang gewirkt hat, mißt man die Jodmenge in den Absorptionsgefäßen, in dem Siemensschen Rohr und der aus ihm herausführenden Röhre durch Titrieren mit $n/100$ $Na_2S_2O_3$-Lösung, in dem mit Wasser beschickten Absorptionsgefäß ohne Stärkezusatz und ohne Ansäuern; für die Jodmessung genügt das Ansäuern durch den gebildeten JH; α Mol J seien im ganzen gefunden. Hierbei ist das Wasser in dem ersten Absorptionsgefäß entfärbt worden und dessen Gehalt an JH wird durch Titrieren mit einer $n/100$ CO_2-freien Lösung von NaOH unter Anwendung von Methylorange als Indikator bestimmt. 1 cm³ der Lösung entspricht 10^{-5} Mol JH; β Mol JH seien gefunden. Im ganzen sind also $\alpha + \beta$ Mol J in das Siemenssche Rohr eingetreten und davon β Mol in JH verwandelt, man erhält

$$x = \frac{\beta}{\alpha + \beta}. \tag{1}$$

Die mittlere Geschwindigkeit des Gasstromes in dem Siemensschen Rohr betrage v cm³/Minute. V cm³ sei das in der Flasche während der Versuchsdauer von t Minuten aufgefangene Gasvolumen, welches dem ausgeflossenen Wasservolumen gleich ist; p, θ Druck und Temperatur des Gases in der Flasche, p', θ_1 Druck und Temperatur in dem Siemensschen Rohr. Dann ist

$$v = \frac{V}{t} \cdot \frac{p}{p'} \cdot \frac{1 + \alpha\theta_1}{1 + \alpha\theta}, \tag{2}$$

und es sei

$$i = \frac{I \cdot 10^5}{v}, \tag{3}$$

wo I die Stromstärke in Ampere. p_1 sei der Dampfdruck des J_2 in dem Siemensschen Rohr. Es ist

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = V \cdot \frac{p}{p'} \cdot \frac{1 + \alpha\theta_1}{1 + \alpha\theta} \cdot \frac{1}{22410} \cdot \frac{p_1}{760} \cdot \frac{1}{1 + \alpha\theta_1},$$

woraus

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha + \beta}{V} \cdot \frac{p'}{p} (1 + \alpha\theta) \cdot 760 \cdot 22410. \tag{4}$$

4. Ergebnisse. Es wurden bei drei Temperaturen θ_1 des Wasserbades, nämlich bei Zimmertemperatur, bei 30° und bei 40°, Beobachtungen angestellt. Die nach (4) berechneten Dampfdrucke des

[1]) E. Warburg, ZS. f. techn. Phys. 4, 450, 1923.

Jods ergeben sich etwas kleiner als nach den Messungen von Baxter und Genossen[1]) nämlich

θ_1	p_1	Nach Baxter und Genossen
19°62	0,173	0,211
30°	0,425	0,469
40°	0,947	1,025

Für Dampfdruckmessungen des Jods, die ich nicht beabsichtigte, ist es offenbar nicht vorteilhaft, den größten Teil des Jods, wie es hier geschehen mußte, als JH zu messen.

5. Aus den Versuchen geht hervor, daß x, d. h. der Bruchteil des in das Siemenssche Rohr eintretenden J, der in JH verwandelt wird, mit wachsender Stromstärke und abnehmender Geschwindigkeit des Gasstromes, also mit wachsendem i (Gleichung 3) wächst, aber bei einem Grenzwert kleiner als 1, ungefähr 90 Proz., stehen bleibt. Hieraus folgt, daß der Strom nicht nur JH bildend, sondern auch JH zersetzend wirkt und daß der erwähnte Grenzwert von x dann eintritt, wenn beide Wirkungen sich kompensieren. Um sie voneinander zu trennen, ist es nötig, den Vorgang theoretisch zu verfolgen.

6. Die Ozonbildung im Siemensschen Rohr zeigt, daß die stille Entladung O_2 in $O + O$ spaltet. Da die Wärmetönung bei der Reaktion $O + O = O_2$ größer ist als bei der Reaktion $H + H = H_2$, so ist anzunehmen, daß H_2 leichter als O_2 durch den Strom gespalten wird. Ferner bedenkend, daß der Dampfdruck des Jods bei den Versuchen höchstens wenig größer als 1 Prom. des Gesamtdruckes war, nehme ich als primäre Wirkung des Stromes die Reaktion $H_2 = H + H$ an und betrachte die JH-Bildung als sekundäre Reaktionen, $H + J_2 = JH + J$ und $J + H = JH$. Setzt man so reichliche H-Bildung voraus, daß um so mehr H-Atome zur JH-Bildung gelangen, als J_2-Molekeln vorhanden sind, so ist die einfachste Annahme, daß die JH-Bildung der J_2-Konzentration proportional ist. Diese Annahme will ich machen und die weitere hinzufügen, daß die JH-Zersetzung der JH-Konzentration proportional ist. Diese Annahmen führen auf den Ansatz

$$\frac{\partial (q\,dx.c')}{\partial t} = \frac{\partial (q\,dx.c')}{\partial x}\,w = a \cdot c_2 \cdot \frac{I\,dx}{l} - bc' \cdot \frac{I\,dx}{l}. \qquad (5)$$

[1]) G. P. Baxter, Ch. H. Hickey, W. Ch. Holmes, Journ. Amer. Chem. Soc. **30**, 127, 1907.

Hierbei ist die z-Achse in die Achse des Siemensrohres gelegt, q ist der Querschnitt des Entladungsraumes, l dessen Länge, c' die molekulare Konzentration des JH, c_2 die des J_2, w die Geschwindigkeit des Gasstromes in Zentimeter/Minute. Die Gleichung (5) besagt, daß die pro Minute in dem Raumelement $q\,dz$ gebildeten und zerstörten Mol JH dem Strom durch dasselbe und bzw. den molekularen Konzentrationen des J_2 und des JH proportional sind. Sei c_2^0 die molekulare Konzentration des J_2 beim Eintritt in das Siemensrohr ($z = 0$), c_1' die molekulare Konzentration des JH beim Austritt aus demselben ($z = l$), bedenkt man ferner, daß

$$2\,c_2^0 = 2\,c_2 + c', \tag{6}$$

$$w \,.\, q = v, \tag{7}$$

so entsteht

$$\frac{\partial\, c'}{\partial\, z} = \frac{I}{l \,.\, v}\left(a c_2^0 - \left(\frac{1}{2}a + b\right).c'\right), \tag{8}$$

woraus durch Integration unter den Bedingungen $z = 0$ $c' = 0$ und $z = l$ $c' = c_1'$

$$c_1' = \frac{a}{b + \frac{1}{2}a} \cdot c_2^0 \left(1 - e^{-\frac{I}{v}\left(b + \frac{1}{2}a\right)}\right).$$

Nach (1) ist $x = c_1'/2\,c_2^0$. Setzt man noch

$$\lambda = \left(b + \frac{1}{2}a\right).10^{-5}, \tag{9}$$

$$x_0 = \frac{\frac{1}{2}a}{b + \frac{1}{2}a}, \tag{10}$$

so ensteht mit Rücksicht auf (3)

$$x = x_0\,(1 - e^{-i\,.\,\lambda}), \tag{11}$$

x_0 ist der oben erwähnte Grenzwert, dem x mit wachsendem i zustrebt. Aus einer Versuchsreihe, durch welche x als Funktion von i bestimmt ist, kann man x_0 und λ und aus diesen Werten a und b berechnen, indem sich aus (9) und (10) ergibt

$$\frac{b}{a} = \frac{1 - x_0}{2\,x_0} \tag{12}$$

$$a = 2\,x_0\,\lambda \,.\, 10^5. \tag{13}$$

Soweit diese Theorie zutrifft, ist die beabsichtigte Trennung der JH bildenden und zerstörenden Wirkung vollzogen, jene wird durch die Konstante a, diese durch die Konstante b gekennzeichnet. (5) läßt sich schreiben, wenn $c' = 0$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial\,(V c')}{\partial\, t_{(c' = 0)}} = a c_2\, I.$$

Hieraus folgt, daß, indem v in cm³/Minute, I in Ampere ausgedrückt ist,

$$Q = a c_2^0/60 = 10^5 . x_0 . \lambda . c_2^0/30 \qquad (14)$$

Mol JH in dem Rohr beim Durchgang von 1 Cb durch dasselbe gebildet werden, wenn c_2^0 Mol J_2 sich im Kubikzentimeter befinden.

7. Die folgende Tabelle 1 enthält das Beobachtungsmaterial. R ist der in die Erdleitung der Röhre eingeschaltete Widerstand, E die Spannung zwischen den Elektroden des Siemensrohres unter Berücksichtigung des Spannungsabfalls in R. Unter J stehen die unverwandelt gebliebenen Mol J (α), unter JH die gebildeten Mol JH (β).

Tabelle 1.

Nr.	Datum	R	E	$I . 10^3$	v cm³/Min.	i	t Min.	$J . 10^5$	$JH . 10^5$	x	p_1
					$\theta_1 = 19^0\,6.$						
1	7. 6. 21	110000	9760	1,27	264	0,481	15	0,80	6,79	0,895	0,174
2	8. 6. 21	160000	6480	0,821	239	0,344	16	0,74	6,70	0,901	0,177
3	8. 6. 21	160000	6390	0,764	213	0,359	17	0,62	6,19	0,909	0,168
										Mittel	0,173
					$\theta_1 = 30^0.$						
4	5. 9. 21	393520	4600	0,277	247	0,112	17	8,92	9,89	0,526	0,424
5	6. 9. 21	393520	4600	0,327	235	0,139	18	6,77	12,25	0,644	0,425
6	3. 9. 21	393520	4600	0,301	203	0,148	21	6,75	13,20	0,662	0,443
7	6. 10. 21	333520	4600	0,394	103	0,383	39	2,76	15,27	0,847	0,424
8	4. 10. 21	150000	5920	0,852	229	0,372	18	3,20	15,10	0,825	0,419
9	7. 9. 21	100000	9530	0,900	228	0,394	18	2,40	15,90	0,869	0,422
10	8. 9. 21	100000	9530	0,890	218	0,412	19	2,26	16,22	0,878	0,421
										Mittel	0,425
					$\theta_1 = 40^0.$						
11	2. 9. 21	393520	4530	0,304	231	0,133	18	26,78	12,32	0,315	0,920
12	7. 7. 21	233520	4530	0,494	311	0,159	13	29,03	11,10	0,277	0,971
13	10. 10. 21	233520	4530	0,586	260	0,225	16	34,89	12,30	0,261	1,104
14	6. 7. 21	233520	4530	0,560	230	0,243	19	26,34	14,68	0,358	0,918
15	12. 10. 21	233520	4530	0,721	287	0,251	15	28,02	11,63	0,293	0,923
16	4. 7. 21	233520	4530	0,469	104	0,451	38	14,29	25,11	0,637	0,973
17	8. 7. 21	160000	6400	0,582	302	0,193	13	19,55	18,59	0,487	0,948
18	1. 9. 21	160000	6400	0,703	217	0,323	20	13,87	25,42	0,647	0,931
19	30. 6. 21	160000	6400	0,719	190	0,378	21	13,03	25,40	0,661	0,938
20	1. 7. 21	160000	6400	0,682	157	0,434	25	8,77	28,44	0,764	0,925
21	9. 9. 21	100000	9600	0,889	238	0,374	17	9,43	29,34	0,757	0,936
22	27. 6. 21	100000	9600	1,14	298	0,382	13,8	7,90	30,52	0,794	0,914
23	28. 6. 21	100000	9600	1,03	195	0,530	22	6,05	36,40	0,857	0,966
24	29. 6. 21	100000	9600	0,989	177	0,558	24	5,66	35,70	0,863	0,948
25	12. 9. 21	100000	9600	0,922	80,7	1,143	50	4,57	32,52	0,877	0,897
										Mittel	0,947

Die Versuche lassen manches zu wünschen übrig. Mit wachsendem i sollte x stets zunehmen, was bei Nr. 12 bis 16 nicht immer der Fall ist. Auch fällt das Schwanken der Stromstärke bei gleicher Spannung auf.

8. Die Messungen bei $\theta_1 = 19^{0}6$ mit einem Joddampfdruck von 0,173 mm Hg eignen sich nicht für die Anwendung der Theorie, da der Grenzwert x_0 von x (ungefähr 0,9) hier überall bereits erreicht ist (Nr. 1 bis 3). Wir werden auch für die beiden höheren Temperaturen θ_1 diesen Grenzwert annehmen, von welchem Nr. 10 ($\theta_1 = 30^{0}$) und Nr. 25 ($\theta_1 = 40^{0}$) nicht weit abliegen; übrigens kommt auf den genauen Wert von x_1 nicht viel an. Aus (4) folgt mit $x_0 = 0{,}9$

$$\frac{b}{a} = 0{,}056,$$

d. h. daß bei irgend einer molekularen Konzentration des J_2 18 mal so viele J H-Molekeln gebildet, als bei derselben molekularen Konzentration des J H zerstört werden.

9. Die folgende Tabelle enthält die Berechnung der Versuche Nr. 4 bis 7, 11 bis 16, 17 bis 20, 21 bis 24 nach der Theorie des § 6, nämlich die aus (11) folgenden Werte von $\lambda = -\dfrac{\log\left(1-\dfrac{x}{x_0}\right)}{i \log e}$ und die aus den Mittelwerten von λ rückwärts berechneten Werte von x/x_0. Benutzt man bei der Berechnung von λ für jede Reihe die Mittelwerte von I, so erhält man beinahe dieselben Mittelwerte für λ.

Tabelle 2.

Nr.	i	λ	x/x_0 ber.	x/x_0 beob.	Nr.	i	λ	x/x_0 ber.	x/x_0 beob.
	$\theta_1 = 30^{0}$ $E = 4600$					$\theta_1 = 40^{0}$ $E = 6400$			
4	0,112	7,84	0,606	0,584	17	0,193	4,03	0,533	0,541
5	0,139	7,06	0,685	0,716	18	0,323	3,93	0,720	0,719
6	0,148	8,99	0,708	0,736	19	0,378	3,50	0,775	0,734
7	0,383	8,49	0,959	0,941	20	0,434	4,31	0,822	0,849
	Mittel	8,32				Mittel	3,34		
	$\theta_1 = 40^{0}$ $E = 4530$					$\theta_1 = 40^{0}$ $E = 9600$			
11	0,133	3,24	0,260	0,350	21	0,374	4,90	0,871	0,841
12	0,159	2,39	0,294	0,308	22	0,382	5,59	0,876	0,882
13	0,225	1,53	0,399	0,290	23	0,530	5,73	0,945	0,952
14	0,243	2,08	0,423	0,398	24	0,558	5,71	0,953	0,959
15	0,251	1,57	0,434	0,326		Mittel	5,48		
16	0,451	2,73	0,638	0,708					
	Mittel	2,26							

Die Schwankungen in den Werten von λ, welche für jede einzelne Reihe konstant sein sollten, sind teilweise, besonders bei Nr. 11 bis 16, groß, entsprechend die Abweichungen zwischen den berechneten und beobachteten Werten von x/x_0; doch zeigt sich kein Gang in diesen Abweichungen.

10. Nach (13) ist $a = 2 x_0 \lambda 10^6 \frac{\text{cm}^3}{\text{Amp./Min.}} = \frac{1}{30} \cdot x_0 \lambda \cdot 10^6 \frac{\text{cm}^3}{\text{Cb}}$

und mit $x_0 = 0{,}9$

$$a = 3 \lambda . 10^3 . \frac{\text{cm}^3}{\text{Cb}} . \tag{15}$$

Nach (14)

$$Q = 3 \lambda c_2^0 . 10^3 \frac{\text{Mol}}{\text{Cb}} . \tag{16}$$

Ferner ist

$$c_2^0 = \frac{p_1}{760} \cdot \frac{1}{1 + \alpha \theta_1} \cdot \frac{1}{22410} \frac{\text{Mol}}{\text{cm}^3} . \tag{17}$$

Nach diesen Formeln ist die folgende Tabelle berechnet.

Tabelle 3.

E	$I . 10^3$	λ	a	$Q \cdot 10^4$
$\theta_1 = 30^0$		$p_1 = 0{,}425$	$c_2^0 = 2{,}25 . 10^{-8}$	
4600	0,325	8,32	$24{,}96 . 10^3$	5,62
$\theta_1 = 40^0$		$p_1 = 0{,}947$	$c_2^0 = 4{,}86 . 10^{-8}$	
4530	0,522	2,26	$6{,}78 . 10^3$	3,30
6400	0,672	3,94	$11{,}82 . 10^3$	4,63
9600	0,994	5,48	$16{,}44 . 10^3$	9,01

a bzw. Q nehmen mit wachsender Stromstärke bzw. Spannung bedeutend zu, weit mehr als im Fall der Ozonbildung.

Mit diesen Ergebnissen mögen diejenigen verglichen werden, welche man über die Wirkung der stillen Entladung auf andere Gase in Siemensschen Röhren erhalten hat[1]). In der Tabelle 4 bedeutet j die Stromdichte im Entladungsraum, dessen Oberfläche bei den Versuchen dieses Aufsatzes $52 . 10^{-4}$ m² betrug.

Tabelle 4.

Wirkung	d (mm)	j Amp./m²	$Q . 10^4$ Mol/Cb
JH-Bildung[2])	1,54	0,100	3,30
		0,129	4,63
		0,191	9,01
O_2-Spaltung bei O_3-Bildung	1,4	0,134	15,5
NH_3-Spaltung	2,0	0,081	4,23
CO_2-Spaltung	2,3	0,084	4,42

[1]) E. Warburg, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektron. **6**, 219, 1909.

[2]) Wenn man, den Auschauungen des § 5 folgend, Q auf die H_2-Spaltung bezöge, so wären die für JH gegebenen Werte von Q zu halbieren.

Die beim Durchgang von 1 Cb durch das Gas zersetzten Mol sind also überall von der gleichen Größenordnung. Dieses beachtenswerte Ergebnis ermutigt zu einigen theoretischen Betrachtungen.

11. Wenn man von der Annahme ausgeht, daß die chemische Wirkung der stillen Entladung von dem Stoß der Ionen auf die Gasmolekeln herrührt, so führt jenes Ergebnis auf die Frage, wieviel Stöße S zwischen Ionen und Gasmolekeln erfolgen, während 1 Cb durch das Gas geht. Wir nehmen dabei eine Platte vom Querschnitt f und von der Dicke d an. Die Stromstärke ist

$$\Gamma = f(u_a n_a + u_k n_k) \cdot e_{e.st} \cdot 10/c \frac{\text{Cb}}{\text{sec}}. \tag{18}$$

Die Ladung der Ionen ist hier gleich dem elektrischen Elementarquantum gesetzt, u, n sind bzw. Geschwindigkeit der Ionen und ihre Zahl im Kubikzentimeter, c ist die Lichtgeschwindigkeit. Die Zahl der Zusammenstöße von Anionen und Kationen mit Gasmolekeln in der Zeit, in welcher 1 Cb durch das Gas geht, sei bzw. S_a und S_k, es ist

$$\left.\begin{aligned} S_a &= \frac{n_a \cdot v_a/l_a}{1} \cdot V, \\ S_k &= \frac{n_k \cdot v_k/l_k}{1} \cdot V, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

wo l die mittlere Weglänge, v die mittlere Agitationsgeschwindigkeit der Ionen in cm/sec und n_a, n_k Mittelwerte bedeuten. Es ist $e_{e.st} = 4{,}74 \cdot 10^{-10}$, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/sec und $V = f \cdot d$. Bei unserer Unkenntnis der Vorgänge bei der selbständigen elektrischen Entladung in Gasen kann es sich nur um Schätzungen handeln. Wir wollen daher annehmen — was keineswegs überall in dem stromdurchflossenen Gase stattfindet, daß $n_a = n_k$. Damit ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} S_a &= 6{,}33 \cdot 10^{18} \cdot d \cdot \frac{v_a/l_a}{u_a + u_k}, \\ S_k &= 6{,}33 \cdot 10^{18} \cdot d \cdot \frac{v_k/l_k}{u_a + u_k}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Ferner wollen wir die Annahme machen, daß die Anionen Elektronen sind und daß die Gasmolekeln durch Elektronenstoß ionisiert, aber nicht chemisch in Atome gespalten werden, daß letzteres vielmehr nur durch die Stöße der Kationen bewirkt wird, welchen wir dieselbe Maße und dieselbe Weglänge wie den Gasmolekeln beilegen; jene Annahme wird im besten Fall nur annäherungsweise zutreffen.

Die Ionen erlangen ihre Geschwindigkeiten u in der Feldrichtung auf den freien Wegen. Ist E_d die auf den Entladungsraum wirkende

Spannung, so entfällt auf die Enden des freien Weges die Spannung $E_d \cdot l/d$, und setzt man u im Anfang des freien Weges gleich Null, so wird $1/2 \cdot m u^2 = E_d l \cdot e/d$ oder

$$u^2 = 2 E_d \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{e}{m}, \tag{21}$$

wo m die Masse der Ionen. Setzen wir beispielsweise $E_d = 5000$ Volt $= 5 \cdot 10^{11}$, $d = 0{,}2$ cm, so wird

$$u^2 = 5 \cdot 10^{12} \cdot l \cdot \frac{e}{m}. \tag{22}$$

Indem es sich um Sauerstoff von Atmosphärendruck handeln soll, setzen wir für die Gasmolekeln $l = 10^{-5}$ cm. Für Elektronen ist $e/m = 1{,}76 \cdot 10^7$, $l = 4\sqrt{2} \cdot 10^{-5}$, und man erhält

$$u_a = 7{,}06 \cdot 10^7 \text{ cm/sec}, \tag{23}$$

für die Kationen des Sauerstoffs ist $e/m = 1{,}76 \cdot 10^7/1849 \cdot 32$, $l = 10^{-5}$, und man erhält

$$u_k = 1{,}22 \cdot 10^{-5} \text{ cm/sec}, \tag{24}$$

u_k ist beinahe dreimal so groß als die thermische Agitationsgeschwindigkeit der Sauerstoffmolekeln bei der Zimmertemperatur ($44 \cdot 10^3$ cm/sec). Obgleich also v_k möglicherweise größer ist als dieser Wert, so wollen wir ihn doch für die beabsichtigte Schätzung beibehalten. Mit $v_k = 44 \cdot 10^3$, $l_k = 10^{-5}$, und indem u_k gegen u_a zu vernachlässigen ist, ergibt sich aus (20)

$$S_k = 7{,}9 \cdot 10^{19}. \tag{25}$$

Während nun 1 Cb durch das Gas hindurchgeht, werden nach Tabelle 4 $15{,}5 \cdot 10^{-4}$ Mol oder $15{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot 6{,}1 \cdot 10^{23} = 92 \cdot 10^{19}$ Molekeln O_2 gespalten, was mit S_k der Größenordnung nach übereinstimmt.

Selbstverständlich ist diesen auf teilweise willkürlichen und ungenauen Annahmen beruhenden Betrachtungen nur orientierende Bedeutung beizulegen.

Die Versuche habe ich in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt als Gast derselben ausgeführt.

Im Januar 1924.

Autorenregister.

Baeyer, O. v. und Kutzner, W. Versuche mit der Glimmlampe als Zählkammer. S. 46.

Becker, A. Über die Präzisionsmessung der Radiumemanation. S. 304.

Bingel, J. Über lichtelektrische Wirkung in Steinsalzkristallen. S. 229.

Bokowski, Adalbert. Über die Energiekomponenten in Hilberts Theorie der Materie. S. 299.

Bräuer, Ernst Wasa. Zur Axiomatik der Physik. S. 138.

Bratke, E. Über die Waetzmannsche Interferenzmethode zur Untersuchung optischer Systeme. (I. Teil.) S. 9.

— Interferenzmethode zur Bestimmung von Brennweiten optischer Systeme. S. 120.

Braunbek, Werner. Kraft und Feld an der Kathode einer elektrischen Glimmentladung. S. 204.

Burger, H. C. s. Ornstein.

Deodhar, G. B. Über die Änderungen des Torsionsmoduls eines Eurekadrahtes durch Ziehen. S. 247.

Dolejšek, V. Bemerkungen über die N-Serie der X-Spektren. S. 111.

— Berichtigung. S. 264.

Eggert, J. und Noddack, W. Berichtigung zu der Arbeit: „Zur Prüfung des Äquivalentgesetzes an Trockenplatten". S. 264.

Farwig, K. Zur Frage des normalen und selektiven Photoeffektes der Alkalimetalle. S. 38.

Fehrle, Karl. Über die quantitative Beziehung der sprungweisen Änderung der Atome und der harmonischen Komponenten ihrer Massenänderung. II. S. 219.

Feussner, Otto. Über die Veränderung des Temperaturkoeffizienten von reinem Platin bei mechanischer Beanspruchung. S. 163.

Friedmann, A. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes. S. 326.

Fues, E. Eine spektroskopische Bestätigung der Bohrschen Besetzungszahlen bei Cäsium. S. 265.

Geiger, H. u. Werner, A. Die Zahl der von Radium ausgesandten α-Teilchen. I. Teil. Szintillationszählungen. S. 187.

Gerlach, Walther u. Madelung, E. Untersuchungen an Radiometern III. Notiz zur Radiometertheorie von E. Einstein. S. 254.

Goldstein, E. Über den Dunkelraum an der Kathode induzierter Entladungen. S. 252.

Gruner, P. Geometrische Darstellungen der speziellen Relativitätstheorie, insbesondere des elektromagnetischen Feldes bewegter Körper. S. 366.

Gudden, B. und Pohl, R. Über elektrische Leitfähigkeit bei Anregung und Lichtemission von Phosphoren. S. 1.

Günther-Schulze, A. Die Berechnung des normalen Kathodenfalles in Gasgemischen. S. 50.

Halpern, Otto. Über das Wärmegleichgewicht zwischen Hohlraumstrahlung und Quantenatomen. S. 151.

John, Charles E. St. Zur Gravitationsverschiebung im Sonnenspektrum. S. 159.

Kienle, Hans. Berichtigung. S. 264.

Kopfermann, H. Über sensibilisierte Fluoreszenz von Blei- und Wismutdampf. S. 316.

Kutzner, Walther. Über das Wahrscheinlichkeitsgesetz in Anwendung auf die radioaktive Strahlung des Poloniums. S. 281.
— s. Baeyer.
Lanczos, Kornel. Über eine stationäre Kosmologie im Sinne der Einsteinschen Gravitationstheorie. S. 73.
La Rosa, M. Addiert sich die Geschwindigkeit des Lichtes zu derjenigen der Lichtquelle? Dafür sprechende Beweise aus den Phänomenen der veränderlichen Sterne. S. 333.
Leiss, Carl. Autokollimations-Monochromator mit Wellenlängentrommel für das sichtbare und U.-V.-Gebiet, von 200 mμ bis 800 mμ. S. 60.
Lorenser, E. s. Ludewig.
Ludewig, P. und Lorenser, E. Über die Verwendbarkeit von Radium- und Urannormallösungen für Emanationsmessungen. S. 258.
Madelung, E. s. Gerlach.
Mecke, R. Beiträge zur Deutung der Quantentheorie. S. 26.
— Zur Quantenatomistik. S. 223.
Meissner, Otto. Der Ostwaldsche Farbdoppelkegel. S. 68.
Noddack, W. s. Eggert.
Nordheim, L. Die Berechnung höherer Näherungen zufällig entarteter Systeme. S. 242.
Ornstein, L. S. und Burger, H. C. Zusammenwirken von Lichtquanten und Planckscheş Gesetz. S. 358.
Petzoldt, J. Postulat der absoluten und relativen Welt. S. 143.
Pohl, R. s. Gudden.
Pokrowski, G. J. s. Woronkoff.
Siedentopf, H. Über Einstellung des Okularabstandes am binokularen Mikroskop. S. 178.
Simon, Franz u. Simson, Clara v. Die Kristallstruktur des Chlorwasserstoffs. S. 168.
Simson, Clara v. s. Simon.
Steubing, Walter und Toussaint, Mia. Die Veränderlichkeit des Stickstoffbandenspektrums durch Edelgase. S. 128.
Szegvari, A. Über ultramikroskopische Untersuchungen bei einseitiger Beleuchtung. Der ultramikroskopische Mie-Effekt. S. 348.
Toussaint, Mia s. Steubing.
Warburg, E. Über die Bildung von Jodwasserstoff durch stille Entladungen. S. 372.
Werner, A. s. Geiger.
Wessel, Walter. Über ein Feld inhomogener Strahlung. S. 63.
Woronkoff, G. P. und Pokrowski, G. J. Berichtigung. S. 332.